République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université de Mohamed El Bachir El Ibrahimi
Faculté des sciences et de la technologies

Mathématiques 3

Solution Série N02(Intégrales impropres)

Par : Dr. Bourahli Amel
Pour : 2 éme année ST (GC, GP, GM, AUTO, ELECT)

2021 / 2022

Exercice1:

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

$f(t) = \frac{1}{t}$ $\qquad f'(t) = \frac{-1}{t^2}$

$g'(t) = \sin t$ $\qquad g(t) = -\cos t$

$$I_1 = \lim_{x \to +\infty} \left. \frac{-\cos t}{t} \right|_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

On a $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| dt \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente puisque intégrale de Riemann de 1ère epèce ($\alpha = 2 > 1$). Donc, par comparaison $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| dt$ est convergente

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$$

Methode 01: On pose $t > 1 \Rightarrow \sqrt{1+t^2} > t$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} < \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente ($\alpha = 2 > 1$). Donc, par comparaison I_3 est convergente

Methode 02: On pose $y = \sqrt{1+t^2} \Rightarrow dy = \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} dy$

$$I = \lim_{x \to +\infty} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2\sqrt{1+t^2}} dy = \lim_{x \to +\infty} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}} \frac{dy}{t^2} \qquad y^2 - 1 = t^2$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{dy}{y^2-1} = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}} \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln(y-1) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}} - \ln(y+1) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y-1}{y+1} \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right).$$ Donc I_2 est convergente.

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t}$$

Méthode 01: On a $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$

On a quant $t \to +\infty$

$$I_3 \underset{\infty}{\simeq} \int_1^{+\infty} \frac{2}{e^t}\,dt = \int_1^{+\infty} 2e^{-t}\,dt = -2e^{-t}\Big|_1^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{e}$$

$\Rightarrow I_3$ est convergente

Méthode 02:

$$I_3 = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{\operatorname{sh} t} = \lim_{x\to+\infty} \ln\left|\operatorname{th}\frac{t}{2}\right|\Big|_1^x$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$I_3 = \lim_{x\to+\infty} \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\operatorname{th}\frac{1}{2}\right|$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right| - \ln\left|\frac{1-e^{-1}}{1+e^{-1}}\right|$$

$$= \ln\frac{1+e^{-1}}{1-e^{-1}}$$

$\Rightarrow I_3$ est convergente

$$I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad f'(t) = \frac{-1}{2t^2\sqrt{t}}$$

$$g'(t) = \cos t \qquad g(t) = \sin t$$

$$I_4 = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\Big|_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}}\, dt$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \cancel{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}} - \sin 1 + \frac{1}{2}\int_1^{x} \frac{\sin t}{t^{3/2}}\, dt$$

$$= -\sin 1 + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}}\, dt$$

- On a $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^{3/2}}\right| dt \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ est convergente puisque intégrale de Riemann $(\alpha = \frac{3}{2} > 1)$.

Donc, par comparaison $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^{3/2}}\right| dt$ est convergente, alors

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}}\, dt$ est absolument convergente.

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}}\, dt$ est convergente

$\Rightarrow I_4$ est convergente.

$$I_5 = \int_0^{\pi} \frac{1}{t} \cos\frac{1}{t}\, dt$$

On pose $y = \frac{1}{t} \Rightarrow dy = \frac{-1}{t^2}\, dt$, $dt = -t^2 dy$

$$I_5 = \int_{+\infty}^{\frac{1}{\pi}} -y\cos y \frac{1}{y^2}\, dy = \int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} \frac{y\cos y}{y^2}\, dy$$

$f(y) = \frac{1}{y}$ $\qquad$ $f'(y) = \frac{-1}{y^2}$

$g'(y) = \cos y$ $\qquad$ $g(y) = \sin y$

$$I_5 = \frac{\sin y}{y}\Big|_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} + \int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2}\, dy$$

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty}\left|\frac{\sin y}{y^2}\right|dy \leqslant \int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty}\frac{dy}{y^2} = \int_{\frac{1}{\pi}}^{1}\frac{dy}{y^2} + \int_{1}^{+\infty}\frac{dy}{y^2}$$

On a $\int_1^{+\infty}\frac{dy}{y^2}$ est convergente $(\alpha=2>1)$, donc $\int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty}\frac{\sin y}{y^2}dy$ est absolument convergente alors $\int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty}\frac{\sin y}{y^2}dy$ est convergente

$\Rightarrow I_5$ est convergente.

$I_6=\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t+4}\,dt$, posons $f(t)=\frac{\ln t}{t+4}$ et $g(t)=\frac{1}{t}$

$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t\ln t}{t+4}=+\infty$, donc $\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t+4}dt \geqslant \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}$

$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}$ diverge et d'après le critère de comparaison $\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t+4}dt$ est divergente.

$$I_7=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+5}=\int_0^{1}\frac{dt}{t^2+5}+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2+5}$$

Pour $t>1$: $t^2+5>t^2 \Rightarrow \frac{1}{t^2+5}<\frac{1}{t^2}$

Donc $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2+5} \leqslant \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$

On a $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ est convergente $(\alpha=2>1)$, alors $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2+5}$ est convergente

$\Rightarrow I_7$ est convergente

$I_8=\int_0^1\frac{dt}{1-t^2}$

$$\int_0^1\frac{dt}{1-t^2}=\operatorname{argth} t\Big|_0^1=\lim_{x\to1}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\Big|_0^x$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-0\right)=+\infty$$

$\Rightarrow I_8$ est divergente

$$I_9 = \int_0^1 \frac{\log t}{(1+t)^2}\,dt$$

$f(t) = \log t$ $\qquad f'(t) = \frac{1}{t}$

$g'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$ $\qquad g(t) = \frac{-1}{1+t}$

$$I_9 = \frac{-\log t}{1+t}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{dt}{t(1+t)} = \frac{-\log t}{t}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{dt}{t} - \int_0^1 \frac{dt}{t+1}$$

$$= \frac{-\log t}{t+1}\Big|_0^1 + \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| \Big|_0^1 \ldots$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\log x}{x+1} + \ln\frac{1}{2} - \cancel{\ln\frac{x}{x+1}}$$

$$= \ln\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I_9 = -\ln 2$$

Donc I_9 est convergente

$$I_{10} = \int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

$f(t) = \arctan\frac{1}{t}$ $\qquad f'(t) = \frac{-1}{1+t^2}$

$g'(t) = 1$ $\qquad g(t) = t$

$$I_{10} = \lim_{x \to +\infty} t\arctan t \Big|_1^x + \int_1^x \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\arctan x - \arctan 1 + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\arctan x - \arctan 1 + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_1^x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\arctan x - \arctan 1 + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln 2$$

$= +\infty \Rightarrow I_{10}$ est divergente.

$$I_{11} = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\, dt \qquad \alpha > 0$$

$f : [\pi, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longrightarrow f(t) = \sin t$

$F : x \longrightarrow \int_{\pi}^{x} \sin t\, dt$ est bornée

$$\int_{\pi}^{x} \sin t\, dt = -\cos t \Big]_{\pi}^{x} = -1 - \cos x$$

$$|F(x)| = \left| \int_{\pi}^{x} \sin t\, dt \right|$$

$$= |-1 - \cos x|$$

$$\leq |-1| + |\cos x|$$

$$\leq 2$$

$g : [\pi, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longrightarrow g(t) = \frac{1}{t^{\alpha}}$

$\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 0$, $\alpha > 0$ et décroissante $\left(g'(t) = -\alpha \frac{1}{t^{\alpha+1}} < 0\right)$

D'aprés le critère d'Abel I_{11} est convergente

Exercice 02 : Etudier la convergence absolue des intégrales suivantes

$$J_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt$$

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{1-\cos t}{t^2}\right| dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1+|\cos t|}{t^2}\, dt \qquad (|\cos t| \leq 1)$$

$$\leq 2\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente $(\alpha = 2 > 1)$. Donc J_1 est absolument convergente

$$J_2 = \int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$$

$$\int_0^1 \left|\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right| dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est convergente puisque intégrale de Riemann de $2^{ème}$ espèce $(\alpha = \frac{1}{2} < 1)$. Donc par comparaison $\int_0^1 \left|\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right| dt$ est convergente

$\Rightarrow J_2$ est absolument convergente

$$J_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^{17/5}+1}\, dt = \int_0^1 \frac{t^2}{t^{17/5}+1}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{t^{17/5}+1}\, dt$$

On a pour $t > 0$, $t^{17/5}+1 > t^{17/5} \Rightarrow \frac{1}{t^{17/5}+1} < \frac{1}{t^{17/5}}$

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{t^2}{t^{17/5}+1}\right| dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{t^{17/5}}\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{7/5}}\, dt.$$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{7/5}}$ converge puisque intégrale de Riemann de $1^{ère}$ espèce $(\alpha = \frac{7}{5} > 1)$.

Donc par comparaison $\int_1^{+\infty} \left|\frac{t^2}{t^{17/5}+1}\right|$ converge

$\int_0^1 \frac{t^2}{t^{17/5}+1}\, dt$ converge. D'où J_3 est absolument convergente

$J_4 = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$

On a $\forall t \in [0,1]$ $|\sin t| \leq 1$, donc $\forall t \in]0,1]$ $\left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq 1$

$$\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| dt \leq \int_0^1 dt = 1$$

$\int_0^1 dt$ converge, donc d'après le critère de comparaison $\int_0^1 \left|\sin\frac{1}{t}\right| dt$ converge et par suite $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ est absolument convergente

$J_5 = \int_\pi^{+\infty} t^2 \sin(t^4)\, dt$

On pose $u = t^4$, on obtient $\int_\pi^{+\infty} t^2 \sin(t^4)\, dt = \frac{1}{4} \int_{\pi^4}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{1/4}}\, du$

la fonction $u \longrightarrow \frac{1}{u^{1/4}}$ est décroissante et $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{1}{u^{1/4}} = 0$

et $\left|\int_\pi^x \sin u\, du\right| = |\cos\pi - \cos x| \leq 1 + |\cos x|$
$\leq 2 \quad \forall x \in [\pi, +\infty[$

Donc, d'après le critère d'Abel $\int_{\pi^4}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{1/4}} du$ converge

On a $\forall t$ $|\sin t| \geq \sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$

$$\int_{\pi^4}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{1/4}}\, dt \geq \int_{\pi^4}^{+\infty} \frac{dt}{2t^{1/4}} - \int_{\pi^4}^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t^{1/4}}\, dt$$

$\int_{\pi^4}^{+\infty} \frac{dt}{2t^{1/4}}$ diverge d'après Riemann et $\int_{\pi^4}^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t^{1/4}} dt$ converge d'après d'Abel et par suite $\int_{\pi^4}^{+\infty} \frac{|\sin u|}{u^{1/4}} du$ diverge

D'où $\int_\pi^{+\infty} t^2 \sin(t^4)\, dt$ est semi-convergente

Exercice 03:

$$K_1 = \int_1^{+\infty} \frac{2t\log t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

On a pour tout $t>1$ $\log t \leq \sqrt{t}$ donc $2t\log t \leq 2t^{3/2}$

$$\Rightarrow \frac{2t\log t}{(1+t^2)^2} \leq \frac{2t^{3/2}}{t^4} = \frac{2}{t^{5/2}}$$

donc $K_1 = \int_1^{+\infty} \frac{2t\log t}{(1+t^2)^2}\,dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^{5/2}}\,dt$

$\Rightarrow K_1$ est convergente

$f(t) = \log t$: $\qquad f'(t) = \frac{1}{t}$

$g'(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2} \qquad g(t) = \frac{-1}{1+t^2}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{2t\log t}{(1+t^2)^2}\,dt = -\frac{\log t}{1+t^2}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}$$

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2} \Rightarrow a=1$$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 + \frac{bt^2+ct}{1+t^2} \quad \text{quand } t \to +\infty$$

$$0 = 1+b \Rightarrow b=-1$$

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1+t^2-t^2+ct}{t(1+t^2)} \Rightarrow c=0$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{2t\log t}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{-\log t}{1+t^2} + \ln|t| - \frac{1}{2}\ln|1+t^2| \Big|_1^{+\infty}$$

$$K_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\log t}{1+t^2} + \ln\left|\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right| \Big|_1^{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\log x}{1+x^2} + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$$

$$= \ln\sqrt{2}$$

$$K_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2}\,dt$$

$f(t) = \arctan t$ $\qquad f'(t) = \frac{1}{1+t^2}$

$g'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ $\qquad g(t) = \arctan t$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2}\,dt = (\arctan t)^2 \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2}\,dt$$

$$K_2 = \lim_{x\to+\infty} (\arctan t)^2 \Big|_0^{x} - K_2$$

$$2K_2 = \lim_{x\to+\infty} (\arctan x)^2 - (\arctan 0)^2$$

$$K_2 = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow K_2 = \frac{\pi^2}{8}$$

$$M_n = \int_0^{1/2} \frac{dt}{t(\log t)^n} \quad , n \in \mathbb{N}^*$$

$n=1$:

$$M_n = \lim_{x\to 0} \int_x^{1/2} \frac{1/t}{\log t}\,dt = \lim_{x\to 0} \log|\log t| \Big|_x^{1/2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \log|\log x| - \log\left|\log \tfrac{1}{2}\right|$$

$$= -\infty$$

$n \geq 2$

$$M_n = \int_0^{1/2} \frac{1}{t} (\log t)^{-n}\,dt = \lim_{x\to 0} \frac{1}{-n+1} (\log t)^{-n+1} \Big|_x^{1/2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{-n+1} \left(\log \tfrac{1}{2}\right)^{-n+1} - \cancel{\frac{1}{1-n} (\log x)^{1-n}}^{\,0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{-n+1} (-\log 2)^{-n+1}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{1-n} (\log 2)^{1-n}$$

$$H_n = \int_0^1 (\log t)^n \, dt \quad \backslash n \in \mathbb{N}$$

On pose $y = \log t \Rightarrow dy = \frac{1}{t} dt \Rightarrow dt = t\,dy$

$t = e^y$

$$\int_0^1 (\log t)^n \, dt = \int_{-\infty}^0 y^n e^y \, dy$$

$f(y) = y^n$ $\qquad\qquad$ $f'(y) = n y^{n-1}$

$g'(y) = e^y$ $\qquad\qquad$ $g(y) = e^y$

$$H_n = \lim_{x \to -\infty} \int_x^0 y^n e^y \, dy = \lim_{x \to -\infty} y^n e^y \Big|_x^0 - n \int_x^0 y^{n-1} e^y \, dy$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^n e^x - n H_{n-1}$$

$$H_n = -n H_{n-1}$$

$$H_{n-1} = -(n-1) H_{n-2}$$

$\vdots$

$$H_1 = H_0 = -1$$

$$H_n = -n \{-(n-1)\}\{-(n-2)\} \cdots (-1)$$

$$= (-1)^n n (n-1) \cdots 1$$

$$= (-1)^n n!$$

Exercice 04:

① - Si $a>1$, on choisit $\alpha \in]1,a[$

posons $f(t)=\frac{1}{t^a(\ln t)^b}$, $g(t)=\frac{1}{t^\alpha}$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^\alpha}{t^a(\ln t)^b}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\alpha-a}}{(\ln t)^b}=0$$

Donc $\frac{1}{t^a(\ln t)^b}\leqslant\frac{1}{t^\alpha}\Rightarrow\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^a(\ln t)^b}\leqslant\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$

puisque $\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente $(\alpha>1)$, alors $\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^a(\ln t)^b}$ est convergente

- Si $a<1$, on choisit $\alpha\in]a,1[$

posons $f(t)=\frac{1}{t^a(\ln t)^b}$, $g(t)=\frac{1}{t^\alpha}$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\alpha-a}}{(\ln t)^b}$$

$$=+\infty$$

Donc $\frac{1}{t^a(\ln t)^b}\geqslant\frac{1}{t^\alpha}\Rightarrow\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^a(\ln t)^b}\geqslant\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$

$\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ est divergente. $(\alpha<1)$, alors par comparaison $\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^a(\ln t)^b}$ est divergente

② Si $b\neq1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^b} = \lim_{x \to +\infty} \int_2^x \frac{1/t}{(\ln t)^b}\, dt$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left. \frac{(\ln t)^{-b+1}}{-b+1} \right|_2^{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^{-b+1}}{-b+1} - \frac{(\ln 2)^{-b+1}}{-b+1}$$

Si $-b+1 > 0 \Leftrightarrow b < 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^b} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^{-b+1}}{-b+1} - \frac{(\ln 2)^{-b+1}}{-b+1}$$

$$= +\infty$$

Alors $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^b}$ est divergente

Si $-b+1 < 0 \Leftrightarrow b > 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^b} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^{-b+1}}{-b+1} - \frac{(\ln 2)^{-b+1}}{-b+1}$$

$$= 0$$

Alors $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^b}$ est convergente

Si $b = 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)} = \lim_{x \to +\infty} \ln|\ln t| \Big|_2^{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln|\ln x| - \ln|\ln 2|$$

$$= +\infty$$

Alors $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)}$ est divergente.

Exercice 05:

1- Déterminer l'ensemble de définition de f revient à trouver les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$ est convergente

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longrightarrow \frac{t^{-x}}{1+t}$ est continue sur $[1, +\infty[$

$$\forall t \geq 1 \quad t+1 \geq t \Rightarrow \frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{t^{-x}}{t+1} \leq \frac{t^{-x}}{t}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{t+1} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}$ intégrale de Riemann converge si et seulement si

$x+1 > 1 \Rightarrow x > 0$

Donc par comparaison $\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{t+1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$

Ainsi, f est définie sur $]0, +\infty[$

2. Soient x, y deux réels strictement positifs et soit $t \geq 1$

$$x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$$

$$\Rightarrow \forall t \geq 1 \quad -x \ln t \geq -y \ln t \text{ (car } \ln t \geq 0 \ \forall t \geq 1)$$

$$\Rightarrow \forall t \geq 1 \quad e^{-x \ln t} \geq e^{-y \ln t}$$

$$\Rightarrow \forall t \geq 1 \quad t^{-x} \geq t^{-y}$$

$$\Rightarrow \forall t \geq 1 \quad \frac{t^{-x}}{1+t} \geq \frac{t^{-y}}{1+t}$$

$$\Rightarrow \forall A > 1 \quad \int_1^A \frac{t^{-x}}{1+t} dt \geq \int_1^A \frac{t^{-y}}{1+t} dt$$

$$\Rightarrow \text{lorsque } A \rightarrow +\infty \quad f(x) \geq f(y)$$

Ainsi, la fonction f est décroissante sur $]0,+\infty[$

3 - Soit $x>0$. Alors

$$f(x)+f(x+1)=\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x}}{1+t}\,dt+\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x-1}}{1+t}\,dt$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x}+t^{-x-1}}{1+t}\,dt$$

$$=\int_1^{+\infty}t^{-x-1}\frac{1+t}{1+t}\,dt$$

$$=\int_1^{+\infty}t^{-x-1}\,dt$$

$$=\left.-\frac{1}{x}t^{-x}\right]_1^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{x}$$

Donc $\forall x>0 \quad f(x)+f(x+1)=\frac{1}{x}$

4 - On sait que f est décroissante et $f(x)\geqslant 0$ (f est minorée par 0)

donc f admet en $+\infty$ une limite finie $l\geqslant 0$

lorsque $x\longrightarrow+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+f(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} 2f(x)=2l=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x+1)=f(1)=\int_1^{+\infty}\frac{t^{-1}}{1+t}\,dt=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(t+1)}$

$$=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\lim_{A\to+\infty}\left.\ln t-\ln(t+1)\right]_1^{A}$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\ln\frac{A}{A+1}+\ln 2$$

$$=\ln 2$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) + f(x+1) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) + \ln 2 = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Donc $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \ln 2$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$