Université El Bachir El Ibrahimi BBA
Faculté des sciences et de la technologie
2 ème année (ST, GC, GP, GM, AUTO, ELECT)

2021/2022
Matière :Maths3
D.r A Bourahli

Série N^o01
Intégrales simples et multiples

Exercice1 Calculer les intégrales suivantes

$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx,\quad I_2 = \int \frac{x}{(1+4x^2)^3}dx,\quad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - cos(3x))\,dx,\quad I_4 = \int \frac{dx}{x^2-7x+10}$

$I_5 = \int \frac{dx}{(x-1)^2(x+3)},\quad I_6 = \int \frac{dx}{x^2+3x+8},\quad I_7 = \int \frac{dx}{(x^2+5)(x+3)},\quad I_8 = \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

Exercice2 Calculer les intégrales suivantes

$J_1 = \int arctanx dx,\quad J_2 = \int (lnx)^2 dx,\quad J_3 = \int cosx e^x dx,\quad J_4 = \int x^n lnx dx$

$J_5 = \int x cos^2 x dx,\quad J_6 = \int_0^1 \frac{x}{2} ln\left(1+x^2\right) dx,\quad J_7 = \int \sqrt{x^2+6x-5}dx,\quad J_8 = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

Exercice3 Calculer les intégrales suivantes

$K_1 = \int_1^e \frac{e^x}{1+e^x}dx,\quad K_2 = \int cos\left(\sqrt{x}\right)dx,\quad K_3 = \int \frac{sinx}{\sqrt[3]{cos^4 x}}dx$

$K_4 = \int \frac{dx}{1+cosx},\quad K_5 = \int \frac{coshx-1}{coshx+1}e^x dx.$

Exercice4 Soient

$I = \int_0^1 xch^2(x)\,dx$ et $J = \int_0^1 xsh^2(x)\,dx$

1. Calculer $I - J$
2. Calculer $I + J$
3. En déduire I et J

Exercice5 Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

1. En majorant la fonction intégée, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$
3. Déterminer $lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Exercice6 Pour tout entier naturel n, on définit

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} sinx dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} cosx dx$

1. Calculer I_0 et J_0
2. En intégrant par parties I_n puis J_n, montrer que
$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$
3. En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n

4. Déterminer la limite de I_n et celle de J_n quand n tend vers $+\infty$

Exercice7 Soit D le domaine

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x\geq 0; y\geq 0, x+y\leq 1\right\}$$

Calculer $\int\int_D f(x,y)\,dxdy$ dans les cas suivants

1. $f(x,y)=x^2+y^2$
2. $f(x,y)=xy(x+y)$

Exercice8 Soit D le domaine

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; -1\leq x\leq 1 \text{ et } x^2\leq y\leq 4-x^3\right\}$$

Calculer l'aire de D.

Exercice9 Calculer les intégrales doubles suivantes $\int\int_D f(x,y)\,dxdy$ sur les domaines indiqués

1. $f(x,y)=x$ et $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y\geq 0; x-y+1\geq 0; x+2y-4\leq 0\right\}$
2. $f(x,y)=cos(xy)$ et $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1\leq x\leq 2; 0\leq xy\leq \frac{\pi}{2}\right\}$
3. $f(x,y)=\frac{-1}{(x+y)^3}$ et $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1<x<3; y>2; x+y<5\right\}$
4. $f(x,y)=xy\sqrt{x^2+2y^2}$ et $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x>0; x^2+y^2<1\right\}$.

Exercice10

1. Calculer l'intégrale double suivante $I=\int\int_D (x+2y)\,dxdy$ sur le domaine D formé de la réunion de la partie gauche du disque unité et du triangle de sommets $A(0,1)$, $B(0,1)$ et $C(2,1)$
2. Calculer l'aire de la figure limitée par la parabole $y=x^2$ et la droite $y=a^2$

Exercice11 Calculer $\int\int_D \frac{xdxdy}{1+x^2+y^2}$ où

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\leq 1 \text{ et } x\geq 0\right\}.$$

Exercice12 Soit le domaine

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; \frac{1}{2}\leq x^2+y^2\leq 3 \text{ et } x\geq 0\right\}$$

1. représenter graphiquement le domaine d'intégration D
2. Calculer l'intégrale suivante

$$\int\int_D \left(x^2+y^2\right) dxdy.$$

Exercice13 Soit

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2-2x\leq 0\right\}$$

1. Montrer que D est un disque
2. Calculer $\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$.

Exercice14 Calculer $\int\int\int_{\Delta} f(x,y,z)\, dxdydz$ pour
$f(x,y,z) = 1 - 2yz$ et $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1; 0 \leq z \leq 3\}$.
Exercice15 Calculer le volume de V

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = 4 - y^2; x + z = 4; x = 0; z = 0\right\}.$$

Exercice16 En utilisant les coordonnées cylindriques, calculer l'intégrale triple suivante

$$\int\int\int_D \left(x^2 + y^2 + z\right) dxdydz$$

avec Δ est le cylindre defini par

$$\Delta = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 9; -5 \leq z \leq 5\right\}.$$