République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université de Mohamed El Bachir El Ibrahimi
Faculté des sciences et de la technologies

Mathématiques 3

Solution Série N03(Equations différentielles)

Par : Dr. Bourahli Amel
Pour : 2 éme année ST (GC, GP, GM, AUTO, ELECT)

2021 / 2022

Exercice 01:

1- $y' \sin x - y \cos x = 0$ (équation à variable séparée)

$y' \sin x = y \cos x \Rightarrow y' = y \frac{\cos x}{\sin x}$

$\frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln|\sin x| + c \quad | c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |y| = e^c |\sin x|$

$\Rightarrow y = \pm e^c \sin x$

$\Rightarrow y = k \sin x \quad | k \in \mathbb{R}$

2- $y' + \frac{2y}{1-x^2} = 0$ (équation à variable séparée)

$y' = -\frac{x}{1-x^2} y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{1-x^2} y$

$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{x}{1-x^2} dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2} \ln|1-x^2| + c \quad | c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |y| = \sqrt{|1-x^2|}\, e^c \Rightarrow y = \pm e^c \sqrt{|1-x^2|}$

$\Rightarrow y = k \sqrt{|1-x^2|} \quad | k \in \mathbb{R}$

3- $y' = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$ (équation homogène)

$y' = \frac{1 + 3\frac{y^2}{x^2}}{2\frac{y}{x}} = \frac{1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}$

On pose $t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xt$

$\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$

$t + x\frac{dt}{dx} = \frac{1+3t^2}{2t}$

$2t^2 + 2tx\frac{dt}{dx} = 1 + 3t^2$

$2tx\frac{dt}{dx} = 1 + t^2 \Rightarrow \frac{2tx\frac{dt}{dx}}{1+t^2} = 1$

$$\frac{2t}{1+t^2}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow \int\frac{2t}{1+t^2}dt=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln(1+t^2)=\ln|x|+c \quad \backslash c\in\mathbb{R}$$

$$1+t^2=e^c|x| \Rightarrow 1+t^2=kx \quad \backslash k\in\mathbb{R}$$

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2=kx \Rightarrow 1+\frac{y^2}{x^2}=kx$$

$$x^2+y^2=kx^3 \Rightarrow x^2+y^2-x^3k=0$$

$$\Rightarrow y^2=kx^3-x^2$$

$$\Rightarrow y=\pm\sqrt{kx^3-x^2}$$

4- $(1-x^3)y'+3x^2y=-y^2$ (équation de Bernoulli)

On divise l'équation par y^2, on obtient

$$(1-x^3)y'y^{-2}+3x^2y^{-1}=-1$$

On pose $z=y^{-1}$ donc $z'=-y'y^{-2}$

$$-(1-x^3)z'+3x^2z=-1$$

$$-(1-x^3)z'+3x^2z=0$$

$$(1-x^3)z'=3x^2z \Rightarrow \frac{dz}{z}=\frac{3x^2}{1-x^3}dx$$

$$\ln|z|=-\ln|1-x^3|+c \quad \backslash c\in\mathbb{R} \Rightarrow z=\frac{k}{1-x^3} \quad \backslash k\in\mathbb{R}$$

$$z=\frac{k(x)}{1-x^3} \Rightarrow z'(x)=\frac{k'(x)(1-x^3)+3x^2k(x)}{(1-x^3)^2}$$

$$\frac{-k'(x)(1-x^3)^2}{(1-x^3)^2}+\cancel{\frac{3x^2k(x)}{1-x^3}}-\cancel{\frac{3x^2k(x)}{1-x^3}}=-1$$

$$k'(x)=\frac{1-x^3}{1-x^3}=1 \Rightarrow k(x)=x+c \quad \backslash c\in\mathbb{R}$$

Donc $z(x)=\dfrac{x+c}{1-x^3}$

D'où $y=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1-x^3}{x+c}$

Exercice 2.

1- $y'(x) - 4y(x) = 3$

L'équation homogène est $y' - 4y = 0$

$y' = 4y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4y$

$\Rightarrow \frac{dy}{y} = 4dx$

$\Rightarrow \ln|y| = 4x + c \quad \backslash c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |y| = e^{4x+c}$

$\Rightarrow y = \pm e^{c} . e^{4x} = K e^{4x} \quad \backslash K \in \mathbb{R}$

La solution générale de l'équation homogène est $y(x) = K e^{4x}$

Solution particulière $y_p(x) = g(x) e^{4x}$ avec $g(x)$ primitive de $3e^{-4x}$

$\Rightarrow g(x) = \frac{-3}{4} e^{-4x}$

$\Rightarrow y_p(x) = \frac{-3}{4} e^{-4x} . e^{4x} = -\frac{3}{4}$

Donc la solution générale est $y(x) = K e^{4x} - \frac{3}{4}$

2- $y' + y = 2e^{x}$

L'équation homogène est $y' + y = 0$

$y' = -y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx$

$\Rightarrow \ln|y| = -x + c \quad \backslash c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |y| = e^{-x+c} = e^{c} . e^{-x}$

$\Rightarrow y = \pm e^{c} . e^{-x} = K e^{-x} \quad \backslash K \in \mathbb{R}$

Variation de la constante $y(x) = K(x) e^{-x} \Rightarrow y'(x) = K'(x) e^{-x} - K(x) e^{-x}$

$K'(x) e^{-x} - K(x) e^{-x} + K(x) e^{-x} = 2 e^{x}$

$K'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow K(x) = e^{2x} + C \quad | \; C \in \mathbb{R}$

Donc $y(x) = (e^{2x} + C)e^{-x} = Ce^{-x} + e^{x}$

3- $y' - \tan x \, y = \sin x$

L'équation homogène est $y' - \tan x \, y = 0$

$y' = \tan y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \tan x \, dx = \frac{+\sin x}{\cos x} dx$

$\ln|y| = -\ln|\cos x| + C \quad | \; C \in \mathbb{R}$

$|y| = e^{C} . e^{-\ln|\cos x|} \Rightarrow y = \pm e^{C} . (1/|\cos x|)$

$\Rightarrow y = K(1/\cos x) \quad | \; K \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y = \frac{K}{\cos x} \quad | \; K \in \mathbb{R}$

Variation de la constante $y(x) = \frac{K(x)}{\cos x}$

$y'(x) = \frac{K'(x)\cos x + \sin x \, K(x)}{\cos^2 x}$

$\frac{K'(x)\cos x + \sin x \, K(x)}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \, K(x)}{\cos^2 x} = \sin x$

$\frac{K'(x)}{\cos x} = \sin x \Rightarrow K'(x) = \frac{2}{2} \sin x \cos x$

$K(x) = \frac{1}{2} \sin^2(x) + C \quad | \; C \in \mathbb{R}$

Donc $y(x) = \frac{\frac{1}{2}\sin^2(x) + C}{\cos x}$

4- $y' - \frac{y}{x} = x$

L'équation homogène est $y' - \frac{y}{x} = 0$

$y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = \ln|x| + C \Rightarrow |y| = e^{\ln|x| + C} = e^{C}|x| \quad | \; C \in \mathbb{R}$

$y = \pm e^{c} x \Rightarrow y = Kx \quad \backslash K \in \mathbb{R}$

Variation de la constante $y(x) = K(x) x$

$y'(x) = K'(x) x + K(x)$

$K'(x) x + K(x) - K(x) = x \Rightarrow K'(x) = 1$

$K(x) = x + c \quad \backslash c \in \mathbb{R}$

Donc $y(x) = (x+c)x = x^2 + cx$

5- $(1+x) y' = 2 - y$

L'équation homogène est $(1+x) y' + y = 0$

$(1+x) y' = -y \Rightarrow y' = \dfrac{-y}{1+x}$

$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{-dx}{1+x} \Rightarrow \int \dfrac{dy}{y} = -\int \dfrac{dx}{1+x}$

$\ln|y| = -\ln|1+x| + c \quad \backslash c \in \mathbb{R}$

$|y| = e^{c} \cdot e^{-\ln|1+x|} = e^{c} \cdot e^{\ln \frac{1}{|1+x|}}$

$y = \pm \dfrac{e^{c}}{1+x} = \dfrac{K}{1+x} \quad \backslash K \in \mathbb{R}$

$y(x) = \dfrac{K}{1+x}$

Variation de la constante $y(x) = \dfrac{K(x)}{1+x}$

$y'(x) = \dfrac{K'(x)(1+x) - K(x)}{(1+x)^2}$

$\dfrac{(1+x) K'(x)(1+x) - K(x)(1+x)}{(1+x)^2} = 2 - \dfrac{K(x)}{1+x}$

$K'(x) - \dfrac{K(x)}{1+x} = 2 - \dfrac{K(x)}{1+x}$

$K'(x) = 2 \Rightarrow K(x) = 2x + c$

Donc $y(x) = \frac{2x+C}{1+x}$

Exercice 03 :

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants

1- $y' - 2y = 4$, $y(0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

L'équation homogène est $y' - 2y = 0$

$y' = 2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx$

$\Rightarrow \ln|y| = 2x + C$, $C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |y| = e^C . e^{2x} \Rightarrow y = \pm e^C e^{2x}$

Donc $y(x) = K e^{2x}$, $K \in \mathbb{R}$

$y(x) = K(x) e^{2x} \Rightarrow y'(x) = K'(x) e^{2x} + 2K(x) e^{2x}$

$K'(x) e^{2x} + 2K(x) e^{2x} - 2K(x) e^{2x} = 4$

$K'(x) = 4e^{-2x} \Rightarrow K(x) = -2e^{-2x} + C$, $C \in \mathbb{R}$

Donc $y(x) = (-2e^{-2x} + C) e^{2x} = Ce^{2x} - 2$

$y(0) = 0 \Rightarrow C - 2 = 0 \Rightarrow C = 2$

D'où $y(x) = 2e^{2x} - 2$

2- $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$ $y(1) = 0$

L'équation homogène est $y' - \frac{y}{x} = 0$

$y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = \ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R} \Rightarrow |y| = e^C . e^{\ln|x|}$

$y = \pm e^C x \Rightarrow y = Kx$, $K \in \mathbb{R}$

$y(x) = K(x) x$, $y'(x) = K'(x) . x + K(x)$

$K'(x).x+K(x)-K(x)=\frac{1}{x}$

$K'(x)=\frac{1}{x^2} \Rightarrow K(x)=\frac{-1}{x}+C$

$y(x)=(-\frac{1}{x}+c)x=Cx-1 \Rightarrow y(x)=Cx-1$

$y(1)=0 \Rightarrow C-1=0 \Rightarrow C=1$

D'où $y(x)=x-1$

3- $y'-2y=2x \qquad y(0)=\frac{1}{4}$

L'équation homogène est $y'-2y=0$

$y'=2y \Rightarrow \frac{dy}{y}=2dx$

$\ln|y|=2x+C \quad | C\in\mathbb{R}$

$|y|=e^{C}.e^{2x} \Rightarrow y=\pm e^{C}.e^{2x}$

$y=k\,e^{2x} \quad | k\in\mathbb{R}$

$y(x)=K(x)\,e^{2x} \Rightarrow y'(x)=K'(x)\,e^{2x}+2K(x)\,e^{2x}$

$K'(x)e^{2x}+2\cancel{K(x)}e^{2x}-2\cancel{K(x)}e^{2x}=2x$

$K'(x)=2x\,e^{-2x}$

$u(x)=x \qquad u'(x)=1$

$v'(x)=e^{-2x} \qquad v(x)=\frac{-1}{2}e^{-2x}$

$K(x)=\int 2x\,e^{-2x}\,dx=-x\,e^{-2x}\Big|+\int e^{-2x}\,dx$

$K(x)=-x\,e^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+C \qquad | C\in\mathbb{R}$

$y(x)=(-x\,e^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+C)e^{2x}$

D'où $y(x)=-x-\frac{1}{2}+C\,e^{2x}$

$y(0)=\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2}+C=\frac{1}{4} \Rightarrow C=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

Donc $y(x)=-x-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e^{2x}$

4- $x^2y' - (2x-1)y = x^2$, $y(1) = 1$, $x>0$

L'equation homogène est $y' - \frac{2x-1}{x^2} y = 0$

$y' = \frac{2x-1}{x^2} y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2x-1}{x^2} dx = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$

$\ln|y| = 2\ln|x| + \frac{1}{x} + c$ | $c \in \mathbb{R}$

$= 2\ln x + \frac{1}{x} + c$ car $x>0$

$|y| = e^c . e^{\frac{1}{x}} . e^{\ln x^2} \Rightarrow y = \pm e^c x^2 e^{\frac{1}{x}} = k x^2 e^{\frac{1}{x}}$ | $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y(x) = k x^2 e^{\frac{1}{x}}$

$y(x) = k(x) x^2 e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y'(x) = k'(x)\left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right) + k(x)\left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right)'$

$= k'(x)\left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right) + k(x)\left[2x e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} x^2 e^{\frac{1}{x}}\right]$

$y'(x) = k'(x)\left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right) + k(x)\left(2x e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}\right)$

$= \left(k'(x) x^2 + 2x k(x) - k(x)\right) e^{\frac{1}{x}}$

$\left(k'(x) x^2 + \underline{2x k(x) - k(x)}\right) e^{\frac{1}{x}} - \frac{2x-1}{x^2} k(x) x^2 e^{\frac{1}{x}} = 1$

$k'(x) e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow k'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

$\Rightarrow k(x) = e^{-\frac{1}{x}} + c$ | $c \in \mathbb{R}$

Donc $y(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}} + c\right) x^2 e^{\frac{1}{x}} = x^2 e^{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x}} + c x^2 e^{\frac{1}{x}}$

$y(x) = c x^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$

$y(1) = 1 \Rightarrow c + 1 = 1 \Rightarrow c = 0$

D'où $y(x) = x^2$.

5- $(x+1)y' - xy + 1 = 0$, $y(0) = 2$, $x > -1$

$y' - \frac{x}{x+1} y = \frac{-1}{x+1}$

L'équation homogène est $y' - \frac{x}{x+1} y = 0$

$$y' = \frac{x}{x+1} y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x}{x+1} dx = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right) dx$$

$$\frac{dy}{y} = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx \Rightarrow \ln|y| = x - \ln|x+1| + c \quad \backslash c \in \mathbb{R}$$

$$|y| = \frac{e^c . e^x}{x+1} \Rightarrow y = \frac{\pm e^c . e^x}{x+1} = \frac{k e^x}{x+1} \quad \backslash k \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{k(x) e^x}{x+1} \Rightarrow y'(x) = \frac{(k(x) e^x)'(x+1) - k(x) e^x}{(x+1)^2}$$

$$y'(x) = \frac{(k'(x) e^x + k(x) e^x)(x+1) - k(x) e^x}{(x+1)^2}$$

$$\frac{(k'(x) e^x + k(x) e^x)(x+1) - k(x) e^x}{(x+1)^2} - \frac{x k(x) e^x}{x+1} = \frac{-1}{x+1}$$

$$\frac{k'(x) e^x}{x+1} = \frac{-1}{x+1} \Rightarrow k'(x) = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow k(x) = +e^{-x} + c \quad \backslash c \in \mathbb{R}$$

Donc $y(x) = \frac{(+e^{-x} + c) e^x}{x+1} = \frac{c e^x + 1}{x+1}$

$y(0) = 2 \Rightarrow c + 1 = 2 \Rightarrow c = 1$

La solution est donc $y(x) = \frac{e^x + 1}{x+1}$

Exercice 04 :

1- $y'' - 5y' + 6y = 0$

L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = 0$

$\Delta = 1 > 0 \Rightarrow r_1 = 2$ et $r_2 = 3$

La solution générale est $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \quad \backslash \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2- $y'' + 4y' + 4y = 0$

L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 4 = 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow r = -2$

La solution générale est $y(x) = (\lambda x + c)e^{-2x}$ $\backslash \lambda, c \in \mathbb{R}$

3- $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow r = -1$

La solution générale est $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{-x}$ $\backslash \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$y'(x) = \lambda e^{-x} - (\lambda x + \mu)e^{-x}$

$$\begin{cases} y(0) = \mu = 1 \\ y'(0) = \lambda - \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

La solution est $y(x) = (x+1)e^{-x}$

4- $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

L'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$

$\Delta = -16 < 0 \Rightarrow r = \pm 2i$

La solution générale est $y(x) = \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)$ $\backslash \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$y'(x) = -2\lambda\sin(2x) + 2\mu\cos(2x)$

$$\begin{cases} y(0) = \lambda = 0 \\ y'(0) = 2\mu = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

La solution est $y(x) = \sin(2x)$

5- $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

L'équation caractéristique est $r^2 + 3r = 0$

$\Delta = 9 > 0 \Rightarrow r_1 = 0$ et $r_2 = -3$

La solution générale est $y(x) = \lambda + \mu e^{-3x}$ $\backslash \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$y'(x) = -3\mu e^{-3x}$

$$\begin{cases} y(0) = \lambda + \mu = 0 \\ y(1) = \lambda + \mu e^{-3} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\mu = \frac{e^3}{e^3 - 1}$$

La solution est $y(x) = \frac{e^3}{e^3-1}\left(1 - e^{-3x}\right)$.

Exercice 05 :

1- $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$

L'équation homogène est $y'' - 3y' + 2y = 0$

L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$

$\Delta = 1 > 0 \Rightarrow r_1 = 1$ et $r_2 = 2$

La solution générale ~~est~~ de l'équation homogène est

$$y(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{2x} = \lambda e^{x} + \mu e^{2x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow y_p'(x) = 2ax + b$$

$$y_p''(x) = 2a$$

$$y_p''(x) - 3y_p'(x) + 2y_p(x) = 2a - 6ax - 3b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 4x^2$$

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ 2b - 6a = 0 \\ 2c - 3b + 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \\ c = 7 \end{cases}$$

La solution générale de l'équation est $y(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7$

2- $y'' + 2y' + y = 4xe^{x}$

L'équation homogène est $y'' + 2y' + y = 0$

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow r = -1$

La solution générale de l'équation homogène est $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{-x}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$y_p(x) = (ax+b)e^x \Rightarrow y_p''(x) = (2a+ax+b)e^x$

$y_p'(x) = (ax+a+b)e^x$

$(ax+2a+b)e^x + (2ax+2a+2b)e^x + (ax+b)e^x = 4xe^x$

$\begin{cases} 4a = 4 \\ 2a+b+2a+2b+b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 4+4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Donc $y_p(x) = (x-1)e^x$

$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{-x} + (x-1)e^x.$

3- $y'' + y = \cos x$

L'équation homogène est $y'' + y = 0$

L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$

$\Delta = -4 < 0 \Rightarrow r = \pm i$

La solution générale de l'équation homogène est $y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$

$y_p(x) = \lambda(x)\cos x + \mu(x)\sin x$

$y_1(x) = \cos x \quad , y_2(x) = \sin x$

$\begin{cases} \lambda'(x)\cos x + \mu'(x)\sin x = 0 \\ -\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x = \cos x \end{cases}$

En multipliant la première ligne par $\sin x$ et la second par $\cos x$, on obtient

$\begin{cases} \lambda'(x)\cos x \sin x + \mu'(x)\sin^2 x = 0 \\ -\lambda'(x)\sin x \cos x + \mu'\cos^2 x = \cos^2 x \end{cases}$

$\Rightarrow \mu'(x) = \cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2} \Rightarrow \mu(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin(2x)}{4}$

$\lambda'(x)\cos x + \cos^2 x \sin x = 0 \Rightarrow \lambda'(x) = -\cos x \sin x$

$\Rightarrow \lambda(x) = \frac{1}{2}\cos^2(x)$

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\cos^2 x \cos x + \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right)\sin x$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2 x \cos x + \left(\frac{x}{2} + \frac{2\cos x \sin x}{4}\right)\sin x$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2 x \cos x + \left(\frac{x}{2}\sin x + \frac{\cos x \sin^2 x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cos x(\cos^2 x + \sin^2 x) + \frac{x}{2}\sin x$$

$$= \frac{\cos x}{2} + \frac{x}{2}\sin x$$

Donc $y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \frac{\cos x}{2} + \frac{x}{2}\sin x$

$$= C\cos x + \left(\mu + \frac{x}{2}\right)\sin x \quad | \; C, \mu \in \mathbb{R}$$

4- $y'' - y = -6\cos x + 2\sin x$

L'équation homogène est $y'' - y = 0$

L'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$

$$\Rightarrow r_1 = 1 \quad , r_2 = -1$$

donc la solution de l'équation homogène est $y(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$g(x) = -6\cos + 2\sin x$, avec $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_1(x) = -6$, $P_2(x) = 2$

$g(x) = e^{\alpha x}\left(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\right)$

$\alpha + i\beta = i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, donc

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x$$

$$\Rightarrow y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x$$

$$\Rightarrow y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x$$

$$-A\cos x - B\sin x - A\cos x - B\sin x = -6\cos x + 2\sin x$$

$$\Rightarrow -2A\cos x - 2B\sin x = -6\cos x + 2\sin x$$

$$\begin{cases} -2A = -6 \\ -2B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -1 \end{cases}$$

donc $y_p(x) = 3\cos x - \sin x$

D'où la solution générale est

$$y(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-x} + 3\cos x - \sin x \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 06

1). $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = y$

Cette EDP est linéaire, non homogène et d'ordre 2

2) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 1$

Cette EDP n'est pas linéaire, Elle est d'ordre 1, non homogène

3) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$

Cette EDP est linéaire, homogène et d'ordre 4

4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x)$

Cette EDP est linéaire, non homogène et d'ordre 2

5) $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \sin(u) = e^y$

Cette EDP est non linéaire, non homogène, d'ordre 2

Exercice 07

Si $u(x,y) = x^2 - y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$$

$\Rightarrow u$ est bien une solution

Si $u(x,y) = e^x \sin y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y \,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \sin y \,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y \,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$$

$\Rightarrow$ u est bien une solution

Exercice 08:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0 \quad \text{où} \quad u = u(x,y)$$

On pose $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)\,Y(y) \,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)\,Y(y)$$

$$X''(x)Y(y) + X(x)\,Y(y) = 0 \Rightarrow X''(x) + X(x) = 0$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, $r = \pm i$

$$X(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$$

Donc $u(x,y) = \lambda(y) \cos x + \mu(y) \sin x$

Exercice 09:

On pose $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, alors en utilisant la règle de chaînes nous obtenons.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)(-1)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{4\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta)$$

$$\Rightarrow u(\xi, \eta) = \int f(\eta)\, d\eta + g(\xi)$$

$$\Rightarrow u(\xi, \eta) = h(\eta) + g(\xi)$$

où f, g et h sont des fonctions dérivables arbitraires. Donc

$$u(x,y) = g(x+y) + h(x-y)$$

Exercice 10:

1) $\int_0^\infty u^4 e^{-u^3}\, du$

on pose $t = u^3$, $du = \frac{dt}{3t^{2/3}}$

$$\int_0^\infty u^4 e^{-u^3}\, dt = \int_0^\infty t^{\frac{4}{3}} e^{-t} \frac{dt}{3t^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\infty t^{\frac{2}{3}} e^{-t}\, dt = \frac{1}{3}\int_0^\infty t^{\frac{5}{3}-1} e^{-t}\, dt$$

$$= \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)$$

2) $\int_a^{\infty} e^{2au-u^2}\, du = \int_0^{\infty} e^{-(u-a)^2+a^2}\, du$

posons $t=(u-a)^2 \Rightarrow dt = 2(u-a)\,du = 2\sqrt{t}\,du$

$$\int_0^{\infty} e^{-(u-a)^2+a^2}\, du = \int_0^{\infty} e^{a^2} e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

$$= \frac{e^{a^2}}{2} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt$$

$$= \frac{e^{a^2}}{2} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}\, dt$$

$$= \frac{e^{a^2}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

3) $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt[3]{1-u^4}}$

On pose $t=u^4 \Rightarrow dt = 4t^{\frac{3}{4}}\, du$

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt[3]{1-u^4}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{1-t}\; 4t^{3/4}}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 t^{-\frac{3}{4}} (1-t)^{-\frac{1}{3}}\, dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 t^{\frac{1}{4}-1} (1-t)^{\frac{2}{3}-1}\, dt$$

$$= \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$$

4) $\int_{-1}^1 \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{1}{2}} du$

On pose $t = 1+u$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{1}{2}} du = \int_{-1}^1 (1+u)^{\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \int_0^2 t^{\frac{1}{2}} (2-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 t^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} dt$$

posons $v = \frac{t}{2}$

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{1}{2}} du = 2\int_0^1 v^{\frac{1}{2}} (1-v)^{-\frac{1}{2}} dv = 2\int_0^1 v^{\frac{3}{2}-1} (1-v)^{\frac{1}{2}-1} dv$$

$$= 2B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$