République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l’enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université de Mohamed El Bachir El Ibrahimi
Faculté des sciences et de la technologies

Mathématiques 3

Chapitre 3 : Equations différentielles
3.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires.
3.2 Equations aux dérivées partielles.
3.3 Fonctions spéciales.

Par : Dr. Bourahli Amel
Pour : 2 éme année ST (GC, GP, GM, AUTO, ELECT)

2021 / 2022

Chapitre 03 : Equations différentielles

Définition: Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une relation entre la variable réelle x, une fonction $x \longrightarrow y(x)$ et ses dérivées $y', y'', \dots, y^{(n)}$ au point x définie par

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (\text{on notera par } F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0)$$

Définition: L'ordre d'une équation différentielle n est l'ordre de la plus haute dérivée apparaissant dans l'équation.

Définition: On appelle solution d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction y définie sur cet intervalle I, n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I.

On notera en général cette solution (y, I)

Les équations différentielles d'ordre 1

1. Equations à variables séparées (ou séparables)

Définition: On appelle équation à variables séparables toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme

$$b(y)\, y' = a(x) \quad \dots \quad (1)$$

où a et b sont des applications continues sur des intervalles à préciser

Pour résoudre l'équation (1). En remplaçant $y' = \frac{dy}{dx}$

dans ①, on trouve

$$b(y)\frac{dy}{dx} = a(x) \Rightarrow b(y)\,dy = a(x)\,dx$$

on intègre terme à terme pour obtenir ainsi la solution générale de l'équation ① sous la forme

$$\int b(y)\,dy = \int a(x)\,dx + C$$

où C étant une constante arbitraire

Exemple 01: Résoudre l'équation différentielle

$(x+1)y' + y = 0$

si $y = 0$ donc c'est une solution

si $y \neq 0$ $(x+1)y' + y = 0 \Rightarrow y' = \frac{-y}{x+1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x+1} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x+1} + C \quad , C \in \mathbb{R}$$

$$\ln|y| = -\ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{1}{x+1}\right| + C$$

$$|y| = e^C \cdot e^{\ln\left|\frac{1}{x+1}\right|}$$

$$\Rightarrow y = \pm e^C \left[\frac{1}{x+1}\right] \Rightarrow y = \mp \frac{K}{x+1} \quad / K \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } y = \frac{K}{x+1} \quad / K \in \mathbb{R}$$

Exemple 02: Trouver une solution de l'équation

$x^3 \sin y \cdot y' = 2$

$$\sin y\, y' = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \sin y\, dy = \frac{2\,dx}{x^3}$$

$-\cos y = \frac{-1}{x^2} + c \quad / c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y = \arccos\left(\frac{1}{x^2} + c\right.$

2- Equations homogènes

Définition: On appelle équation homogène toute équation différentielle qui ne change pas lorsque l'on remplace x par λx et y par λy.

Une équation homogène peut se mettre sous la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ --- (2)

où f est une fonction homogène de degré zéro (c'est à dire $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$)

Pour résoudre l'équation (2). On pose $t = \frac{y}{x}$, donc $y = tx$ (t est une fonction de x). On en déduit $y' = t'x + t$

l'équation (2) devient $t'x + t = f(t) \Rightarrow t'x = f(t) - t$

On séparant les variables $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t)-t}$, et, en intégrant

$\ln|x| = \int \frac{dt}{f(t)-t} + c \quad / c \in \mathbb{R}$. D'où $x = \pm e^c . e^{\int \frac{dt}{f(t)-t}}$

$\Rightarrow x = k\, e^{\int \frac{dt}{f(t)-t}} \quad / k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x = k\, e^{F(t)}$ avec $F(t) = \int \frac{dt}{f(t)-t}$

Par conséquent, la solution générale de (2) est

$$y = k t . e^{F(t)} \quad / k \in \mathbb{R}$$

Exemple 01. Résoudre l'équation différentielle

$x\left(y' - \frac{y}{x}\right) - y + x = 0$

$\Rightarrow xy' - y - y + x = 0$

$\Rightarrow xy' - 2y + x = 0$

$\Rightarrow y' = 2y - x$

$\Rightarrow y' = \frac{2y}{x} - 1$

On pose $t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xt$

$y' = t'x + t$

$t'x + t = 2t - 1 \Rightarrow t'x = t - 1$

$\Rightarrow \frac{t'}{t-1} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{dt}{t-1} = \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \ln|t-1| = \ln|x| + c \quad / c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |t-1| = e^{c}|x|$

$\Rightarrow t - 1 = \pm e^{c} x$

$\Rightarrow t - 1 = Kx \quad / K \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow t = Kx + 1$

donc $y = x(Kx+1)$. D'où $y = Kx^2 + x$

Exemple 02: Trouver une solution de l'équation suivante

$y'(2\sqrt{xy} - x) + y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

$y'\left(\frac{2\sqrt{xy} - x}{x}\right) + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow y'\left(2\sqrt{\frac{y}{x}} - 1\right) + \frac{y}{x} = 0$

$$\Rightarrow y' = \frac{-\frac{y}{x}}{2\sqrt{\frac{y}{x}} - 1} \quad \dots (*)$$

On pose $t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx$

$y' = t'x + t$, en remplaçant dans $(*)$, on obtient

$t'x + t = \frac{-t}{2\sqrt{t} - 1} \Rightarrow t'x = \frac{-t}{2\sqrt{t} - 1} - t = \frac{-\cancel{t} - 2t\sqrt{t} + \cancel{t}}{2\sqrt{t} - 1}$

$\Rightarrow t'x = \frac{-2t\sqrt{t}}{2\sqrt{t} - 1}$

$$t' = \frac{-2t\sqrt{t}}{x(2\sqrt{t}-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{-2t\sqrt{t}}{x(2\sqrt{t}-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{t}-1}{-2t\sqrt{t}}\, dt = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2t\sqrt{t}}\right) dt = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2t\sqrt{t}}\right) dt = \int \frac{dx}{x} + C \quad \backslash C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -\ln t - \frac{1}{\sqrt{t}} = \ln x + C$$

$$\Rightarrow -\ln \frac{y}{x} - \frac{1}{\sqrt{\frac{y}{x}}} = \ln x + C$$

$$\Rightarrow -\ln y + \ln x - \sqrt{\frac{x}{y}} = \ln x + C$$

$$\Rightarrow \ln y = -\sqrt{\frac{x}{y}} - C$$

$$\Rightarrow y = e^{-\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + C\right)} \quad \backslash C \in \mathbb{R}$$

3. Equations linéaires du premier ordre

① Définition : Une équation différentielle est dite linéaire du 1er ordre si elle peut s'écrire sous la forme

$$y' + a(x)\, y = b(x) \cdots ③$$

où $a(x)$ et $b(x)$ sont des constantes ou des fonctions de x uniquement

Remarque :

- Une équation différentielle linéaire est homogène, ou sans second membre, si la fonction ~~$y(x)$~~ b est la fonction nulle ($b(x)=0$)
- Une équation différentielle linéaire est à coefficients constants

si les fonctions a, b sont constantes.

Méthode de résolution

Pour résoudre l'équation (3), on décompose souvent la résolution en deux étapes:

1- On intègre l'équation sans second membre

$$y' + a(x)y = 0$$

$$y' = -a(x)y \Rightarrow \frac{y'}{y} = -a(x)$$

$$\frac{dy}{y} = -a(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx + c \quad / c \in \mathbb{R}$$

$$\ln|y| = -A(x) + c \quad \text{avec } A(x) = \int a(x)dx$$

$$\Rightarrow y = K e^{-A(x)} \quad / K \in \mathbb{R}$$

2- On résoudre l'équation avec second membre, soit en cherchant une solution particulière y_p de (3) soit en utilisant la méthode de variation de la constante. Alors, la solution générale de (3) est $y = y_H + y_p = K e^{-A(x)} + y_p$

Exemple: Résoudre l'équation $y' + xy = x^2 + 1$

- On résoudre l'équation sans second membre

$$y' + xy = 0 \Rightarrow y_H = K e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , K \in \mathbb{R}$$

- On cherche une solution particulière

$$y_p = ax + b \quad , a = 1 \quad , b = 0 \quad , \text{donc } y_p = x$$

D'où $y = y_H + y_p = K e^{-\frac{x^2}{2}} + x \quad , K \in \mathbb{R}$

- Méthode de variation de la constante.

On utilise cette technique lorsqu'on ne peut pas trouver de solution particulière de l'équation avec second membre, on résout dans ce cas l'équation homogène qui fournit $y_H = K e^{-A(x)}$ puis on fait varier la constante : En posant dans l'équation ③ $y = K(x) e^{-A(x)}$, on obtient

$$K'(x) e^{-A(x)} - a(x) K(x) e^{-A(x)} + a(x) K(x) e^{-A(x)} = b(x)$$

$$K'(x) e^{-A(x)} = b(x) \Rightarrow K'(x) = b(x) e^{A(x)}$$

Donc $K(x) = \int b(x) e^{A(x)} dx$

Finalement la solution générale de l'équation ③ s'écrit

$$y = e^{-A(x)} \int b(x) e^{A(x)} dx.$$

Exemple 1 : $y' - \frac{y}{x} = \ln x$ ... (*)

① Résoudre l'équation sans second membre

$$y' - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow y' = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |y| = \mp e^{c} |x|$$

$$\Rightarrow y = \pm K x \quad , K \in \mathbb{R}$$

② Variation de la constante

$$y = K(x) x \Rightarrow y' = K'(x) x + K(x)$$

En remplaçant dans (*), on obtient

$$K'(x) x + \cancel{K(x)} - K(x) = \ln x \Rightarrow K'(x) = \frac{\ln x}{x}$$

On pose $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$

donc $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + c \quad , c \in \mathbb{R}$

D'où $K(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$

Enfin, $y = \left(\frac{(\ln x)^2}{2} + c\right) x = \frac{(\ln x)^2}{2} x + cx \quad / c \in \mathbb{R}$

Exemple 02 : Résoudre l'équation $y' + 2xy = 2x e^{-x^2}$

① Résoudre l'équation sans second membre

$y' + 2xy = 0 \Rightarrow y' = -2xy$

$\frac{dy}{y} = -2x\,dx \Rightarrow \ln|y| = -x^2 + c \quad / c \in \mathbb{R}$

$|y| = e^c . e^{-x^2} \Rightarrow y = \pm e^c . e^{-x^2}$

donc $y = K e^{-x^2} \quad / K \in \mathbb{R}$

② Variation de la constante

$y = K(x) e^{-x^2} \Rightarrow y' = K'(x) e^{-x^2} - 2x K(x) e^{-x^2}$

$K'(x) e^{-x^2} \cancel{- 2x K(x) e^{-x^2}} \cancel{+ 2x K(x) e^{-x^2}} = 2x e^{-x^2}$

$K'(x) = 2x \Rightarrow K(x) = x^2 + c \quad / c \in \mathbb{R}$

Donc $y = (x^2 + c) e^{-x^2} \quad / c \in \mathbb{R}$

Equation de Bernoulli :

Définition : On appelle équation de Bernoulli une équation de la forme $y' + a(x) y = b(x) y^\alpha$ ④ où $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions continues, avec la condition ($\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$)

Méthode de résolution :

Le principe de la méthode, si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$, est de diviser les deux membre de ④ par y^α, on obtient $\frac{y'}{y^\alpha} + a(x) \frac{1}{y^{\alpha-1}} = b(x)$

On effectue un changement de fonction en posant $z = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$, il vient donc $\frac{1}{1-\alpha} z' - a(x) z = b(x)$

alors z est la solution d'une équation linéaire du premier ordre

on le résout et on déduit une expression de y

Exemple: Résoudre l'équation $x y' + y = y^2 \ln x$

$x y' y^{-2} + y^{-1} = \ln x$

on pose $z = y^{-1}$ donc $z' = -y' y^{-2}$

$-x z' + z = \ln x$ c'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1

$z = K(x) x = \left(\frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + c\right) x = \ln x + 1 + cx \quad c \in \mathbb{R}$

D'où $y = \frac{1}{z} = \frac{1}{\ln x + 1 + cx}$

Problème de Cauchy

Etant donné $y_0 \in \mathbb{R}$, on appelle problème de Cauchy le système suivant
$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Théorème: Si $f \in C([a,b])$ et si f vérifie la condition (dite Lipshitz)

$\forall x \in [a,b], \forall y \in C([a,b]), \forall z \in C([a,b]) \; \exists L > 0$ tel que

$|f(x, y(x)) - f(x, z(x))| \leq L\, |y(x) - z(x)|$,

alors, le problème de Cauchy admet une solution et une seule sur $[a,b]$ (et ceci pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$)

Exemple: Résoudre l'équation différentielle définie sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} y' + 2xy = 2x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$y' = 2x - 2xy \Rightarrow y' = 2x(1-y)$.

$\frac{dy}{dx} = 2x(1-y) \Rightarrow \frac{dy}{1-y} = 2x\,dx$

$\ln|1-y| = x^2 + c \quad \backslash c \in \mathbb{R}$

$|1-y| = e^c . e^{x^2} \Rightarrow 1-y = \pm e^c . e^{x^2}$

$y = 1 - Ke^{x^2} \quad \backslash K \in \mathbb{R}$

on a $y(0) = 2$, donc $1 - Ke^0 = 2 \Rightarrow K = 1-2 = -1$

D'où $y = 1 + e^{x^2}$

Equations différentielles linéaire du second ordre à coefficients constants.

Définition: Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad \dots \quad (E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et g est une fonction continue sur un intervalle ouvert I.

L'équation $ay'' + by' + cy = 0$ (E_0) est appellée l'équation homogène associée à (E)

1- Equation homogène

On cherche une solution de (E_0) sous la forme $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$ est une constante à déterminer. On trouve

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$\Leftrightarrow (ar^2+br+c)e^{rx}=0$$

$$\Leftrightarrow ar^2+br+c=0$$

Définition: L'équation $ar^2+br+c=0$ est applée l'équation caractéristique associée à (E_0)

+ Soit $\Delta=b^2-4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E_0)

Théorème:

1- Si $\Delta>0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1\neq r_2$ et les solutions de (E_0) sont les

$$y(x)=\lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_2x} \quad \text{où } \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

2- Si $\Delta=0$, l'équation caractéristique possède une racine doubler$_0$ et les solutions de (E_0) sont les

$$y(x)=(\lambda+\mu x)e^{r_0x} \quad \text{où } \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

3- Si $\Delta<0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1=\alpha+i\beta$, $r_2=\alpha-i\beta$ et les solutions de (E_0) sont les

$$y(x)=e^{\alpha x}(\lambda\cos(\beta x)+\mu\sin(\beta x)) \quad \text{où } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Exemple 01: Résoudre l'équation $y''-2y'+y=0$

$r^2-2r+1=0$, $\Delta=4-4=0$, $r=\frac{2}{2}=1$

$$y(x)=(\lambda+\mu x)e^{x}, \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

Exemple 02: Résoudre l'équation $y''-4y'+3y=0$

$r^2-4r+3=0$, $r_1=1$, $r_2=3$

$$y(x)=\lambda e^{x}+\mu e^{3x}, \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

Exemple 03: Résoudre l'équation $y''+2y'+4y=0$

$r^2+2r+4=0$, $\Delta=-12$ $\quad r_1=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{2}=-1+\sqrt{3}i$

$$r_2=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{2}=-1-\sqrt{3}i$$

$y(x) = e^{-x}\left(\lambda \cos(\sqrt{3}x) + \mu \sin(\sqrt{3}x)\right)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2- Equation avec second membre

Proposition: Si y_H est une solution de (E_0) et y_p est une solution particulière de (E). Alors $y = y_H + y_p$ est une solution générale de (E)

Recherche d'une solution particulière

Second membre du type $e^{\alpha x}P(x)$

Si $g(x) = e^{\alpha x}P(x)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = e^{\alpha x}x^m \varphi(x)$, où φ est un polynome de même degré que P avec:

- $y_p(x) = e^{\alpha x}\varphi(x)$ $(m=0)$. Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique,
- $y_p(x) = x e^{\alpha x}\varphi(x)$ $(m=1)$, si α est une racine simple de l'équation caractéristique,
- $y_p(x) = x^2 e^{\alpha x}\varphi(x)$ $(m=2)$, si α est une racine double de l'équation caractéristique.

Second membre du type $e^{\alpha(x)}\left(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\right)$.

Si $g(x) = e^{\alpha(x)}\left(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\right)$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$, on cherche une solution particulière sous la forme

- $y_p(x) = e^{\alpha x}\left(\varphi_1(x)\cos(\beta x) + \varphi_2(x)\sin(\beta x)\right)$, si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique
- $y_p(x) = x e^{\alpha x}\left(\varphi_1(x)\cos(\beta x) + \varphi_2(x)\sin(\beta x)\right)$, si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique

Dans les deux cas, φ_1 et φ_2 sont deux polynômes de degré $n = \max(\deg P_1, \deg P_2)$

Exemple Résoudre les équations différentielles.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \dots (E_0)$

$y'' - 5y' + 6y = 4xe^{x} \dots (E_1)$

$y'' - 5y' + 6y = 4x\,e^{2x} \dots (E_2)$

1- L'équation caractéristique est $r^2-5r+6=(r-2)(r-3)$

$r_1=2,\ r_2=3$. Donc $y=\lambda e^{2x}+\mu e^{3x} \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

2- On cherche une solution particulière à (E_1) sous la forme

$y_p(x)=(ax+b)e^{x}$

$(ax+2a+b)e^{x}-5(ax+a+b)e^{x}+6(ax+b)e^{x}=4xe^{x}$

$\Leftrightarrow (a-5a+6a)x+2a-b-5(a+b)+6b=4x$

$\Leftrightarrow 2a=4$ et $-3a+2b=0$

$\Leftrightarrow a=2$ et $b=3$.

Donc $y_p(x)=(2x+3)e^{x}$. D'où $y(x)=\lambda e^{2x}+\mu e^{3x}+(2x+3)e^{x} \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

3- Comme 2 est une racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x)=x(ax+b)e^{2x}$

$y_p(x)=(ax^2+bx)e^{2x}$

$y_p'(x)=(2ax^2+(2a+2b)x+b)e^{2x}$

$y_p''(x)=(4ax^2+(8a+4b)x+(2a+4b))e^{2x}$

$(4ax^2+(8a+4b)x+(2a+4b))e^{2x}-5(2ax^2+(2a+2b)x+b)e^{2x}+6(ax^2+bx)e^{2x}=4xe^{2x}$

$\Leftrightarrow -2a-6b+6b=4$ et $2a+4b-5b=0$

$\Leftrightarrow a=-2$ et $2a-b=0$

$\Leftrightarrow a=-2$ et $b=-4$

Donc $y_p(x)=x(-2x-4)e^{2x}$

D'où $\quad y=\lambda e^{2x}+\mu e^{3x}+x(-2x-4)e^{2x} \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Méthode de variation des constantes

Si $\{y_1, y_2\}$ est une base de solutions de l'équation homogène (E_0), on cherche une solution particulière sous la forme

$y_p = \lambda y_1 + \mu y_2$, où λ et μ sont des fonctions vérifiant

$$(S) \quad \begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = \dfrac{g(x)}{a} \end{cases}$$

Donc λ', μ' sont solutions du système (S). Ce système se résoud aisément, ce qui donne λ', μ', puis λ, μ par intégration

Exemple: Résoudre l'équation suivante, sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

$y'' + y = 0$, l'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, donc $r_1 = i$, $r_2 = -i$. Alors $y_H = \lambda \cos x + \mu \sin x$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $y_p(x) = \lambda(x) \cos x + \mu(x) \sin x$, $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = \dfrac{g(x)}{a} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda' \cos x + \mu' \sin x = 0 \\ -\lambda' \sin x + \mu' \cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par $\sin x$ et la seconde par $\cos x$, on obtient

$$\begin{cases} \lambda' \cos x \sin x + \mu' (\sin x)^2 = 0 \\ -\lambda' \cos x \sin x + \mu' (\cos x)^2 = 1 \end{cases} \quad \text{donc par somme } \mu' = 1$$

Ainsi $\mu(x) = x$ et la première ligne des équations devient $\lambda' = \frac{-\sin x}{\cos x}$ donc $\lambda(x) = \ln(\cos x)$. Alors $y_p(x) = \ln(\cos x)\cos x + x \sin x$

D'où $y = \lambda \cos x + \mu \sin x + \ln(\cos x)\cos x + x \sin x$.

Equations aux dérivées partielles (EDP)

Définition: Une équation aux dérivées partielles ou EDP est une relation faisant intervenir une fonction inconnue u de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, les variables $x, y, \dots$, ses dérivées partielles $u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots$

Elle s'écrit de façon générale:

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0 \quad \dots (1)$$

où $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \dots$

L'équation (1) est considérée dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$.

Les solutions de l'équation (1) sont des fonctions qui vérifient cette équation dans Ω.

Définition: L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivée partielle le plus élevé intervenant dans l'équation

Définition: Une équation aux dérivées partielles est dite linéaire si F est linéaire par rapport à la fonction u et à toutes ses dérivées partielles. Autrement dit, si u et ses dérivées partielles apparaissent séparément et à la puissance 1 dans une EDP, celle-ci est dite linéaire.

Définition: Une équation aux dérivées partielles homogène est vérifiée pour $u=0$ (si elle est écrite de façon usuelle, le second membre, ne contenant ni u ni ses dérivées partielles, est identiquement nul.

Exemple

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 1^{er} ordre linéaire homogène

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\sin u=0$ 1^{er} ordre non-linéaire homogène

$\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ $2^{ème}$ ordre non-linéaire homogène

$\cos(xy^2)\frac{\partial u}{\partial x}-y^2\frac{\partial u}{\partial x}=\tan(x^2+y^2)$ 1^{er} ordre linéaire inhomogène

EDP linéaire du premier ordre

La forme la plus générale pour une EDP linéaire de deux variables et du premier ordre est :

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+C(x,y)=D(x,y)$$

où A, B, C et D sont des fonctions.

Exemple

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

Classification des EDP linéaires du second ordre, à coefficients constants

Une EDP linéaire du second ordre, à coefficients constants s'écrit sous la forme

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu+G=0$$

Les trois premiers termes correspondent à la partie principale.

A, B, C, D, E, F et G sont des constantes.

Le type de l'EDP dépend du signe de B^2-4AC

- Si $B^2-4AC>0$, l'EDP est dite hyperbolique
- Si $B^2-4AC=0$, l'EDP est dite parabolique
- Si $B^2-4AC<0$, l'EDP est dite elliptique

Exemple:

(1) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ avec $c>0$

$B^2-4AC=4c^2>0$. Ainsi l'équation des ondes est hyperbolique

(2) $\frac{\partial u}{\partial t}-d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ avec $d>0$

$B^2-4AC=0$. Ainsi l'équation de la diffusion est parabolique

(3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

$B^2-4AC=-4<0$. Ainsi l'équation de Laplace est elliptique.

Pour trouver des solutions particulières d'une équation aux dérivées partielles, à partir de la solution générale, on va imposer des conditions restrictives sur l'ensemble des solutions.

1- Conditions initiales: Si u est fonction de $(x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ on donne $u(x_0,t_0)=\phi_0(x)$ ou $D_x^p u(x,t_0)=\phi_p(x)$, on parle aussi de conditions de Cauchy

2- Condition au bord: si u est fonction de $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^d$ on a trois types de contraintes

- conditions de Dirichlet où u est fixé sur le bord de Ω; $u|_{\partial\Omega}=g$
- conditions de Neumann où la dérivée normale de u est fixée $\frac{du}{dn}\Big|_{\partial\Omega}=g$

conditions de Robin ou mixtes $c(x)u+\tau(x)\frac{\partial u}{\partial n}=g$ sur $\partial\Omega$

Si $g=0$ on a des conditions homogènes au bord.

3- Conditions à l'infini si Ω n'est pas borné on a des conditions de la forme $u(x)\sim\phi(t)$ quand $|x|\longrightarrow\infty$ ou $\|u\|_2<\infty$.

4- conditions sur les interfaces: si $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ avec $\bar\Omega_1\cap\bar\Omega_2=\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2$ et si l'on a déterminé u sur Ω_1 et Ω_2 alors pour pouvoir définir u sur Ω on a des conditions sur u, respectivement $\frac{\partial u}{\partial n}$, sur $\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2$

Equation des ondes (ou de D'Alembert)

Considérons l'équation $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=0$

Solution (changement de variables)

Cette équation peut s'écrire $\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$

on pose $p=x-ct$ et $q=x+ct$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}+\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial}{\partial q}=\frac{\partial}{\partial p}+\frac{\partial}{\partial q}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p}+\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial}{\partial q}=-c\frac{\partial}{\partial p}+c\frac{\partial}{\partial q}$$

On en déduit $\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}=2c\frac{\partial}{\partial q}$ et $\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}=-2c\frac{\partial}{\partial p}$

L'équation de d'Alembert prend alors la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q\partial p}=\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)=0$$

Par conséquent $\frac{\partial u}{\partial p}=\varphi(p)$ et si $F(p)$ désigne une primitive de $\varphi(p)$ alors $u(x,t)=F(p)+g(q)=F(x-ct)+g(x+ct)$

Méthode de séparation des variables

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \frac{\partial u}{\partial x} \quad \cdots (*)$$

On suppose que $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

En remplaçant dans l'équation $(*)$, on obtient

$$X(x)\,Y'(y) = 2y\,X'(x)\,Y(y)$$

$$\frac{X(x)}{X'(x)} = 2y \frac{Y(y)}{Y'(y)}$$

$$\frac{X'}{X} = \frac{1}{2y} \frac{Y'}{Y}.$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de x et le membre de droite que de y on en déduit qu'il sont constants, c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{R}$

$$\frac{X'}{X} = \frac{1}{2y} \frac{Y'}{Y} = k$$

$$\begin{cases} \dfrac{X'}{X} = k \\ \dfrac{1}{2y} \dfrac{Y'}{Y} = k \end{cases}$$

$$\frac{X'}{X} = k \Rightarrow \int \frac{X'}{X}\,dx = \int k\,dx$$

$$\ln|X| = kx + c \quad \backslash c \in \mathbb{R} \Rightarrow |X| = e^{kx} . e^{c}$$

$$X = \pm e^{c} . e^{kx} = A\,e^{kx} \quad \backslash k \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{2y} \frac{Y'}{Y} = k \Rightarrow \frac{Y'}{Y} = k2y$$

$$\int \frac{Y'}{Y}\,dy = \int 2yk\,dy$$

$\ln|y| = k y^2 + c \quad \backslash c \in \mathbb{R}$

$|y| = e^c . e^{ky^2} \Rightarrow y = \pm e^c . e^{ky^2}$

Donc $y = B e^{ky^2} \quad \backslash B \in \mathbb{R}$

$u(x,y) = X(x) Y(y) = A e^{kx} B e^{ky^2}$

$= AB e^{kx+ky^2}$

$= C e^{k(x+y^2)} \quad \backslash C \in \mathbb{R}$

D'ou $u(x,y) = C e^{k(x+y^2)}$

Fonctions speciales.

Fonction gamma

Définition: La fonction gamma (noté Γ) a été introduite par Euler en 1729 elle est définie par l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad , x > 0 \quad \cdots (*)$$

où x peut être réel ou complexe avec $Re(x) > 0$

L'intégrale $(*)$ appelé aussi l'intégrale d'Eler de première epèce n'esxiste que si x est strictement positif

Relation de récurrence

La fonction gamma satisfait la relation

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

et si x est un entier non négatif, on dédiut que $\Gamma(x+1) = x!$

Démonstration

$u(t) = t^x \qquad u'(t) = x t^{x-1}$

$v'(t) = e^{-t} \qquad v(t) = -e^{-t}$

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{x}\,dt$$

$$= -e^{-t}t^{x}\Big|_0^{\infty} + x\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{x-1}\,dt$$

$$= x\Gamma(x)$$

Si $x \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

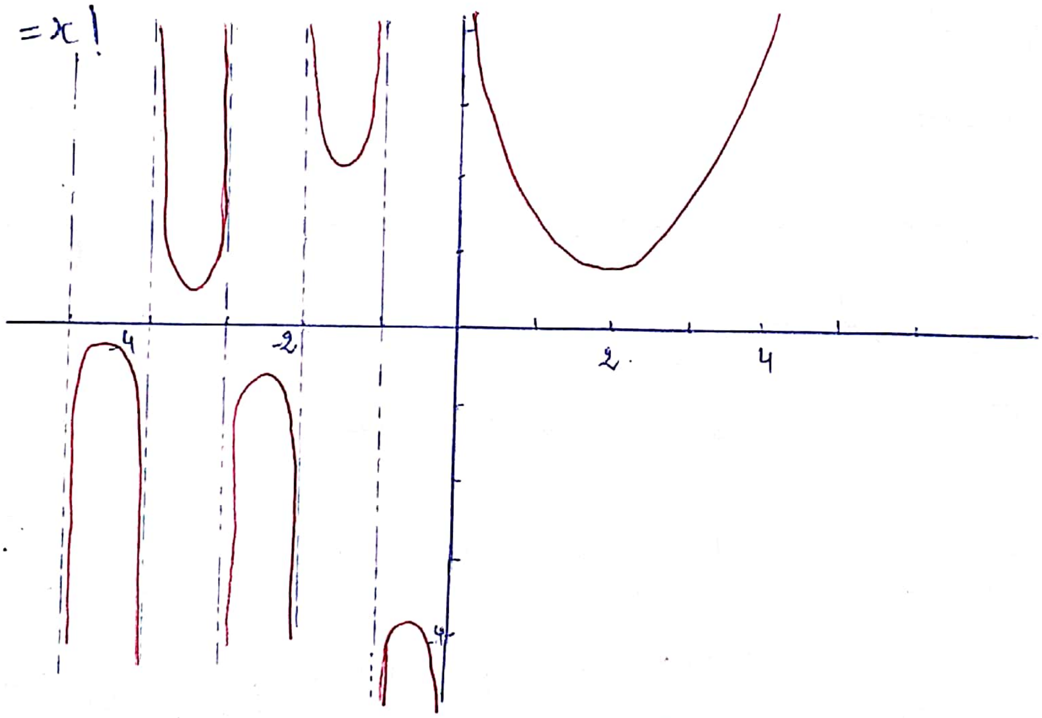
$$= x(x-1)\Gamma(x-1)$$

$$= x(x-1)(x-2)\Gamma(x-2)$$

$$\vdots$$

$$= x(x-1)\cdots 3.2.1\,\Gamma(1)$$

$$= x!$$



Fonction bêta

Définition: La fonction bêta est définie pour tous nombres complexes x et y de parties réelles strictement positives par

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \qquad x>0,\ y>0$$

Relation entre les fonctions gamma et bêta

La fonction bêta est liée à la fonction gamma par la formule

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Démonstration.

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s-t}\, s^{x-1}\, t^{y-1}\, ds\, dt$$

on fait le changement de variables $s+t=r$, $s=rw$, donc $0\leq r<\infty$

$0\leq w\leq 1$ et $dr=ds+dt$, $ds=w\,dr+r\,dw$, $dt=(1-w)dr-r\,dw$

donc $ds\,dt=r\,dw\,dr$

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^1 w^{x-1}(1-w)^{y-1}dw\int_0^{\infty} e^{-r}\, r^{x+y-1}\,dr$$

$$=B(x,y)\,\Gamma(x+y)$$

Propriétés de la fonction bêta.

a)- $B(x+1,y)=\frac{x}{x+y}B(x,y)$

b)- $B(x,y+1)=\frac{y}{x+y}B(x,y)$

c)- $B(x+1,y)+B(x,y+1)=B(x,y)$

d)- $B(x,x)=2^{1-2x}\,B(x,\frac{1}{2})$

Démonstration:

a)- En utilisant la définition de la fonction bêta, on a

$$B(x+1,y)=\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)}$$

$$=\frac{x\,\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\,\Gamma(x+y)}$$

$$= \frac{x}{x+y} B(x,y)$$

b)- On a $B(x,y+1) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+1)}$

$$= \frac{\Gamma(x)\, y\, \Gamma(y)}{(x+y)\,\Gamma(x+y)}$$

$$= \frac{y}{x+y} B(x,y)$$

c) On a $B(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y} B(x,y)$

$$B(x,y+1) = \frac{y}{x+y} B(x,y)$$

$$B(x+1,y) + B(x,y+1) = \frac{x}{x+y} B(x,y) + \frac{y}{x+y} B(x,y)$$

$$= \frac{x+y}{x+y} B(x,y)$$

$$= B(x,y)$$

d)- On fait le changement de variable $t = \dfrac{1+u}{2}$, $dt = \dfrac{du}{2}$. On a

$$B(x,x) = \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}(1+u)\right)^{x-1} \left(\tfrac{1}{2}(1-u)\right)^{x-1} \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2^{2x-1}} \int_{-1}^{1} \left[(1+u)(1-u)\right]^{x-1} du$$

$$= \frac{1}{2^{2x-1}} \int_{-1}^{1} (1-u^2)^{x-1} du$$

$$= \frac{2}{2^{2x-1}} \int_0^1 (1-u^2)^{x-1} du$$

Faisant un dexième changement de variable $v = u^2$, on obtient

$$B(x,x) = \frac{1}{2^{2x-1}} \int_0^1 v^{-\frac{1}{2}} (1-v)^{x-1} \, dv$$

$$= 2^{1-2x} B\left(x, \frac{1}{2}\right)$$

Exercice: Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \, dx$$

on pose $x = u^2 \Rightarrow dx = 2u\,du$

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 u^{-1} (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} \, 2u\,du$$

$$= 2\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= 2\arcsin u \Big|_0^1$$

$$= 2\arcsin 1 = \pi$$

D'où $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.