Université El Bachir El Ibrahimi BBA — 2022/2023
Faculté des sciences et de la technologie — Matière :Maths3
2 ème année (GC, GM, AUT, ELT, ELM) — D.r A Bourahli

Série $N^o 04$
Séries numériques

Exercice1
Etudier la nature des séries de termes suivants

1) $u_n = \dfrac{5n+2}{9n+8}$; $n \in \mathbb{N}$ **2)** $u_n = \dfrac{n}{\ln n}$; $n \geq 2$ **3)** $(*)$ $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$; $n \geq 1$.
4) $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n$; $n \geq 1$ **5)** $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{\ln n}}$; $n \geq 2$ **6)** $(*)$ $u_n = \dfrac{e^{1/n}}{n^2}$; $n \geq 1$.
7) $u_n = \dfrac{e^n + n^2 + 2}{3^n + n^5 + 1}$; $n \in \mathbb{N}$ **8)** $u_n = \arctan\left(\dfrac{1}{n}\right)$; $n \geq 1$.

Exercice2
Déterminer la nature des séries de termes suivants

1) $u_n = \left(\dfrac{2n+3}{7n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; $n \in \mathbb{N}$, **2)** $u_n = \left(1 + \dfrac{5}{n}\right)^{n^2}$; $n \geq 1$,
3) $u_n = \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^n$; $n \geq 1$, **4)** $(*)$ $u_n = (2\sqrt[n]{n} + 1)^n$; $n \geq 1$,
5) $u_n = \dfrac{4^n}{(n+1)!}$; $n \in \mathbb{N}$, **6)** $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}{n!}$; $n \in \mathbb{N}$,
7) $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$; $n \in \mathbb{N}$, **8)** $(*)$ $u_n = \dfrac{3^n \cdot n!}{n^n}$; $n \geq 1$.

Exercice3
Etudier la nature des suites suivantes
1) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, $x \in]0,+\infty[$, 2) $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$, $x \in [0,+\infty[$, 3) $f_n(x) = xe^{-nx}$, $x \in [0,+\infty[$
4) $f_n(x) = n(cosx)^n sinx$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 5) $f_n(x) = x^n(1-x)$, $x \in [0,1]$

Exercice4
Etudier la convergence simple et la convergence absolue de la série de fonctions $\sum f_n$ dans les cas suivants
1) $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$, 2) $f_n(x) = e^{-nx}cosx$, $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$
3) $f_n(x) = \frac{(2n)!}{x^{2n}}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$, 4) $f_n(x) = 2^n sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$, $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$
5) $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{2^n}$, $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$

Exercice5
Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ dans les cas suivants
1) $f_n(x) = \frac{sin(nx)}{n^2+x^2}$, sur $\mathbb{R}$ 2) $f_n(x) = n^2x^n(1-x)^n$, sur $[0,1]$, 3) $f_n(x) = \frac{x}{n}e^{-n^2x^2}$, sur $[0,+\infty[$
4) $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+n}$, sur $[0,+\infty[$.

Exercice6

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$, 2) $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{(2n)!} x^n$, 3) $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} x^n$, 4) $\sum_{n\geq 0} (lnn)\, x^n$.

Exercice7

Calculer le développement en série entière en zéro des fonctions suivantes

$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$, $g(x) = ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$, $h(x) = \int_0^x cost^2 dt$.

Exercice8

Calculer la série de Fourier, sous forme trignométrique, de la fonction 2π-pèriodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ sur $[0, 2\pi[$. La série converge t-elle vers f ?