Chapitre 04: Séries numériques.

Définition: Soit $(u_n)_n$ une suite de nombre réels. On note

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} u_k$$

S_n est appelée la somme partielle d'ordre "n"

Définition: Soit $(u_n)_n$ une suite de nombre réels. On appelle série numérique de terme général "u_n"

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots$$
$$= \lim_{n \to +\infty} S_n = S$$

La nature de la série

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est dite convergente $\Leftrightarrow (S_n)_n$ est convergente. Alors

1) Si $(S_n)_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge

2) Si $(S_n)_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge

Exemple:

① $\sum_{n=0}^{+\infty} n \quad , u_n = n$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n-p+1)}{2}(u_p + u_n)$$

$$\lim_{n} S_n = \lim_{n} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n \text{ est divergente}$$

② $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $\quad u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \Rightarrow a = 1 , b = -1$$

Donc $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$
$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \dots + \left(\cancel{\tfrac{1}{n-1}} - \cancel{\tfrac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S = \lim_n S_n = \lim_n 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est convergente

③ $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ $\quad u_n = (-1)^n$, $n \geq 0$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 \dots + (-1)^n$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

$$\lim_n S_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}$ diverge

④ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\lim_n S_n = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge de somme $S = e$.

Série géométrique:

Définition: On appelle série géométrique toute série $\sum_{n\geq 0} u_n$ telle que $u_n = a z^n$

a: et le 1er terme

z: et la raison

Proposition: La série géométrique $\sum_{n\geq 0} a z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$. Dans ce cas

$$\sum_{n\geq 0} a z^n = \frac{a}{1-z}$$

Proposition: Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques et $\lambda \in \mathbb{R}_*$. Donc on a

① $\sum u_n$ et $\sum (\lambda u_n)$ sont de mêmes natures.

② Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ converge, alors $\sum (u_n + v_n)$ converge aussi

③ Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge; alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge

④ Si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ diverge; alors on ne peut rien conclure pour la série $\sum (u_n+v_n)$.

Remarque. Soit $\sum u_n$ une série numérique.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum u_n$ diverge

Exemple.

① $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n$ diverge

② $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n-2}{2n+1}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-2}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-2}{2n+1} \text{ diverge}$$

Séries alternées.

Définition: Une série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est dite alternée si

$u_n = (-1)^n a_n \quad a_n \geq 0 \ \forall n.$

Théorème: (Critère de Leibniz)

Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série alternée si $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ \text{et} \\ (a_n)_n \searrow \end{cases} \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge

Exemple.

① $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad a_n = \frac{1}{n} > 0 \quad \forall n \geq 1$

$$\begin{cases} \lim_n a_n = 0 \\ (a_n)_n \searrow \end{cases} \Rightarrow \sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 \Rightarrow f \searrow$$

② $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ $\quad a_n = \tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n]{} 0$

$a_n \searrow$

Donc $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge

$$f(x) = \tan\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = \tan\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \quad x \in [1, +\infty[$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)'\left(1 + \tan^2 \frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{-3}{2} x^{-\frac{5}{2}} \left(1 + \tan^2 \frac{1}{x^{3/2}}\right) < 0$$

Série à terme positive

Définition: $\sum_{n\geq 0} u_n$ est à terme positive si $u_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

La somme partielle d'un série à terme positive est une suite croissante

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = U_0 + \dots + U_n$$

$$S_{n+1} - S_n = \cancel{U_0} + \cancel{U_1} + \dots + U_n + U_{n+1} - \cancel{U_0} - \cancel{U_1} - \dots - U_n$$

$$= U_{n+1} \geq 0$$

$\sum U_n$ converge si et seulement si (S_n) est majorée

Théorème: Soient $u_n \geq v_n \geq 0$, alors

① $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum v_n$ converge

② $\sum v_n$ diverge $\Rightarrow \sum u_n$ diverge

Théorème: Soient u_n et v_n deux suites de $\mathbb{R}_+$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, alors

① Si $k = 0$ $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge

$\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge

② Si $k \in]0, +\infty[$ $\sum u_n \sim \sum v_n$ (même nature)

③ Si $k = +\infty$ $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum v_n$ converge

$\sum v_n$ diverge $\Rightarrow \sum u_n$ diverge

Exemple:

① $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

On a $n \geq 2 \Rightarrow n^n \geq 2^n$. Donc $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ \forall n \geq 2$

$\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge (c'est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{2} < 1$), donc la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ converge

d'après le critère de comparaison.

② $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$

Série de Riemann On appelle série de Riemann toute série de la forme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

Convergence absolument:

$\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge

Exemple

① $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{n} \searrow \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge

$\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ diverge

Donc $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi convergente.

② $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}\log n}{n^2+1}$ $\qquad v_n = \frac{1}{n^{5/4}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{\sqrt{n}\log n}{n^2+1} n^{\frac{5}{4}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{7}{4}}\log n}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 0$$

Puisque $\sum v_n$ converge (série de Riemann $\alpha = \frac{5}{4} > 1$)

alors $\sum \frac{\sqrt{n}\log n}{n^2+1}$ converge

③ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$

On a $n^2 \geq n^2 - n = n(n-1) \Rightarrow n \geq \sqrt{n(n-1)}$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \quad \forall n \geq 2$$

Puisque $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge $(\alpha=1)$, donc la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ diverge d'aprés le critère de comparaison.

Etude pratique d'une série :

① **La règle d'Alembert** : Soit $\sum u_n$ une série à étudier, on pose $\lambda = \lim_n \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$, alors

① si $\lambda < 1$ la série $\sum u_n$ converge

② si $\lambda > 1$ " " diverge

③ si $\lambda = 1$ " : cas doute (fete la comparaison)

Exemple

① $\sum \frac{n!}{a^n} \quad (a>0)$

$$u_n = \frac{n!}{a^n} \qquad u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{a^{n+1}}$$

On applique la règle de D'Alembert

$$\lambda = \lim_n \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_n \left|\frac{(n+1)!}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n!}\right|$$

$$= \frac{1}{a} \lim_n (n+1)$$

$$= +\infty$$

Donc $\sum \frac{n!}{a^n}$ diverge

② $\sum \frac{n!}{n^n}$

On applique la règle de d'Alembert

$$\lambda = \lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Donc $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge

② La règle de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série à étudier. On pose

$\lambda = \lim_n \sqrt[n]{|u_n|}$, alors

① $\lambda < 1 \Rightarrow \sum u_n$ converge absolument

② $\lambda > 1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge

③ $\lambda = 1 \Rightarrow$ fête la comparaison

Exemple :

① $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3n+2}{5n+7}\right)^n$

$$\lambda = \lim_n \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_n \frac{3n+2}{5n+7} = \frac{3}{5} < 1$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3n+2}{5n+7}\right)^n$ converge d'après le critère de Cauchy.

② $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$\lambda = \lim_n \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ diverge d'après le critère de Cauchy

Suites et Séries de fonctions

I. Suites de fonctions.

Soient $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I une partie non vide de $\mathbb{K}$. une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans $\mathbb{K}$ est une application $n \longrightarrow f_n$ de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$

Convergence simple d'une suite de fonctions.

Définition: Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans $\mathbb{K}$ converge simplement vers la fonction f si pour tout $x\in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. On note $f_n \longrightarrow f$

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, alors la limite est unique.

Quantification: $f_n \longrightarrow f$ si:

$\forall \varepsilon > 0, \forall x\in I, \exists n_x$ tq $\forall n \geq n_x$ on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Exemples:

① Soit pour tout entier n

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & x\in [0,1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f

définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$

② $I = [0,+\infty[$ $\quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx} \quad n \in \mathbb{N}^*$

si $x = 0$ $\quad f_n(0) = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(0) = f(0) = 0$$

si $x \in]0,+\infty[$ $\quad \displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n} \frac{1}{1+\frac{1}{nx}} = 1$

$f_n(x)$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f

définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in]0,+\infty[\\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Remarque:

1) La valeur du nombre n_x peut appartenir à $\mathbb{R}$

2) La limite d'une suite de fonctions continue n'est pas nécessairement continue.

3) Si (f_n) est croissante (respectivement décroissante) et convergente vers f alors f est aussi croissante (respectivement décroissante).

Exemple:

$f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ est continue et convergente vers $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in]0,+\infty[\\ 0 & x = 0 \end{cases}$

mais $f(x)$ n'est pas continue.

Convergence uniforme d'une suite de fonctions.

Définition: Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sa limite simple. On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I, et on note $f_n \rightrightarrows f$, si et seulement si:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N}$ tq $n \geq \eta \Rightarrow \forall x \in I \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

i.e: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N}$ tq $n \geq \eta \Rightarrow \sup\limits_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N}$ tq $n \geq \eta \Rightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon$

Exemple:

① $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \forall n \geq 1$
$\quad x \longrightarrow x e^{-nx}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} x e^{-nx} = 0 \Rightarrow (f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

$\forall n \geq 1, \forall x \geq 0 \; f_n'(x) = (1 - nx) e^{-nx}$

on pose $g(x) = f_n(x) \Rightarrow g'(x) = (1 - nx) e^{-nx}$

$g'(x) = 0 \Rightarrow (1 - nx) e^{-nx} = 0$

$\Rightarrow 1 - nx = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{n}$

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g(\frac{1}{n})$	$\searrow$	0

$g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{ne} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{ne} = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\| = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{ne} = 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$

② $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\quad x \longrightarrow x^n$

si $x \in [0,1[$ $\lim\limits_{n} f_n(x) = 0$

si $x = 1$ $\lim\limits_{n} f_n(x) = f(1) = 1$

donc $f_n(x)$ converge vers $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$

$\sup |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0 & x = 1 \\ x^n & x \in [0,1[\end{cases}$

$g(x) = x^n \Rightarrow g'(x) = n x^{n-1}$

x	0		1
g'		$+$	
g	0	$\nearrow$	1

$\Rightarrow \sup\limits_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\to 0$

Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle.

Propriétés de la convergence uniforme:

Proposition 01: Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$, et $f_n : I \to \mathbb{R}$ si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, alors elle converge simplement vers f

Proposition 02. La somme de deux suites de fonctions uniformément convergentes est une suite de fonctions uniformément convergente.

Théorème de continuité: Soit la suite $(f_n)_n$ des fonctions continues sur I, si $f_n \rightrightarrows f$ alors f est continue sur I

Théorème d'intégration: Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions continues sur I, convergeant uniformément vers la fonction f sur I, alors pour tout compact $[a,b] \subseteq I$ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim\limits_{n} f_n(x)\,dx = \lim\limits_{n} \int_a^b f_n(x)\,dx$

Théorème de dérivation: Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continûment dérivables sur $I=[a,b]$ vérifiant les conditions

1. $\exists x_0 \in [a,b]$ tq la suite $(f_n(x_0))_n$ converge
2. La suite des dérivées $(f'_n)_n$ est uniformément convergente sur I vers une fonction g

Alors: La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers une fonction dérivable f tq $f' \equiv g$

Séries de fonctions.

Définition: Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions telles que $\forall n \geq 0$, $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle série de fonctions de terme général f_n, notée $\sum_{n\geq 0} f_n$, la suite de fonctions des sommes partielles $(S_n)_n$, où pour tout entier n on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$

ou encore $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$; $\forall x \in I$.

La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ pour tout $x \in I$

Convergence simple d'une série de fonctions

Définition: Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ telle que $\forall n \geq 0$

$f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$

* Si pour tout $x \in D \subseteq I$, la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge on dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur D
* D est dit le domaine de convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$

* Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge sur I, on définit la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \forall x \in I.$$

f est la somme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$

* On définit le reste de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$, noté (R_n) par $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x), \forall x \in I.$

Exemple

Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ tq $\forall n\geq 0$ $f_n(x) = x^n$ $: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{k+1}}{1-x} & x \neq 1 \\ (n+1) & x = 1 \end{cases}$$

Donc $\sum_{n\geq 0} x^n$ est une série géométrique qui converge ssi $|x| < 1$

D'où, $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge simplement sur $]-1, 1[$ vers la fonction

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Exemple.

Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ où

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{x^n}{n!}$$

$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge simplement pour tout réel x, d'après le critère de D'Alembert

Convergence uniforme d'une série de fonctions

Définition. Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ tq $\forall n\geq 0$ $f_n : I \to \mathbb{R}$

On dit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément vers une fonction f sur I si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément vers f sur I

i.e : ssi $S_n \rightrightarrows f$ sur I

i.e : si $\lim_{n} \sup_{x\in I} |S_n(x) - f(x)| = 0$

i.e ssi $\lim_{n} \sup_{x\in I} |R_n(x)| = 0$

Exemple :

Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ tq $\forall n \geq 1$ $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \to \frac{(-1)^n}{x+n}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est une série alterné convergente

pour toute valeur positive x car $(a_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{x+n}\right)_{n\geq 1}$ est positive

décroissante vers $0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}\right| \leq \frac{1}{x+n+1}$$

D'ou $\forall x \geq 0, 0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n]{} 0$

$$\Rightarrow \lim_{n} \sup_{x\geq 0} |R_n(x)| = 0$$

Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément vers 0.

Proposition : Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

$\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $I \Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$ sur I

Remarque : La convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ vers la fonction nulle est une condition nécessaire non suffisante pour la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$. Donc si $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers 0 sur I alors la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

Exemple: Considérons la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ tq $\forall n\geqslant 1$

$$f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow n x^2 e^{-x\sqrt{n}}$$

On pose $g_n(x) = \frac{1}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f_n(x)}{g_n(x)} = \lim\limits_{n} n^2 n x^2 e^{-x\sqrt{n}} = 0 \quad , \forall x\geqslant 0$

$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann $\alpha=2>1$). Donc $\sum_{n\geqslant 1} n x^2 e^{-x\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

$\lim\limits_{n} f_n(x) = \lim\limits_{n} n x^2 e^{-x\sqrt{n}} = 0 \quad , \forall x\geqslant 0.$

$\Rightarrow (f_n(x))_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$

On pose $g(x) = f_n(x) \Rightarrow g'(x) = nx(2 - x\sqrt{n})\, e^{-x\sqrt{n}} \quad , \forall x\geqslant 0$

$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{e^2} \not\to 0$, donc $(f_n(x))_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle. Alors $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Proposition:

* Si la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément vers f sur I, alors elle converge simplement vers f sur I.
* Si les séries de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ convergent uniformément vers les fonctions f et g sur I, alors pour toute valeur réelle, la série

$\sum_{n\geq 0}(f_n+\alpha g_n)$ converge uniformément vers $(f+\alpha g)$ sur I.

La convergence normale d'une série de fonctions:

Définition: Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ définie sur un domaine D (i.e la série converge simplement sur D). S'il existe une série numérique positive convergente $\sum_{n\geq 0} a_n$ vérifiant

$$\forall x\in D \quad |f_n(x)|\leq a_n$$

Alors on dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur D.

Autrement dit, la série converge normalement sur D si:

$$\exists a_n\geq 0, \forall n\geq 0, \forall x\in D \quad |f_n(x)|\leq a_n \text{ et } \sum_{n\geq 0} a_n \text{ converge.}$$

i.e $\exists a_n\geq 0\ \forall n\geq 0 \quad \sup_{x\in D}|f_n(x)|\leq a_n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge i.e $\sum_{n\geq 0}\|f_n\|$ CV

Exemple:

Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n^2}$, $x\in\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad \left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$ ($\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ série de Riemann $\alpha=2>1$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge)

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n^2} \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}.$$

Exemple: $\sum_{n\geq 0} n e^{-x\sqrt{n}}$, $x\in[1,+\infty[$

$f_n(x)=ne^{-x\sqrt{n}}=g(x) \Rightarrow g'(x)=-n\sqrt{n}\,e^{-x\sqrt{n}}\leq 0 \quad \forall x\in[1,+\infty[$

x	1	$+\infty$
g'	$-$	
g	$g(1)$ $\searrow$	0

$g(1)=f_n(1)=ne^{-\sqrt{n}}=\sup_{x\in[1,+\infty[}|f_n(x)|$

On pose $g_n(x)=\frac{1}{n^2}$

$\lim_n \frac{f_n(1)}{g_n(x)}=\lim_n n^2 n e^{-\sqrt{n}}=0$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} f_n(1)=\sum_{n\geq 0} n e^{-\sqrt{n}}$ converge

Donc $\sum_{n\geq 0} n e^{-x\sqrt{n}}$ converge normalement.

Remarque.

$$\begin{array}{ccc} CN & \Rightarrow & CU \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ CA & \Rightarrow & C.S \end{array}$$

Exemple. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ (preuve exemple (*))

mais $\left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right| = \frac{1}{x+n} \sim \frac{1}{n}$ $\forall x \geq 0$ $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge}\right)$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ ne converge pas absolument sur $\mathbb{R}^+$

$\sup_{x\geq 0} \left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right| = \frac{1}{n}$ $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge}\right)$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$

Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément, mais pas normalement ni absolument sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème généraux sur les séries de fonctions:

Théorème de continuité; Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ est une série de fonctions continues sur I, convergeant uniformément sur I, alors sa somme est une fonction continue sur I

i.e $\forall x_0 \in I$ $\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0)$

Exemple: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^2+n^2}$, $\forall n \geq 1$ $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $|f_n(x)| = \frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann $\alpha = 2 > 1$), alors $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^2+n^2}$ converge normalement $\Rightarrow$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$

D'après le théorème de continuité, la fonction $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+n^2}=0$

Théorème d'intégration : Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions continues sur I, convergeant uniformément sur I, alors pour tout compact $[a,b]\subseteq I$, $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$

Exemple $\sum_{n\geq 0} x^n$ $|x|\leq r<1$

On a $|x|^n\leq r^n, \forall x\in[-r,r], r<1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} x^n$ converge normalement donc uniformément sur $[-r,r]$.

les fonctions $f_n(x)=x^n$ sont continues sur $[-r,r]$, d'où d'après le théorème d'intégration, on a

$$\forall x\in[-r,r],\ 0<r<1 \quad \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\,dt$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow -\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \forall x\in[-r,r],\ 0<r<1.$$

Théorème de dérivation : Soit $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ une série de fonctions continûment dérivables sur $[a,b]$. Si

* $\exists x_0\in[a,b]$ tq $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge, et
* $\sum_{n\geq 0} f_n'(x)$ converge uniformément sur $[a,b]$ et ~~sa somme f est dérivable avec~~ $\cancel{f'=g \text{ i.e } \left(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right)'=\sum_{n\geq 0}}$ pour somme la fonction g

Alors la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge uniformément sur $[a,b]$ et sa somme f est dérivable avec $f'=g$ i.e $\left(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right)'=\sum_{n\geq 0} f_n'(x)$.