MODULATION

La transmission d'un signal porteur d'information (signal informatif ou signal message) sur un canal de transmission, défini par sa bande passante, utilise généralement un décalage des fréquences contenues dans le signal vers d'autres fréquences plus adaptées à la transmission. Ce déplacement de fréquences est obtenu par modulation. La modulation est définie comme la méthode permettant de faire varier les caractéristiques du signal porteur au rythme du signal modulant. Le signal informatif ou signal message est appelé signal modulant. Le résultat de la modulation est appelé signal modulé.

Dans la modulation par onde porteuse analogique, un signal sinusoïdal de la forme $Acos(2\pi f_p t + \varphi)$ est utilisé pour transporter l'information. Une onde porteuse modulée peut être représentée mathématiquement sous la forme suivante :

$$A(t)cos\left(2\pi f_p t + \varphi(t)\right) \quad (1)$$

Dans l'équation (1), $A(t)$ et $\varphi(t)$ sont appelés respectivement amplitude et phase instantanées.

Si $A(t)$ est une fonction linéaire du signal informatif $m(t)$, nous sommes en présence de la modulation d'amplitude.

Si $\varphi(t)$ est une fonction linéaire du signal informatif $m(t)$, nous avons une modulation de phase ou de fréquence.

Dans cette partie du chapitre, on s'intéresse aux modulations angulaires à bande étroite et à large bande.

MODULATION ANGULAIRE

La modulation angulaire se décline en modulation de phase (PM) et modulation de fréquence (FM). Elle correspond à la variation de l'angle de l'onde porteuse sinusoïdale au rythme du signal informatif $m(t)$.

MODULATION ANGULAIRE ET FREQUENCE INSTANTANEE.

Dans le cas d'une modulation angulaire, l'onde porteuse est de la forme

$$x_p(t) = A(t)cos\left(2\pi f_p t + \varphi(t)\right) = A(t)cos\big(\theta(t)\big) \quad (2)$$

Dans l'équation (2), $A(t)$ et f_p sont des constantes.

$\varphi(t)$ est une fonction du signal informatif.

avec:

$$\theta(t) = 2\pi f_p t + \varphi(t) \quad (3)$$

La fréquence instantanée de $x_p(t)$ est donnée par:

$$f_i(t) = \frac{w_i(t)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} = f_p + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right) \quad (4)$$

w_i est la pulsation instantanée donnée par :

$$w_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = w_p + \left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right) \quad (5)$$

Si $\varphi(t)$ est une constante alors, $f_i = f_p$ et $w_i = w_p$

$\varphi(t)$ et $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ sont respectivement les variations instantanées de phase et de fréquence de $x_p(t)$.

La variation maximale de la fréquence est donnée par:

$$\Delta f = \left|f_i - f_p\right|_{max} \quad (6)$$

La variation maximale de pulsation est donnée par :

$$\Delta w = \left|w_i - w_p\right|_{max} \quad (7)$$

MODULATION DE PHASE ET DE FREQUENCE

Dans le cas d'une modulation de phase la variation instantanée de la phase de la porteuse est fonction du signal informatif. Dans ce cas nous avons :

$$\varphi(t) = K_{ph} m(t) \tag{8}$$

Où K_{ph} est la constante de variation de phase, exprimée en radian par unité de $m(t)$.

Dans le cas d'une modulation de fréquence la variation instantanée de la fréquence de l'onde porteuse est fonction du signal informatif. Dans ce cas nous avons :

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = K_f m(t) \tag{9}$$

➔

$$\varphi(t) = K_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda) d\lambda \tag{10}$$

Où K_f est la constante de variation de fréquence, exprimée en radian par seconde par unité de $m(t)$.

Nous pouvons exprimer les signaux modulés en phase et en fréquence comme suit :

$$x_{PM}(t) = Acos\left(2\pi f_p t + K_{ph} m(t)\right) \tag{11}$$

$$x_{FM}(t) = Acos\left(2\pi f_p t + K_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda) d\lambda\right) \tag{12}$$

Les pulsations et les fréquences instantanées pour ces deux types de modulations sont données par :

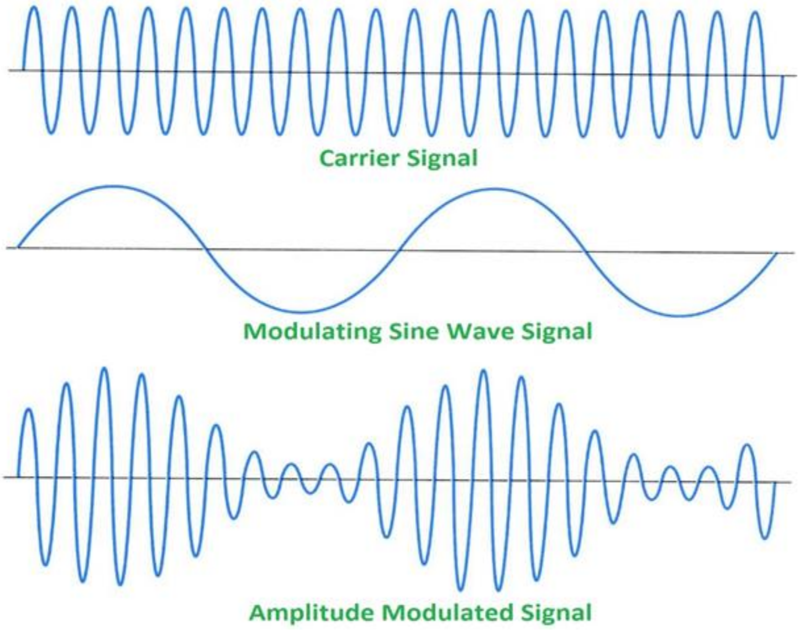
$$w_{i-PM} = w_p + K_{PH}\left(\frac{dm(t)}{dt}\right) \tag{13}$$

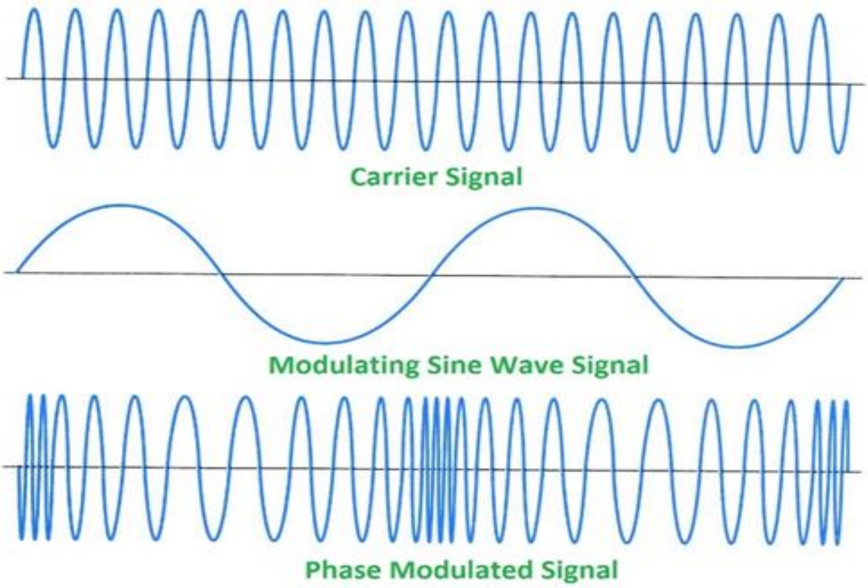
$$w_{i-FM} = w_p + K_f m(t) \tag{14}$$

$$f_{i-PM} = f_p + \frac{K_{PH}}{2\pi}\left(\frac{dm(t)}{dt}\right) \tag{15}$$

$$f_{i-FM} = f_p + \frac{K_f}{2\pi} m(t) \qquad (16)$$

La figure suivante illustre les ondes obtenues pour les modulations AM, FM et PM pour un signal modulant sinusoïdal pur.





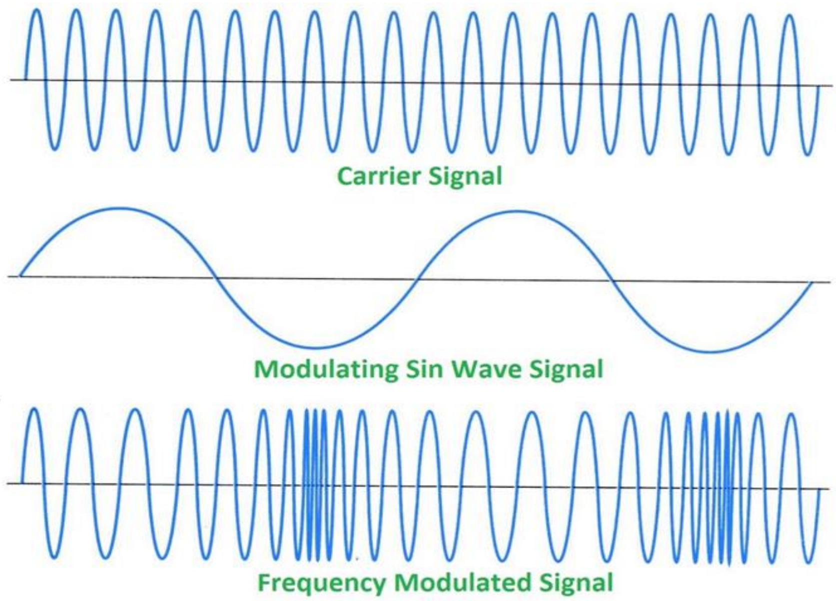


Figure.1. Modulation AM, PM et FM

ANALYSE SPECTRALE DES SIGNAUX MODULES EN PM OU EN FM.

Pour une modulation angulaire, l'onde porteuse peut être exprimée comme suit :

$$x_p(t) = Re\left\{Ae^{j\left(2\pi f_p t+\varphi(t)\right)}\right\} = Re\{Ae^{j2\pi f_p t}e^{j\varphi(t)}\} \quad (17)$$

Re : représente l'opérateur de la partie réelle d'un nombre complexe.

Le développement en série de $e^{j\varphi(t)}$ donne :

$$x_p(t) = ARe\left\{e^{j2\pi f_p t}\left[1 + j\varphi(t) - \frac{\varphi^2(t)}{2!} - \cdots + j^n\frac{\varphi^n(t)}{n!} + \cdots\right]\right\} \quad (18)$$

$$x_p(t) = A\left\{cos\left(2\pi f_p t\right) - \varphi(t)sin\left(2\pi f_p t\right) - \frac{\varphi^2(t)}{2!}cos\left(2\pi f_p t\right) + \frac{\varphi^3(t)}{3!}sin\left(2\pi f_p t\right) + \cdots\right\}$$

(19)

Le signal modulé correspond au signal de l'onde porteuse pure auquel s'ajoutent les termes tels que : $\varphi(t)sin\left(2\pi f_p t\right)$, $-\frac{\varphi^2(t)}{2!}cos\left(2\pi f_p t\right)$, $\frac{\varphi^3(t)}{3!}sin\left(2\pi f_p t\right)$ … etc.

MODULATION ANGULAIRE A BANDE ETROITE

Pour les signaux bandes étroites nous avons :

$$\varphi(t) \ll 1 \tag{20}$$

Dans ce cas les termes en puissances élevées de $\varphi(t)$ sont négligeables ($\varphi^2(t)$, $\varphi^3(t)$, …etc sont négligeables).

⇨ $x_p(t)$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$x_p(t) \approx Acos\left(2\pi f_p t\right) - A\varphi(t)sin\left(2\pi f_p t\right) \tag{21}$$

Pour une modulation PM nous avons :

$$x_{PM-BE}(t) \approx Acos\left(2\pi f_p t\right) - AK_{PH}m(t)\,sin\left(2\pi f_p t\right) \tag{22}$$

Pour une modulation FM nous avons :

$$x_{FM-BE}(t) \approx Acos\left(2\pi f_p t\right) - A\left[K_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)d\lambda\right] sin\left(2\pi f_p t\right) \tag{23}$$

MODULATION ANGULAIRE PAR UN SIGNAL SINUSOÏDAL PUR

INDICE DE MODULATION

Si le signal informatif $m(t)$ est de type sinusoïdal pur, alors on peut le choisir de la façon suivante :

$$m(t) = \begin{cases} a_m sin(2\pi f_m t) & \text{pour une modulation } PM \\ a_m cos(2\pi f_m t) & \text{pour une modulation } FM \end{cases} \tag{24}$$

La phase de la porteuse pour les deux types de modulations est donnée par :

$$\varphi(t) = \beta sin(2\pi f_m t) \tag{25}$$

Avec :

$$\beta = \begin{cases} K_{PH} a_m & \text{pour une modulation } PM \\ \frac{K_f a_m}{2\pi f_m} & \text{pour une modulation } FM \end{cases} \tag{26}$$

Pour une modulation PM, le paramètre β est appelé indice de modulation. Il correspond à la valeur maximale de la variation de phase pour les deux types de modulations (PM et FM).

L'indice de modulation est valable pour le cas de modulation avec un signal sinusoïdal pur. Il est donné par :

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} \tag{27}$$

Avec : $\Delta f = \left|f_i - f_p\right|_{max}$

SPECTRE DE FOURIER

La modulation de phase avec un signal sinusoïdal pur peut être réécrite, en fonction de β, comme suit :

$$x_p(t) = A(t) cos\left(2\pi f_p t + \beta sin(2\pi f_m t)\right) \tag{28}$$

La décomposition en série de Fourier de cette équation donne :

$$x_p(t) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta)\, cos\left(2\pi f_p + 2n\pi f_m\right)t \tag{29}$$

$J_n(\beta)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n et d'argument β. Le tableau ci-après donne quelques valeurs de $J_n(\beta)$. La figure (15) illustre ces fonctions.

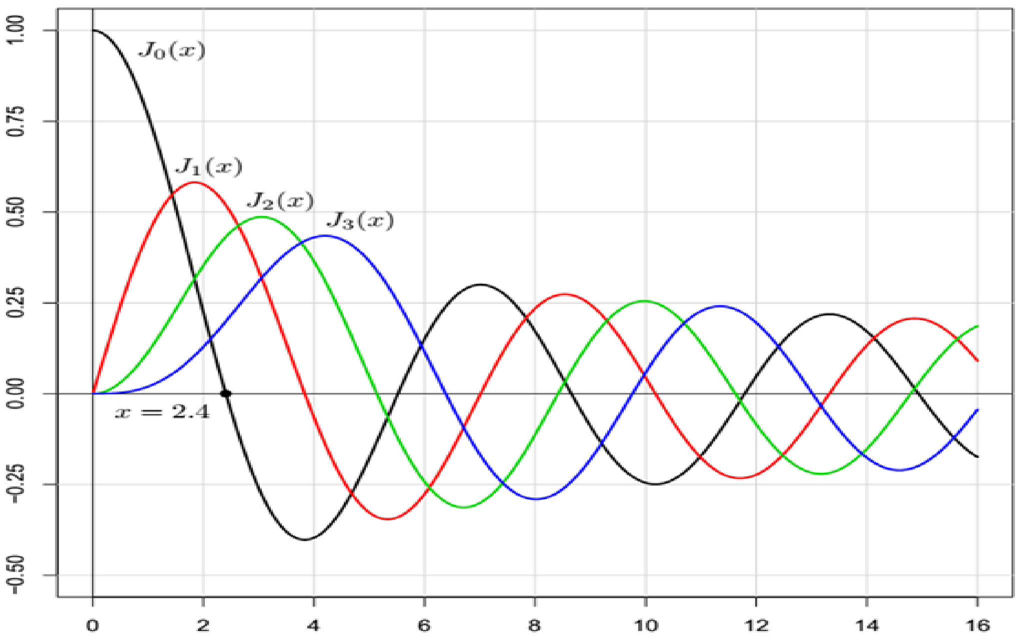


Figure.2. Fonctions de Bessel $J_n(\beta)$, n = 1, 2, 3, 4

Tableau.1. Quelques valeurs sélectionnées de $J_n(\beta)$.

$n\backslash\beta$	0,1	0,2	0,5	1	2	5	8	10
0	0,997	0,990	0,938	0,765	0,224	− 0,178	0,172	− 0,246
1	0,050	0,100	0,242	0,440	0,577	− 0,328	0,235	0,043
2	0,001	0,005	0,031	0,115	0,353	0,047	− 0,113	0,255
3			0,003	0,020	0,129	0,365	− 0,291	0,058
4				0,002	0,034	0,391	− 0,105	− 0,220
5					0,007	0,261	0,286	− 0,234
6					0,001	0,131	0,338	− 0,014
7						0,053	0,321	0,217
8						0,018	0,224	0,318
9						0,006	0,126	0,292
10						0,001	0,061	0,208
11							0,026	0,123
12							0,010	0,063
13							0,003	0,029
14							0,001	0,012
15								0,005
16								0,002

La figure (16) illustre le spectre d'une onde modulée en phase par un signal sinusoïdal pur.

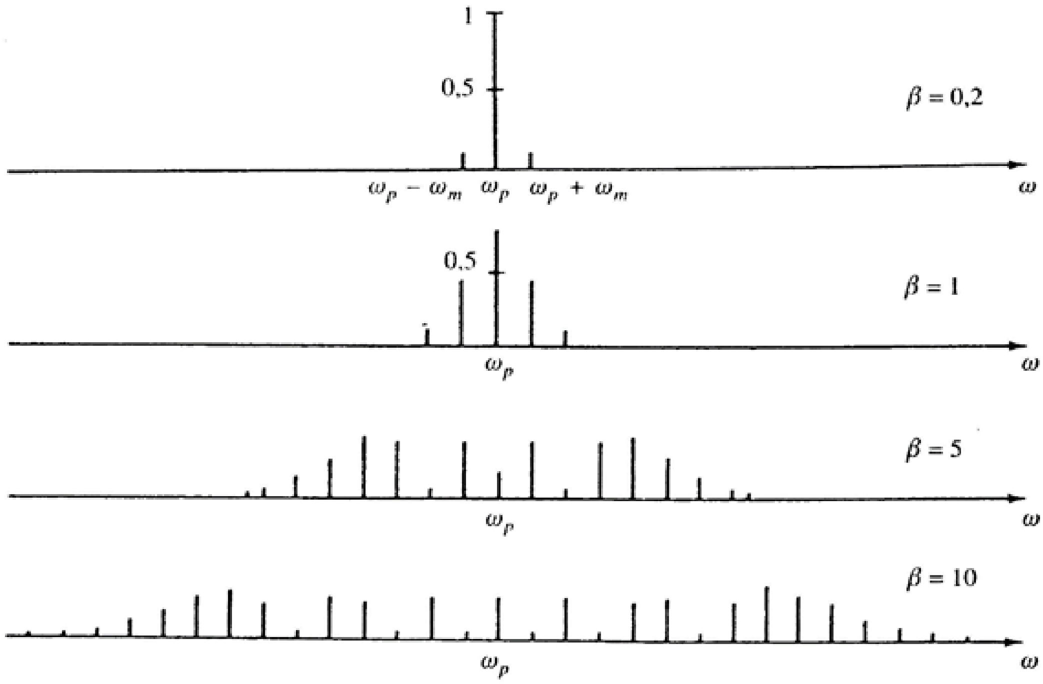


Figure.3. Spectre d'une onde modulée en fréquence par un signal sinusoïdal pur de fréquence f_m fixe

A partir de l'équation de la décomposition en série de Fourier et du tableau précédent, nous pouvons faire les remarques suivantes :

1- Le spectre est composé de la raie de l'onde porteuse et d'une infinité de composantes spectrales de fréquences $f_p \pm nf_m$ (*n=1,2,3,…*).
2- Les amplitudes relatives des différentes raies sont liées à la valeur de $J_n(\beta)$.
3- Le nombre de raies spectrales significatives est fonction de l'indice de modulation β.

LARGEUR SPECTRALE DES SIGNAUX EN MODULATION ANGULAIRE

MODULATION PAR SIGNAL SINUSOÏDAL

98% de la puissance totale du signal normalisé est situé dans une largeur spectrale donnée par :

$$\Delta f_B \approx 2(\beta + 1) f_m \tag{30}$$

En fonction de la pulsation, elle est donnée par :

$$\Omega_B \approx 2(\beta + 1)w_m \tag{30}$$

Avec :

$$\Omega_B = 2\pi\Delta \mathrm{f}_B \tag{31}$$

Si $\beta \ll 1$, le signal est à bande étroite et sa largeur spectrale est approximativement égale à : $4\pi f_m$. Cette condition est considérée comme satisfaite si : $\beta < 0.2$.

MODULATION PAR SIGNAL QUELCONQUE

Dans le cas d'une modulation avec un signal informatif quelconque *m(t)* de largeur de bande bornée par f_M, le rapport de variation spectrale *D* est donné comme suit :

$D = \frac{\Delta f}{f_M}$. *D* est à rapprocher par l'indice de modulation dans le cas d'un signal sinusoïdal. Dans l'équation « $\Delta \mathrm{f}_B \approx 2(\beta + 1)f_m$ », si on remplace β par *D* et f_m par f_M on obtient :

$\Delta \mathrm{f}_B \approx 2(D + 1)f_M$. Cette quantité représente la bande passante et elle est appelée règle de Carson.

Si : $D \ll 1$ ➔ $\Delta \mathrm{f}_B \approx 2f_M$, alors le signal est à bande étroite.

Si : $D \gg 1$ ➔ $\frac{\Omega_B}{2\pi} \approx 2Df_M = 2\Delta f$, alors le signal est à large bande.

GENERATION DES SIGNAUX EN MODULATION ANGULAIRE

MODULATION ANGULAIRE A FAIBLE LARGEUR SPECTRALE

Le principe de génération des signaux à modulation de phase à faible largeur spectrale est illustré sur la figure (17) :

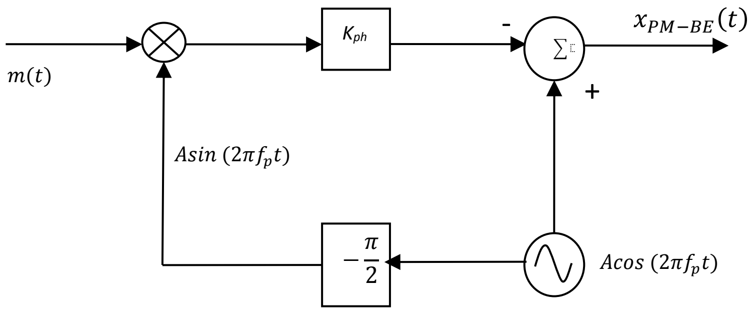


Figure.4. Modulation PM bande étroite

Le principe de génération des signaux à modulation de fréquence à faible largeur spectrale est illustré sur la figure (18) :

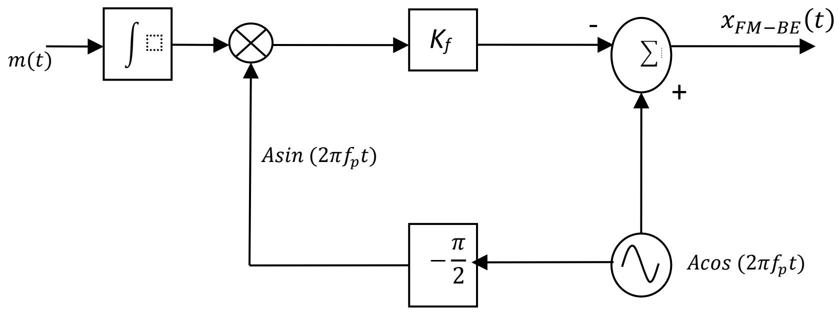


Figure.5. Modulation FM bande étroite

MODULATION ANGULAIRE A LARGE BANDE

Deux méthodes existent à savoir :

Méthode indirecte

Le principe de cette méthode est de générer un signal bande étroite et ensuite convertit ce signal en large bande en utilisant un multiplieur de fréquence. Ce dernier multiplie l'argument de l'entrée sinusoïdale par la valeur *n*.

Si l'entrée du multiplieur est de la forme :

$$x(t) = Acos\left(2\pi f_p t + \varphi(t)\right) \tag{32}$$

Alors la sortie est la suivante :

$$y(t) = Acos\left(2\pi n f_p t + n\varphi(t)\right) \tag{33}$$

Dans cette sortie, en plus de $\varphi(t)$ qui est multipliée par *n*, la fréquence f_p aussi est aussi multipliée par la valeur n. Par conséquent, la fréquence nf_p devient inutilisable. Pour régler ce problème, on doit effectuer une conversion de fréquence pour décaler le spectre.

Méthode directe

Dans cette méthode, la fréquence de l'onde porteuse est pilotée par le signal modulant en utilisant un oscillateur dont la fréquence est commandée par une tension (VCO pour Voltage Controlled Oscillator).

DEMODULATION DES SIGNAUX EN MODULATION ANGULAIRE

La démodulation d'un signal modulé en FM nécessite un système permettant de produire en sortie un signal proportionnel à la variation de fréquence du signal d'entrée. Ce système est appelé discriminateur de fréquence.

Si le signal d'entrée est de la forme :

$x_p(t) = Acos\left(2\pi f_p t + \varphi(t)\right)$, alors la sortie du discriminateur est la suivante :

$$y_d(t) = k_d \frac{d\varphi(t)}{dt} \tag{34}$$

Où k_d est un paramètre correspondant à la sensibilité du discriminateur.

Pour une modulation de fréquence, $y_d(t)$ est donné par :

$$y_d(t) = k_d k_f m(t) \tag{35}$$

Pour une modulation de phase, $y_d(t)$ est donné par :

$$y_d(t) = k_d k_{ph} \frac{dm(t)}{dt} \tag{36}$$

L'intégration de $y_d(t)$ pour une modulation de phase donne un signal proportionnel à $m(t)$.

Une approche simple d'un discriminateur idéal est un dérivateur idéal suivi d'un détecteur d'enveloppe. Si l'entrée est de la forme : $x_p(t) = Acos\left(2\pi f_p t + \varphi(t)\right)$

Alors la sortie du dérivateur est de la forme :

$$x'_p(t) = -A\left[2\pi f_p t + \frac{d\varphi(t)}{dt}\right] sin\left(2\pi f_p t + \varphi(t)\right) \tag{37}$$

Le signal $x'_p(t)$ est à la fois modulé en phase et en fréquence. L'enveloppe de ce signal $x'_p(t)$ est :

$$A\left[2\pi f_p t + \frac{d\varphi(t)}{dt}\right] \tag{38}$$

La pulsation instantanée est donnée par (équation (5)):

$$w_i(t) = w_p + \left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right) \tag{39}$$

La sortie du détecteur d'enveloppe est donc :

$$y_d(t) = w_i \tag{40}$$

qui est la fréquence instantanée du signal $x_p(t)$