

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE MOHAMED EL-BACHIR EL-IBRAHIMI - BORDJ BOU ARRERIDJ**

**Faculté des Sciences et de la Technologie**  
**Département d'Électronique**



**Chapitre 1-Partie3 : Transmissions Numériques en bande limitée**

**Matière : CNA**

**M1-ST**

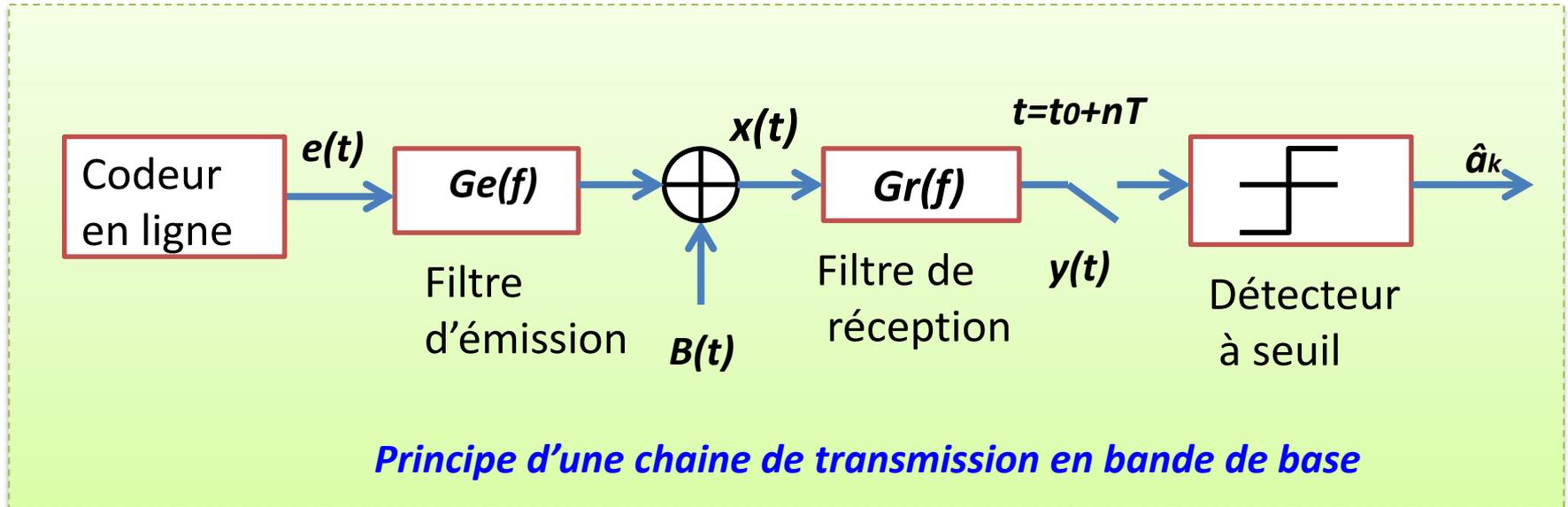
**Par: Pr. Khaled ROUBAH**

**Année universitaire 2020/2021**

## Transmission en bande de base sur canal à bande limitée

Considérons la transmission d'une suite de symboles M-aires sur un canal à bande limité.

La limitation du canal est supposée due à la présence d'un filtre d'émission à la sortie du codeur en ligne



## Transmission en bande de base sur canal à bande limitée

---

- Le signal  $x(t)$  reçu par le récepteur est égal à:

$$x(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT) + B(t)$$

Avec: 
$$h_e(t) = h(t) \otimes g_e(t)$$

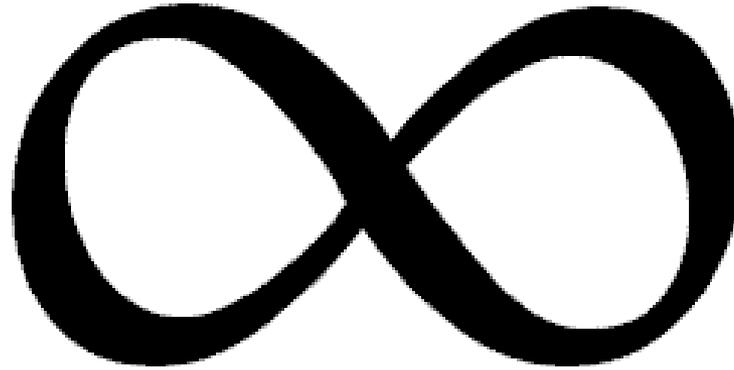
À l'instant  $t_0 + nT$  la sortie du filtre de réception est:

$$y(t_0 + nT) = \sum_k a_k r(t_0 + (n - k)T) + b(t_0 + nT)$$

Avec: 
$$r(t) = h_e(t) \otimes g_r(t)$$

$$b(t) = B(t) \otimes g_r(t)$$

Pour un canal à bande passante infinie:



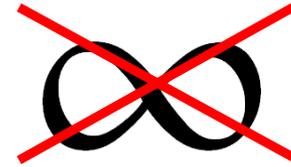
→ Chaque échantillon  $y(t_0+nT)$  dépend du seul symbole  $a_n$  et du bruit.

La minimisation de la probabilité d'erreur est réalisée par:

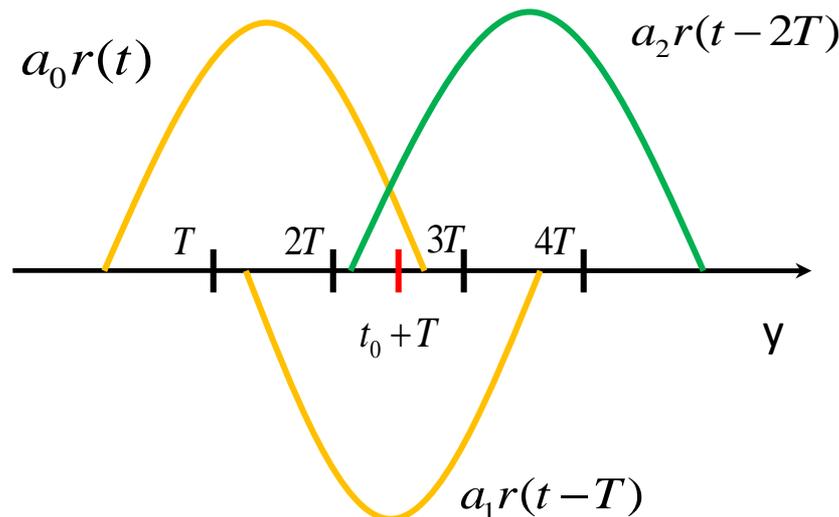
- L'utilisation d'un seuil de décision optimal;
- L'utilisation d'un filtre de réception adapté à la forme d'onde  $h(t)$  de durée  $T$ .

# Transmission en bande de base sur canal à bande limitée

## Pour un canal à bande passante Finie



→ L'échantillon  $y(t_0+nT)$  peut désormais dépendre du symbole  $a_n$ , mais aussi des symboles antérieurs, et même postérieurs, au symbole  $a_n$  si l'instant initial de décision  $t_0$  est supérieur à  $T$ . Cette situation est illustrée sur la figure suivante



À l'instant d'échantillonnage, le signal échantillonné ne dépend pas uniquement du symbole  $a_1$  mais aussi des symboles  $a_0$  et  $a_2$ ,

*Dépendance de  $a_n$ , par les symboles antérieurs et même postérieurs*

# Interférence entre symbole IES

→ L'échantillon  $y(t_0 + nT)$  est la somme de 03 termes:

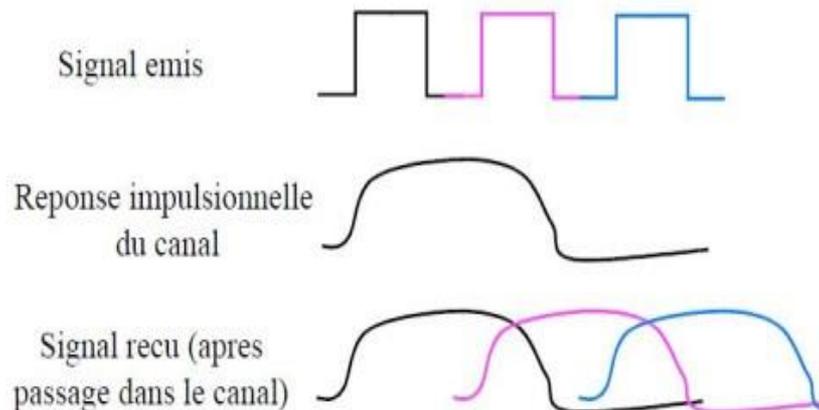
Le 1<sup>er</sup> terme dépend de  $a_n$ , le 2<sup>ème</sup> qui dépend des symboles  $a_{n-m}$  ( $m \neq 0$ ) est appelé terme de **l'Interférence Entre Symbole (IES)** et le 3<sup>ème</sup> représente le bruit.

$$y(t_0 + nT) = \underbrace{a_n r(t_0)}_{\text{Information utile}} + \underbrace{\sum_{m \neq 0} a_{n-m} r(t_0 + mT)}_{\text{IES}} + \underbrace{b(t_0 + nT)}_{\text{Bruit}}$$

Information utile

IES

Bruit



*Signal avant et après passage par le canal de transmission*

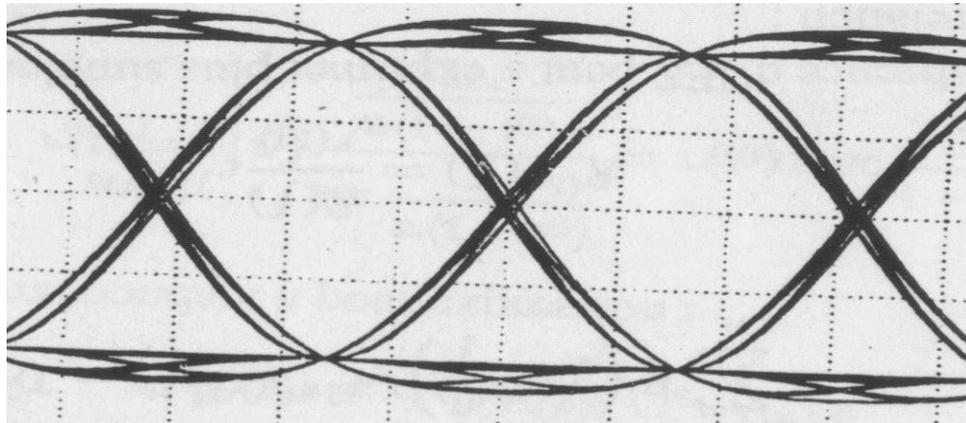
# Caractérisation de l'IES

---

On peut caractérisé l'IES par:

## 1- Le Diagramme de l'œil

- Il appelé ainsi par analogie avec la forme de l'œil humain;
- Il est obtenu en superposant toutes les traces du signal  $y(t)$ ;
- C'est une figure qui se répète tous les  $T$ ;
- Son analyse peut être limitée à un intervalle quelconque  $T$ .
- La figure suivante présente le diagramme de l'œil pour un code NRZ.

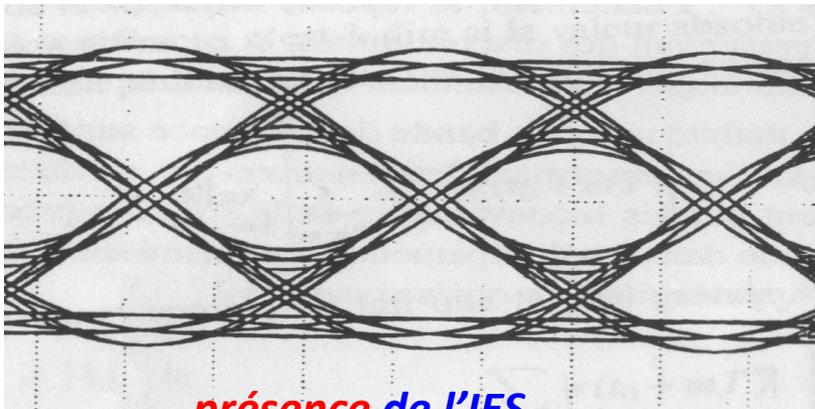


*Diagramme de l'œil associé à un code en ligne à symboles [-1,1] en l'absence de l'IES*

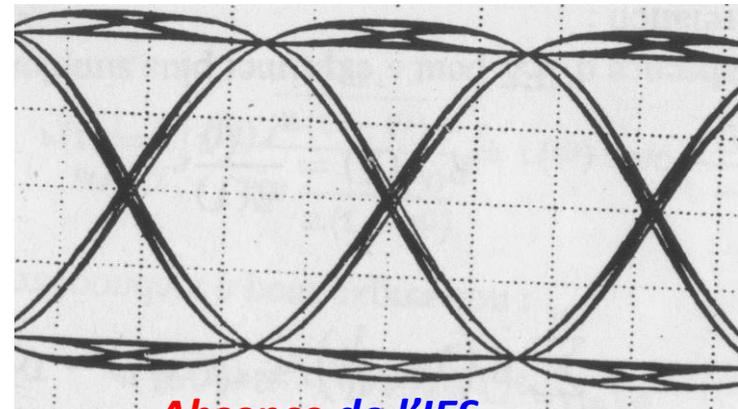
# Caractérisation de l'IES

## 1- Le Diagramme de l'œil - Suite

- En l'absence d'IES, toutes les traces passent par le même point à l'instant de décision  $t_0+nT$ .
- Plus le Diagramme de l'œil est ouvert à l'instant de décision et plus l'immunité contre le bruit est grande (Ouverture verticale).
- Plus l'ouverture horizontale du Diagramme de l'œil est importante et moins la transmission est sensible aux erreurs de positionnement de l'instant de décision.



*présence de l'IES*



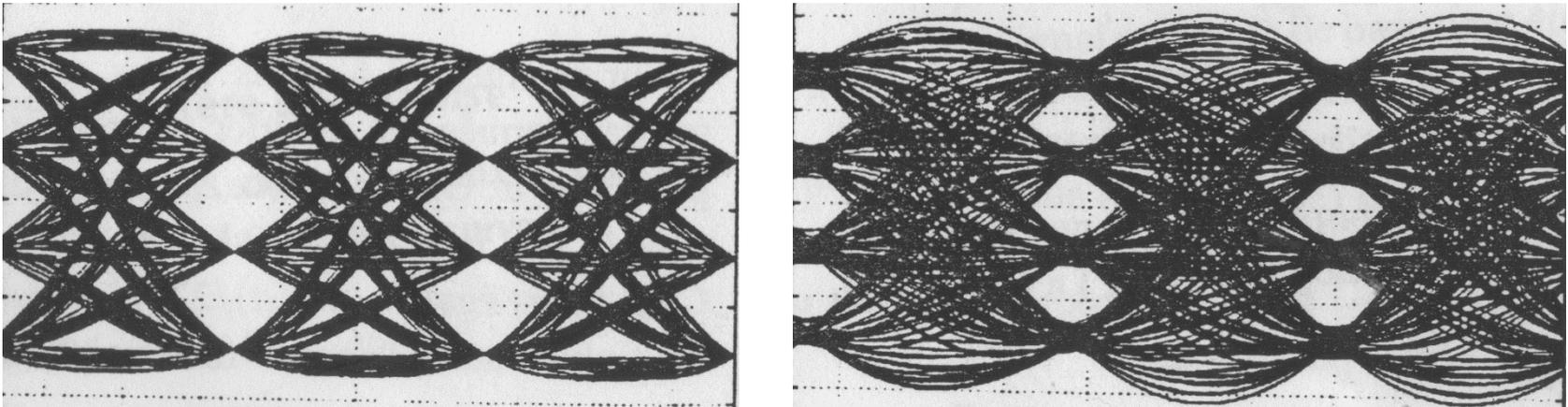
*Absence de l'IES*

*Diagramme de l'œil associé à un code en ligne à symboles [-1,1] en l'absence et en présence de l'IES*

# Caractérisation de l'IES

## 1- Le Diagramme de l'œil - Suite

→ Sur la figure suivante, nous présentons un diagramme de l'œil pour un code en ligne à 4 niveaux sans et avec IES.



*Diagramme de l'œil associé à un code à 4 niveaux sans et avec IES*

Comme l'illustrent les deux figures, dans le cas de la présence d'IES, nous avons :

- Les différentes traces du signal ne passent pas par le même point à l'instant de décision  **$t_0+nT$** .
- L'IES contribue à la fermeture de l'œil.

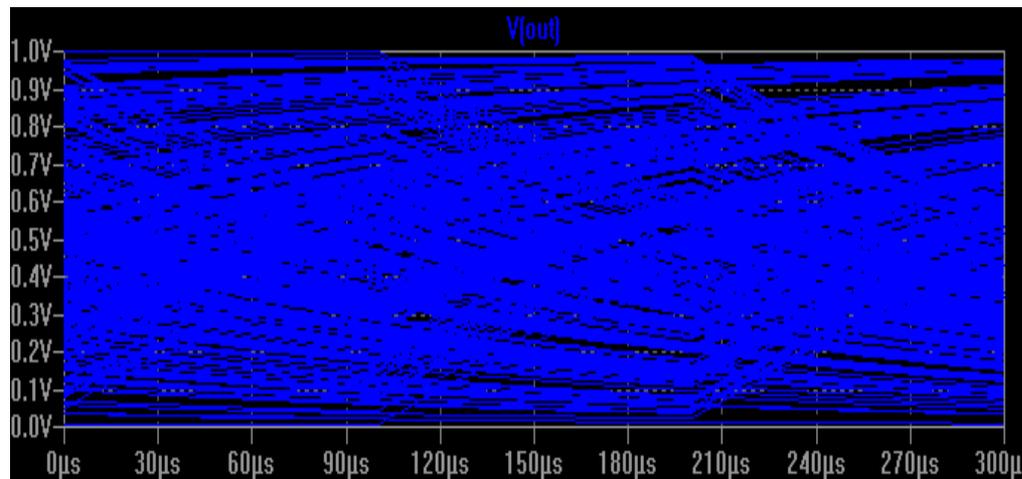
# Caractérisation de l'IES

## 2- Déviation maximale

- La présence de l'IES réduit l'ouverture verticale du diagramme de l'œil et provoque des erreurs de décision même en l'absence du bruit.
- Pour une transmission M-aires, la distorsion maximale du diagramme de l'œil est:

$$D_{max} = (M - 1) \frac{\sum_{m \neq 0} |r(t_0 + mT)|}{|r(t_0)|} \geq 1$$

- Lorsque  $D_{max} > 1$  → le diagramme de l'œil est complètement fermé aux instants de décision  $t_0 + nT$ .
- Pour réaliser une communication numérique, il faut que:  $D_{max} < 1$ .



*Diagramme de l'œil fermé  $D_{max} > 1$*

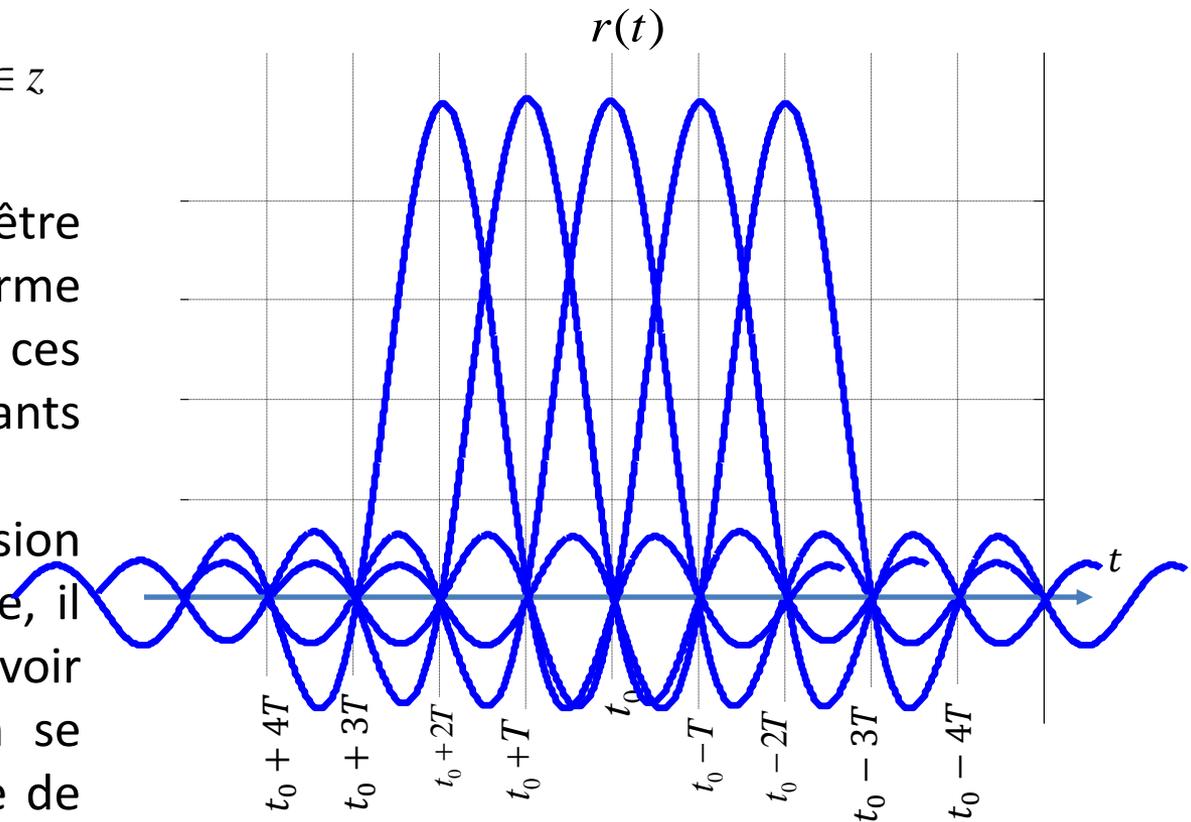
## 3- Condition d'absence D'IES - Critère de Nyquist:

L'absence d'IES aux instants de décision  $(t_0+nT)$ , impose que l'impulsion  $r(t)$  vérifie la condition suivante:

$$r(t_0 + nT) = \begin{cases} r(t_0); & n = 0 \\ 0 & ; n \neq 0 \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

➔ L'impulsion  $r(t)$  peut être de durée et de forme quelconque, mais tous ces échantillons aux instants  $(t_0+nT)$  doivent être nuls.

➔ Comme cette impulsion est le résultat d'un filtrage, il est intéressant de voir comment cette condition se traduit sur sa transformée de Fourier  $R(f)$ .



## Absence de l'IES

La condition d'absence d'IES peut s'exprimer par:

$$\sum_n R^{(t_0)}\left(f - \frac{n}{T}\right) = T$$

$$R^{(t_0)}(f) = \frac{R(f)}{r(t_0)} e^{j2\pi ft_0}$$

- Cette condition est appelée critère de Nyquist;
- Toutes les fonctions  $R^{(t_0)}(f)$  qui satisfassent cette condition, vérifient le critère de Nyquist.
- Si la fonction occupe une bande de fréquence inférieure à  **$1/2T$** , elle ne peut vérifier le critère de Nyquist.
- Pratiquement, cela signifie qu'on ne peut pas transmettre sans IES un signal de rapidité de modulation  **$R=1/T$**  dans une bande inférieure à  **$1/2T$** .
- La fonction  $R^{(t_0)}(f)$ , de largeur de bande minimale (notée  $N_m^{(t_0)}(f)$ ), qui assure une IES nulle est donc égale à:

$$N_m^{(t_0)}(f) = \begin{cases} T & \forall |f| \leq \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

## Absence de l'IES

---

Cette fonction occupe une bande égale à  $1/2T$  Hz (si on raisonne sur les fréquences positives uniquement). Cette bande est appelée bande de Nyquist. La fonction  $R(f)$  est alors égale a:

$$R(f) = r(t_0) N_m^{(t_0)}(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

Et le signal  $r(t)$  correspondant a pour expression:

$$r(t) = r(t_0) \frac{\sin \frac{\pi(t-t_0)}{T}}{\frac{\pi(t-t_0)}{T}} = r(t_0) \operatorname{sinc} \frac{\pi(t-t_0)}{T}$$

La fonction  $N_m^{(t_0)}(f)$ , correspond à la réponse en fréquence d'un filtre passe bas idéal de largeur de bande égale à  $1/2T$ , physiquement irréalisable.

## Filtre en cosinus surélevé

---

On considère maintenant une bande de fréquence supérieure à  $[-1/2T, 1/2T]$ . Il existe des fonctions qui vérifient le critère de Nyquist.

Une solution retenue dans les équipements de transmission, est la fonction  $CS_\alpha(f)$ , appelée filtre en cosinus surélevé:

$$CS_\alpha(f) = \begin{cases} T & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{T}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\pi T}{\alpha} \left( \frac{1}{2T} - |f| \right) \right] & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

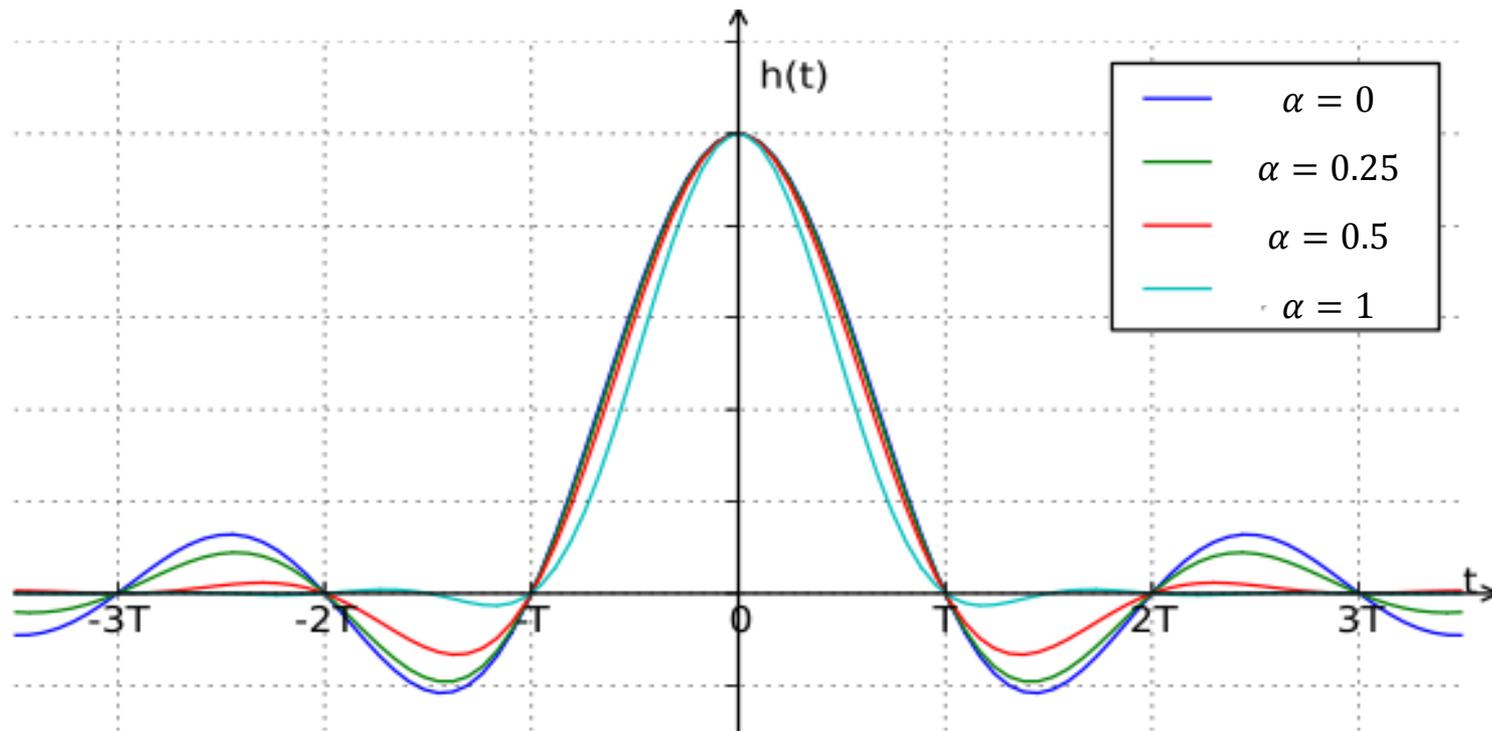
Où  $\alpha$ , appelé coefficient de retombée (roll-off factor), compris entre  $[0,1]$ . *La largeur de bande est donnée par:*

$$B = \left[ -\frac{(1+\alpha)}{2T}, \frac{(1+\alpha)}{2T} \right]$$

## Filtre en cosinus surélevé

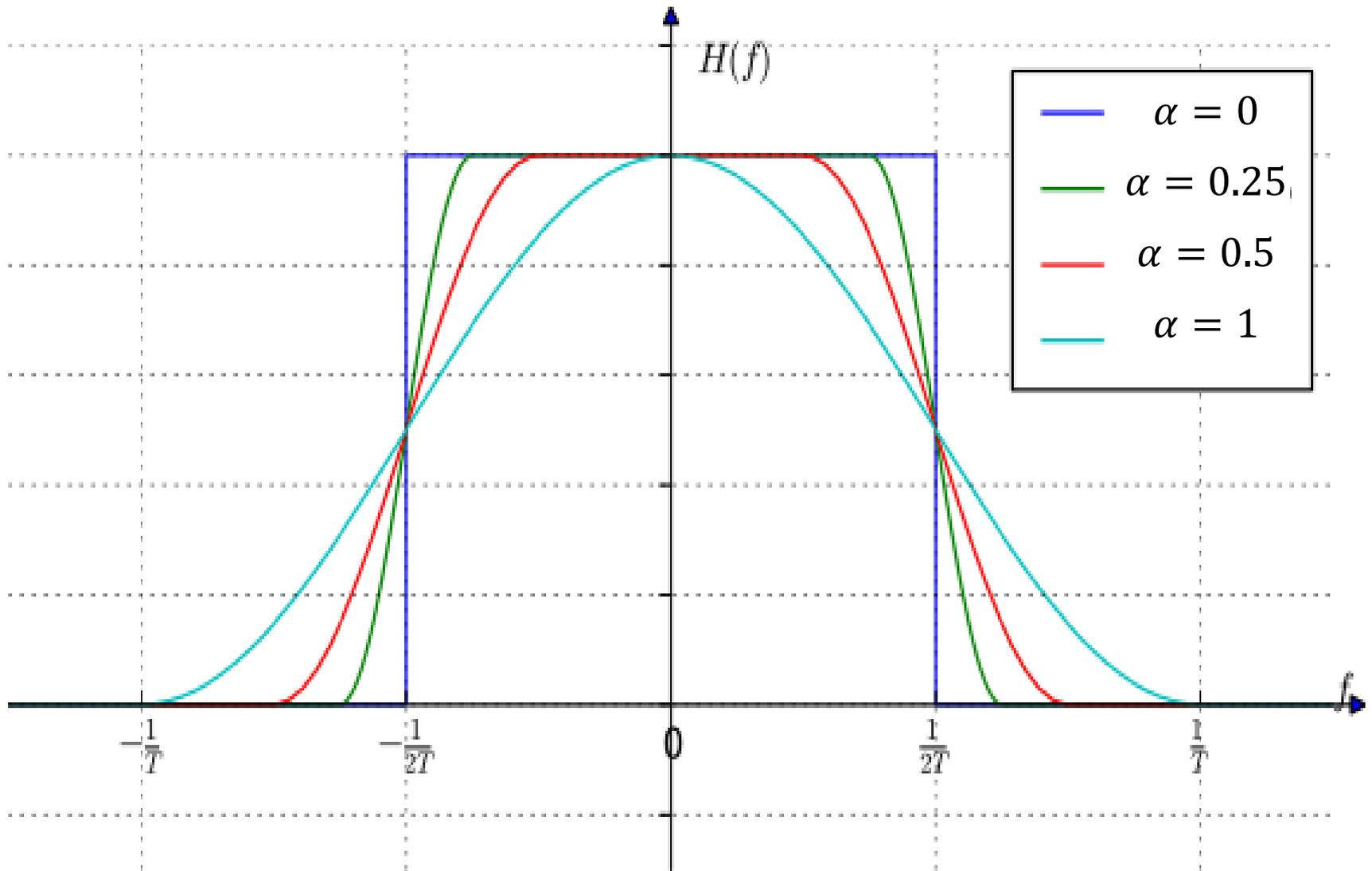
La réponse impulsionnelle correspondante:

$$cS_{\alpha}(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}} \frac{\cos\left(\frac{\pi \alpha t}{T}\right)}{1 - 4\alpha^2 \frac{t^2}{T^2}}$$



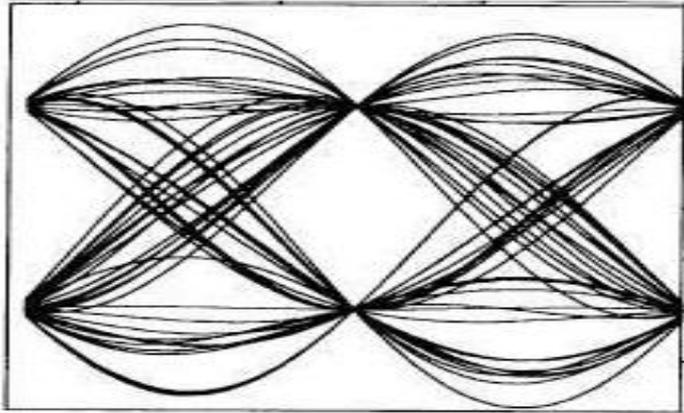
Réponse impulsionnelle du filtre en cosinus surélevé pour différentes valeurs de  $\alpha$

# Filtre en cosinus surélevé

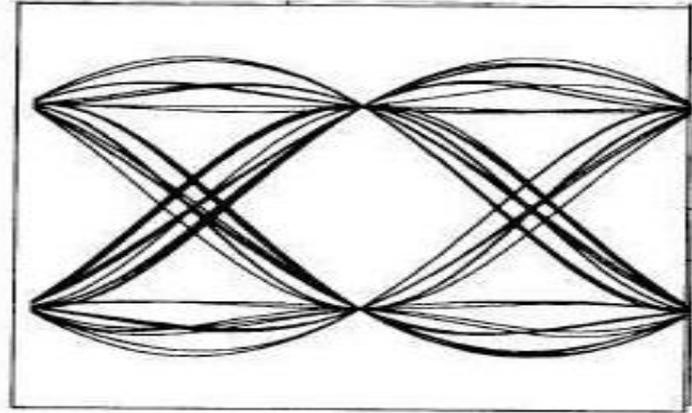


Réponse en amplitude du filtre en cosinus surélevé pour différentes valeurs de  $\alpha$

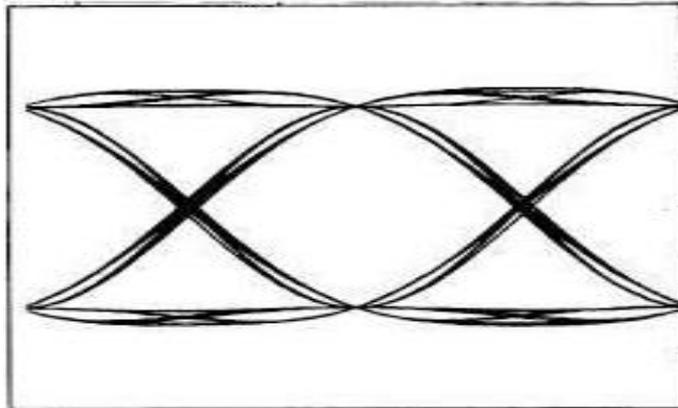
## Filtre en cosinus surélevé



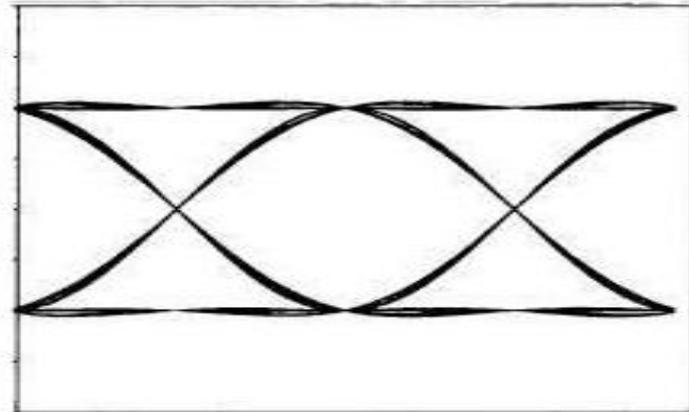
$\alpha = 0.2$



$\alpha = 0.5$



$\alpha = 0.8$

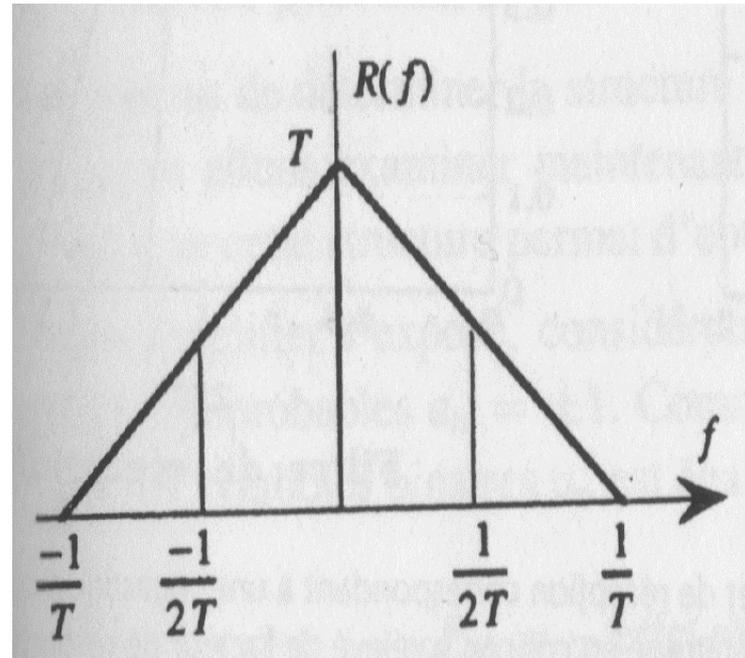
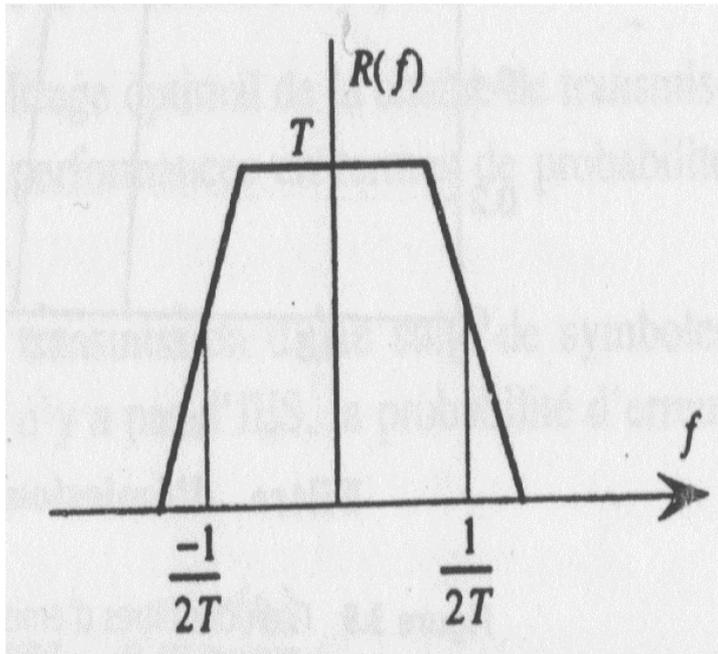


$\alpha = 1$

Diagramme de l'œil associé à un code en ligne à symboles  $[-1,1]$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  (Après filtrage en cosinus surélevé).

## Filtre en cosinus surélevé

Le filtre en cosinus surélevé n'est pas la seule solution qui satisfasse le critère Nyquist. On représente dans les deux figures suivantes deux exemples de filtres qui peuvent être utilisés pour garantir une IES nulle aux instants de décision,



Deux filtres vérifiant le critère de Nyquist

# Répartition optimale du filtrage entre l'émission et la réception

---

En l'absence d'IES, c.-à-d. lorsque la réponse en fréquence  $R^{(t_0)}(f)$  vérifie le critère de Nyquist, la sortie du filtre de réception  $y(t_0+nT)$  à l'instant  $t_0+nT$  dépend du seul symbole  $a_n$  et du bruit.

$$y(t_0 + nT) = a_n r(t_0) + b(t_0 + nT)$$

Pour des symboles M-aires  $a_n$ , à valeurs équiprobables dans l'alphabet A, les seuils de décision optimaux  $S_\rho$  sont donc inchangés et ainsi la probabilité d'erreur sur les symboles  $a_n$  est égale à:

$$P_e = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc}(\rho)$$
$$\rho = \frac{r(t_0)}{\sigma\sqrt{2}}$$

# Répartition optimale du filtrage entre l'émission et la réception

---

- Pour minimiser la probabilité d'erreur  $P_e$ , il faut maximiser  $\rho$ .
- $\rho$  est maximal si le filtre de réception est adapté à la forme d'onde reçue  $h_e(t)$  soit:  $g_r(t) = Kh_e(t_0 - t)$ ,  
Avec  $K$  est une constante réelle positive et  $h_e(t)$  est le résultat de filtrage de la forme d'onde  $h(t)$  avec le filtre d'émission  $g_e(t)$  :
- $$h_e(t) = h(t) * g_e(t).$$

La réponse en fréquence  $G_r(f)$  du filtre de réception est:

$$G_r(f) = KH_e^*(f)e^{-j2\pi ft_0} \quad (a)$$

Ce résultat n'est bien entendu valable que sous la contrainte d'une **IES** nulle aux instant de décision, ce qui s'écrit:

$$H_e(f)G_r(f) = R(f) \quad (b)$$

Où  $R(f)$  désigne la TF d'une forme d'onde ne présentant pas d'**IES**

$$R(f) = r(t_0)N_y^{(t_0)}(f)e^{-j2\pi ft_0}.$$

$N_y^{(t_0)}(f)$  est une fonction satisfaisant au critère de Nyquist.

# Répartition optimale du filtrage entre l'émission et la réception

Les solutions des équations (a) et (b) (qui expriment respectivement les deux conditions d'optimalité: puissance de bruit minimale et IES nulle) sont données somme suit:

1- Le gain (module de la réponse en fréquence) du filtre de réception est alors égale à:

$$|G_r(f)| = \sqrt{K} \cdot \sqrt{|R(f)|}$$

2- Celui du filtre  $H_e(f)$  est donné par :

$$|H_e(f)| = \frac{|R(f)|}{|G_r(f)|} = \frac{|R(f)|}{\sqrt{K} \cdot \sqrt{|R(f)|}} = \frac{1}{\sqrt{K}} \sqrt{|R(f)|}$$

Les relation précédentes ne déterminent que les gains des filtres d'émission et de réception; ces filtres ne sont pas donc définie qu'à une phase arbitraire  $\psi(f)$  près. La répartition optimale du filtrage entre l'émission et la réception devient donc finalement :

$$G_r(f) = \sqrt{K} \cdot \sqrt{r(t_0) N_y^{(t_0)}(f)} e^{-j\psi(f)}$$

$$G_e(f) = \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{\sqrt{r(t_0) N_y^{(t_0)}(f)}}{H(f)} \cdot e^{-j(2\pi f t_0 - \psi(f))}$$

# Répartition optimale du filtrage entre l'émission et la réception

---

Où  $\psi(f)$  est une phase arbitraire.

En général, on choisit pour la fonction  $N_y^{(t_0)}(f)$  un filtre en cosinus surélevé, soit:

$$|R(f)| = r(t_0)CS_\alpha(f)$$

Les relations finales de  $Ge(f)$  et  $Gr(f)$  montre que le filtrage de Nyquist  $R(f)$  doit être équiréparti en amplitude entre l'émission et la réception. Le terme  $H(f)$  qui apparaît au dénominateur de la réponse en fréquence du filtre d'émission « compense » la forme de l'impulsion  $h(t)$ . Autrement dit, le signal en sortie du filtre optimale ne dépend plus de l'impulsion  $h(t)$  qui caractérise le signal issu du codeur en ligne. Ce terme permet de « blanchir » le spectre du signal transmis.

## Expression de la probabilité d'erreur minimale

Considérons la transmission d'une suite de symboles binaires équiprobables  $a_n = \pm 1$ . comme il n'y a pas d'IES  $P_{eb}$  est donnée par:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\rho) \text{ Avec : } \rho = \frac{r(t_0)}{\sigma\sqrt{2}} \text{ et:}$$

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_r(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} K |R(f)| df$$

$$\text{Et en tenant compte du fait que: } r(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(f) e^{j2\pi ft_0} df$$

Le rapport  $\rho$  optimal est égale à:

$$\rho = \sqrt{\frac{r(t_0)}{KN_0}} \text{ et: } P_{eb} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}$$

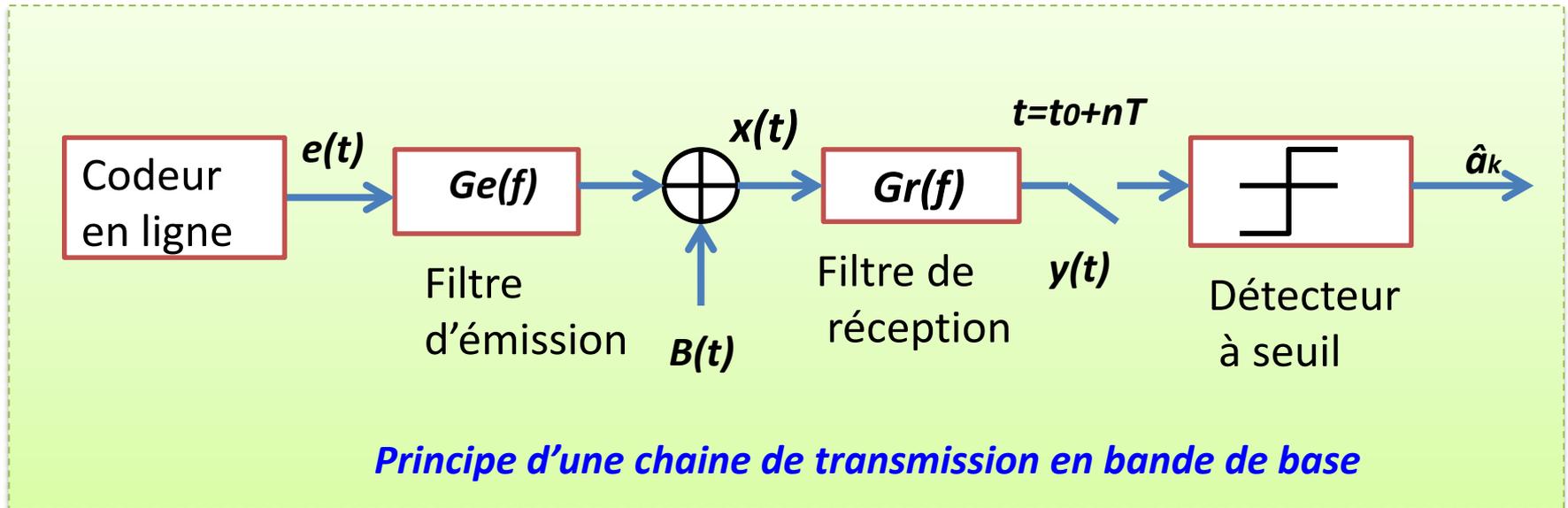
Ce résultat est valable pour le cas de la transmission M-aires

$$P_e = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc} \left( \frac{3}{M^2-1} \cdot \left( \frac{E_m}{N_0} \right) \right)$$

## Transmission en bande de base sur canal à bande limitée

Considérons la transmission d'une suite de symboles M-aires sur un canal à bande limité.

La limitation du canal est supposée due à la présence d'un filtre d'émission à la sortie du codeur en ligne



## Transmission en bande de base sur canal à bande limitée

---

- Le signal  $x(t)$  reçu par le récepteur est égal:

$$x(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT) + B(t)$$

Avec: 
$$h_e(t) = h(t) \otimes g_e(t)$$

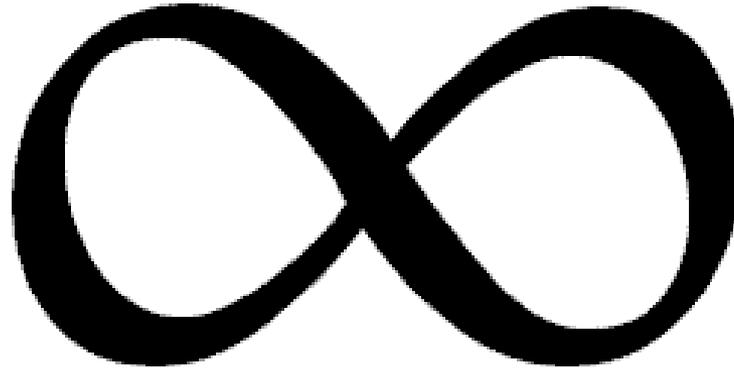
À l'instant  $t_0 + nT$  la sortie du filtre de réception est:

$$y(t_0 + nT) = \sum_k a_k r(t_0 + (n - k)T) + b(t_0 + nT)$$

Avec: 
$$r(t) = h_e(t) \otimes g_r(t)$$

$$b(t) = B(t) \otimes g_r(t)$$

Pour un canal à bande passante infinie:



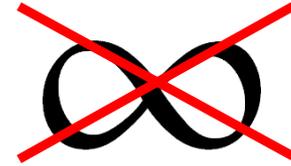
→ Chaque échantillon  $y(t_0+nT)$  dépend du seul symbole  $a_n$  et du bruit.

La minimisation de la probabilité d'erreur est réalisée par:

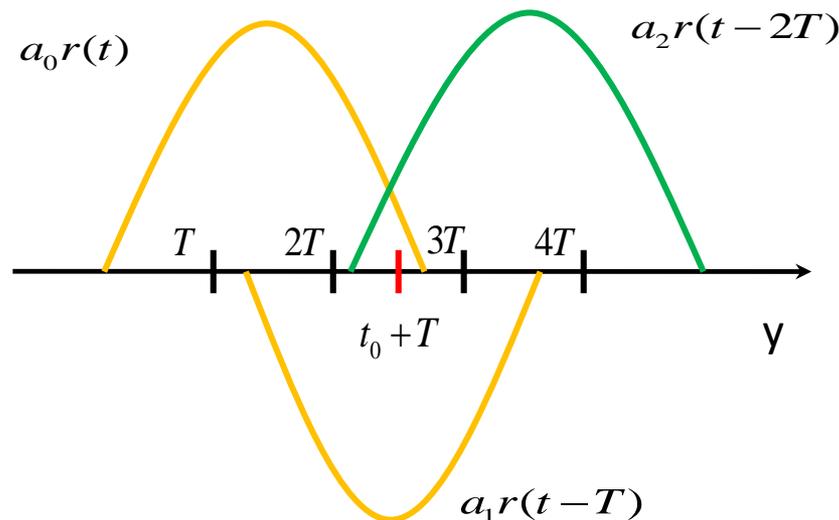
- L'utilisation d'un seuil de décision optimal;
- L'utilisation d'un filtre de réception adapté à la forme d'onde  $h(t)$  de durée  $T$ .

# Transmission en bande de base sur canal à bande limitée

## Pour un canal à bande passante Finie



→ L'échantillon  $y(t_0+nT)$  peut désormais dépendre du symbole  $a_n$ , mais aussi des symboles antérieurs, et même postérieurs, au symbole  $a_n$  si l'instant initial de décision  $t_0$  est supérieur à  $T$ . Cette situation est illustrée sur la figure suivante



À l'instant d'échantillonnage, le signal échantillonné ne dépend pas uniquement du symbole  $a_1$  mais aussi des symboles  $a_0$  et  $a_2$ ,

*Dépendance de  $a_n$ , par les symboles antérieurs et même postérieurs*

# Interférence entre symbole IES

→ L'échantillon  $y(t_0 + nT)$  est la somme de 03 termes:

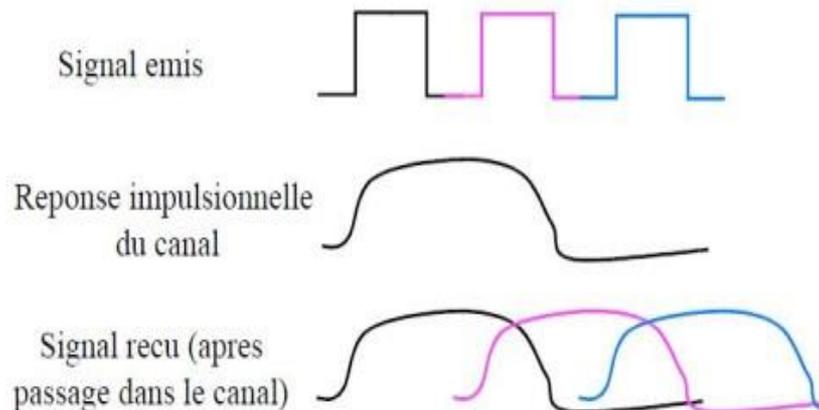
Le 1<sup>er</sup> terme dépend de  $a_n$ , le 2<sup>ème</sup> qui dépend des symboles  $a_{n-m}$  ( $m \neq 0$ ) est appelé terme de l'Interférence Entre Symbole (IES) et le 3<sup>ème</sup> représente le bruit.

$$y(t_0 + nT) = \underbrace{a_n r(t_0)}_{\text{Information utile}} + \underbrace{\sum_{m \neq 0} a_{n-m} r(t_0 + mT)}_{\text{IES}} + \underbrace{b(t_0 + nT)}_{\text{Bruit}}$$

Information utile

IES

Bruit



*Signal avant et après passage par le canal de transmission*

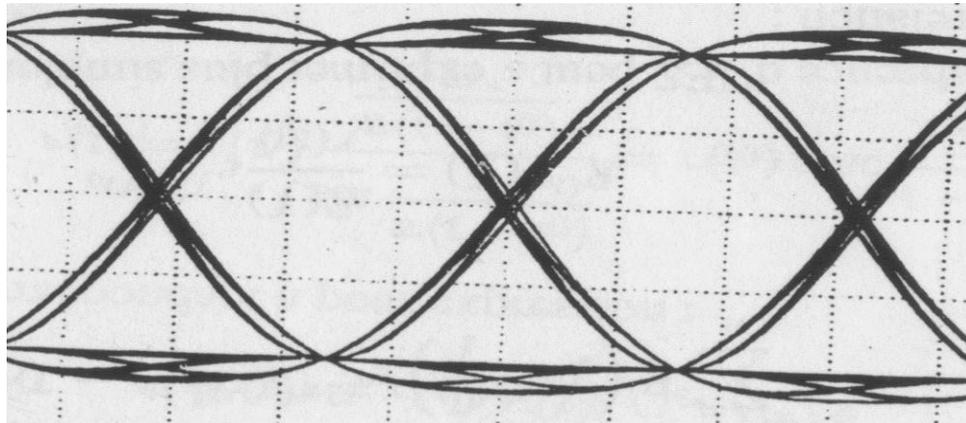
# Caractérisation de l'IES

---

On peut caractérisé l'IES par:

## 1- Le Diagramme de l'œil

- Il appelé ainsi par analogie avec la forme de l'œil humain;
- Il est obtenu en superposant toutes les traces du signal  $y(t)$ ;
- C'est une figure qui se répète tous les  $T$ ;
- Son analyse peut être limitée à un intervalle quelconque  $T$ .
- La figure suivante présente le diagramme de l'œil pour un code NRZ.

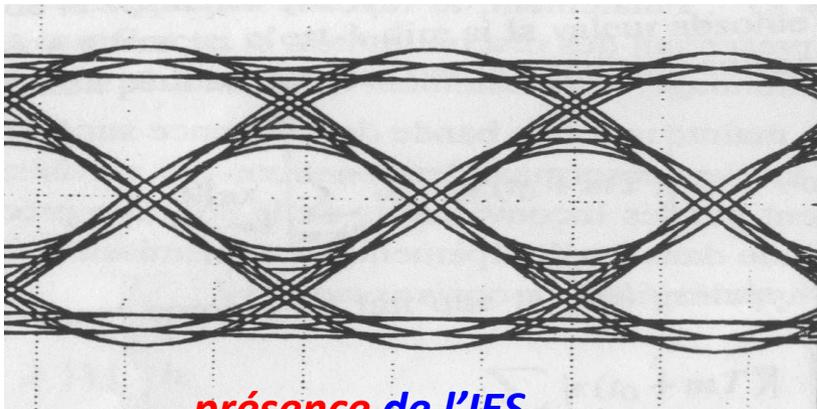


*Diagramme de l'œil associé à un code en ligne à symboles  $[-1,1]$  en l'absence de l'IES*

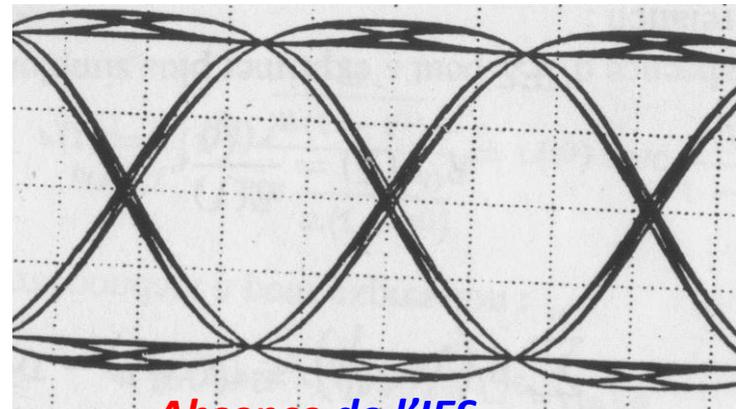
# Caractérisation de l'IES

## 1- Le Diagramme de l'œil - Suite

- En l'absence d'IES, toutes les traces passent par le même point à l'instant de décision  $t_0+nT$ .
- Plus le Diagramme de l'œil est ouvert à l'instant de décision et plus l'immunité contre le bruit est grande (Ouverture verticale).
- Plus l'ouverture horizontale du Diagramme de l'œil est importante et moins la transmission est sensible aux erreurs de positionnement de l'instant de décision.



*présence de l'IES*



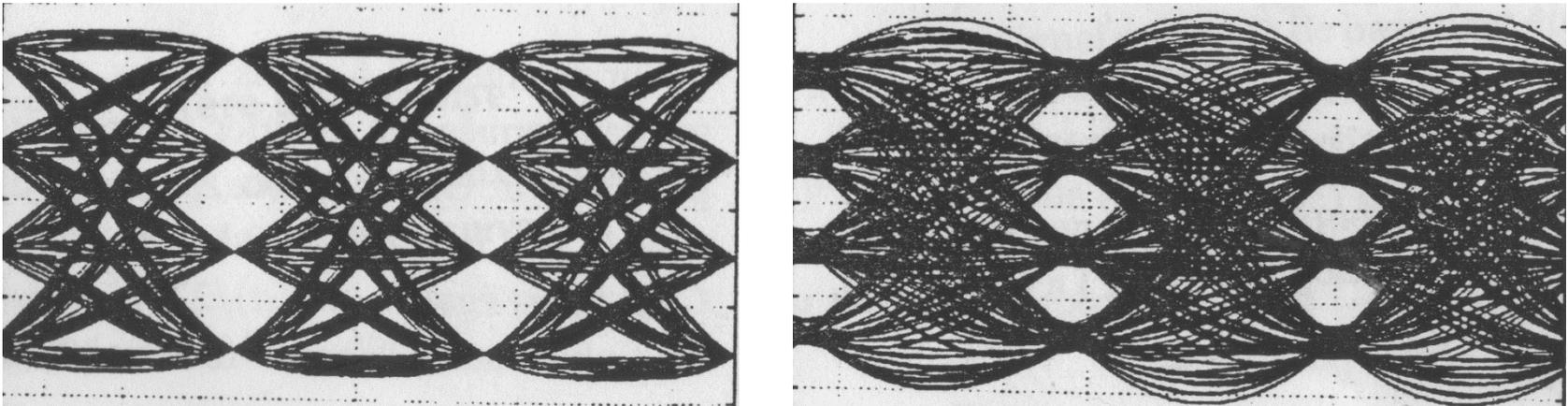
*Absence de l'IES*

*Diagramme de l'œil associé à un code en ligne à symboles [-1,1] en l'absence et en présence de l'IES*

# Caractérisation de l'IES

## 1- Le Diagramme de l'œil - Suite

→ Sur la figure suivante nous présentons un diagramme de l'œil pour un code en ligne à 4 niveaux sans et avec IES.



*Diagramme de l'œil associé à un code à 4 niveaux sans et avec IES*

Comme l'illustrent les deux figures, dans le cas de la présence d'IES, nous avons :

- Les différentes traces du signal ne passent pas par le même point à l'instant de décision  **$t_0+nT$** .
- L'IES contribue à la fermeture de l'œil .

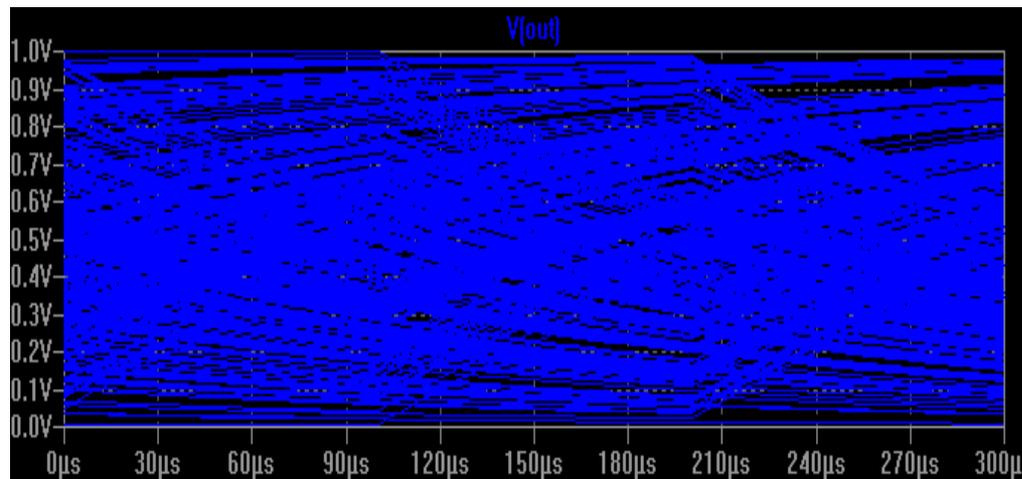
# Caractérisation de l'IES

## 2- Déviation maximale

- La présence de l'IES réduit l'ouverture verticale du diagramme de l'œil est provoqué des erreurs de décision même en l'absence du bruit.
- Pour une transmission M-aires, la distorsion maximale du diagramme de l'œil est:

$$D_{max} = (M - 1) \frac{\sum_{m \neq 0} |r(t_0 + mT)|}{|r(t_0)|} \geq 1$$

- Lorsque  $D_{max} > 1$  → le diagramme de l'œil est complètement fermé aux instants de décision  $t_0 + nT$ .
- Pour réaliser une communication numérique, il faut que:  $D_{max} < 1$ .



*Diagramme de l'œil fermé  $D_{max} > 1$*

# Absence de l'IES

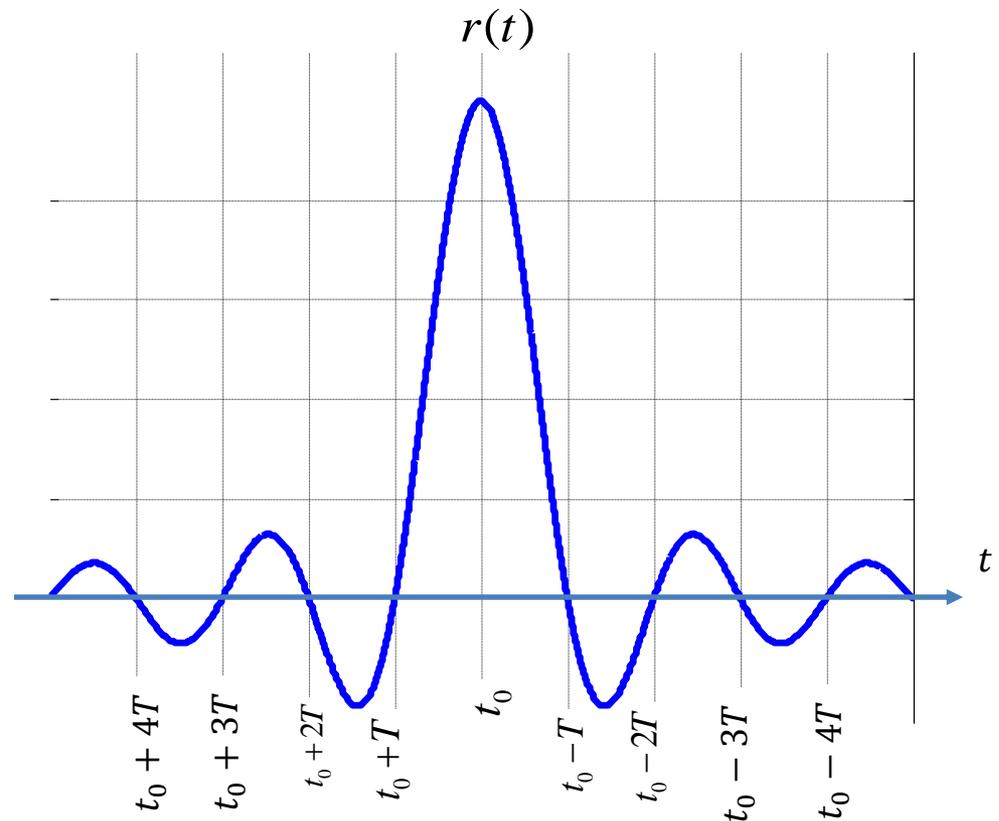
## Condition d'absence D'IES - Critère de Nyquist:

L'absence d'IES aux instants de décision  $(t_0+nT)$ , impose que l'impulsion  $r(t)$  vérifie la condition suivante:

$$r(t_0 + nT) = \begin{cases} r(t_0); & n = 0 \\ 0 & ; n \neq 0 \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

→ L'impulsion  $r(t)$  peut être de durée et de forme quelconque, mais tous ces échantillons aux instants  $(t_0+nT)$  doivent être nuls.

→ Comme cette impulsion est le résultat d'un filtrage, il est intéressant de voir comment cette condition se traduit sur sa transformée de Fourier  $R(f)$ .



## Absence de l'IES

→ Le signal échantillonné  $r_e(t)$  est défini par :

→ Il a comme transformée de Fourier  $R_e(f)$ :

→ Le signal échantillonné  $r_e(t)$  peut encore s'écrire:

→ Sa transformée de Fourier  $R_e(f)$  peut maintenant s'exprimer en fonction des échantillons  $r(t_0+nT)$

En égalant les deux expressions de  $R_e(f)$  et en tenant de la condition d'absence d'IES précédente on obtient:

La condition d'absence d'IES peut s'exprimer par:

$$\sum_n R^{(t_0)}\left(f - \frac{n}{T}\right) = T$$

$$R^{(t_0)}(f) = \frac{R(f)}{r(t_0)} e^{j2\pi f t_0}$$

$$r_e(t) = r(t) \sum_n \delta(t - t_0 - nT)$$

$$R_e(f) = \frac{1}{T} \sum_n R\left(f - \frac{n}{T}\right) e^{j2\pi n \frac{t_0}{T}}$$

$$r_e(t) = \sum_n r(t_0 + nT) \delta(t - t_0 - nT)$$

$$R_e(f) = \sum_n r(t_0 - nT) \cdot e^{-j2\pi f (t_0 - nT)}$$

$$\sum_n R\left(f - \frac{n}{T}\right) e^{j2\pi\left(f - \frac{n}{T}\right)t_0} = T \cdot r(t_0)$$

## Absence de l'IES

---

- Cette condition est appelée critère de Nyquist;
- Toutes les fonctions  $R^{(t_0)}(f)$  qui satisfont cette condition, vérifient le critère de Nyquist.
- Si la fonction occupe une bande de fréquence inférieure à  $1/2T$ , elle ne peut vérifier le critère de Nyquist.
- Pratiquement, cela signifie qu'on ne peut pas transmettre sans IES un signal de rapidité de modulation  $R=1/T$  dans une bande inférieure à  $1/2T$ .
- La fonction  $R^{(t_0)}(f)$ , de largeur de bande minimale (notée  $N_m^{(t_0)}(f)$ ), qui assure une IES nulle est donc égale à:

$$N_m^{(t_0)}(f) = \begin{cases} T & \forall |f| \leq \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

## Absence de l'IES

---

Cette fonction occupe une bande égale à  $1/2T$  Hz (si on raisonne sur les fréquences positives uniquement). Cette bande est appelée bande de Nyquist. La fonction  $R(f)$  est alors égale à :

$$R(f) = r(t_0) N_m^{(t_0)}(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

Et le signal  $r(t)$  correspondant a pour expression :

$$r(t) = r(t_0) \frac{\sin \frac{\pi(t-t_0)}{T}}{\frac{\pi(t-t_0)}{T}} = r(t_0) \operatorname{sinc} \frac{\pi(t-t_0)}{T}$$

La fonction  $N_m^{(t_0)}(f)$ , correspond à la réponse en fréquence d'un filtre passe bas idéal de largeur de bande égale à  $1/2T$ , physiquement irréalisable.

## Filtre en cosinus surélevé

---

On considère maintenant une bande de fréquence supérieure à  $[-1/2T, 1/2T]$ . Il existe des fonctions qui vérifient le critère de Nyquist.

Une solution retenue dans les équipements de transmission, est la fonction  $CS_\alpha(f)$ , appelée filtre en cosinus surélevé:

$$CS_\alpha(f) = \begin{cases} T & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{T}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\pi T}{\alpha} \left( \frac{1}{2T} - |f| \right) \right] & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

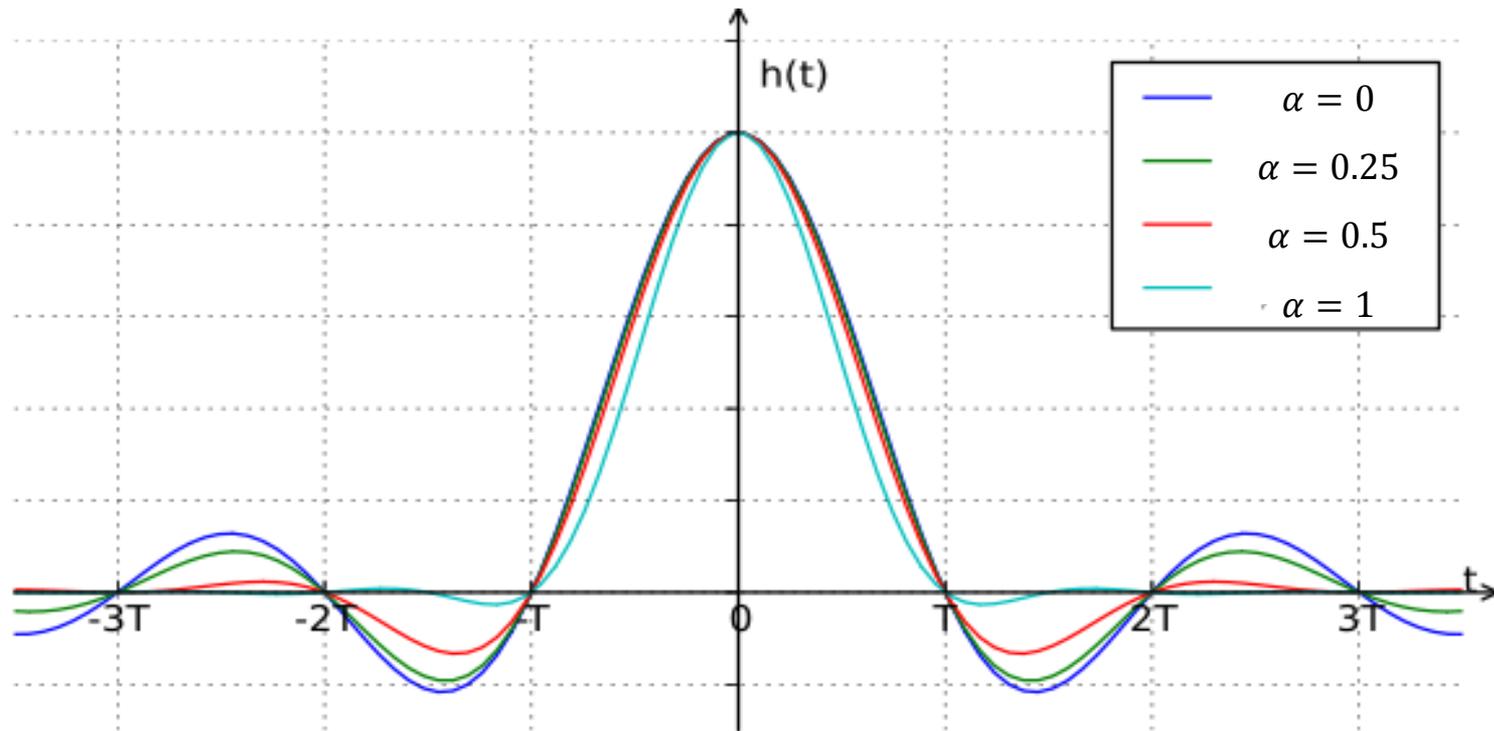
Où  $\alpha$ , appelé coefficient de retombée (roll-off factor), compris entre  $[0,1]$ . *La largeur de bande est donnée par:*

$$B = \left[ -\frac{(1+\alpha)}{2T}, \frac{(1+\alpha)}{2T} \right]$$

## Filtre en cosinus surélevé

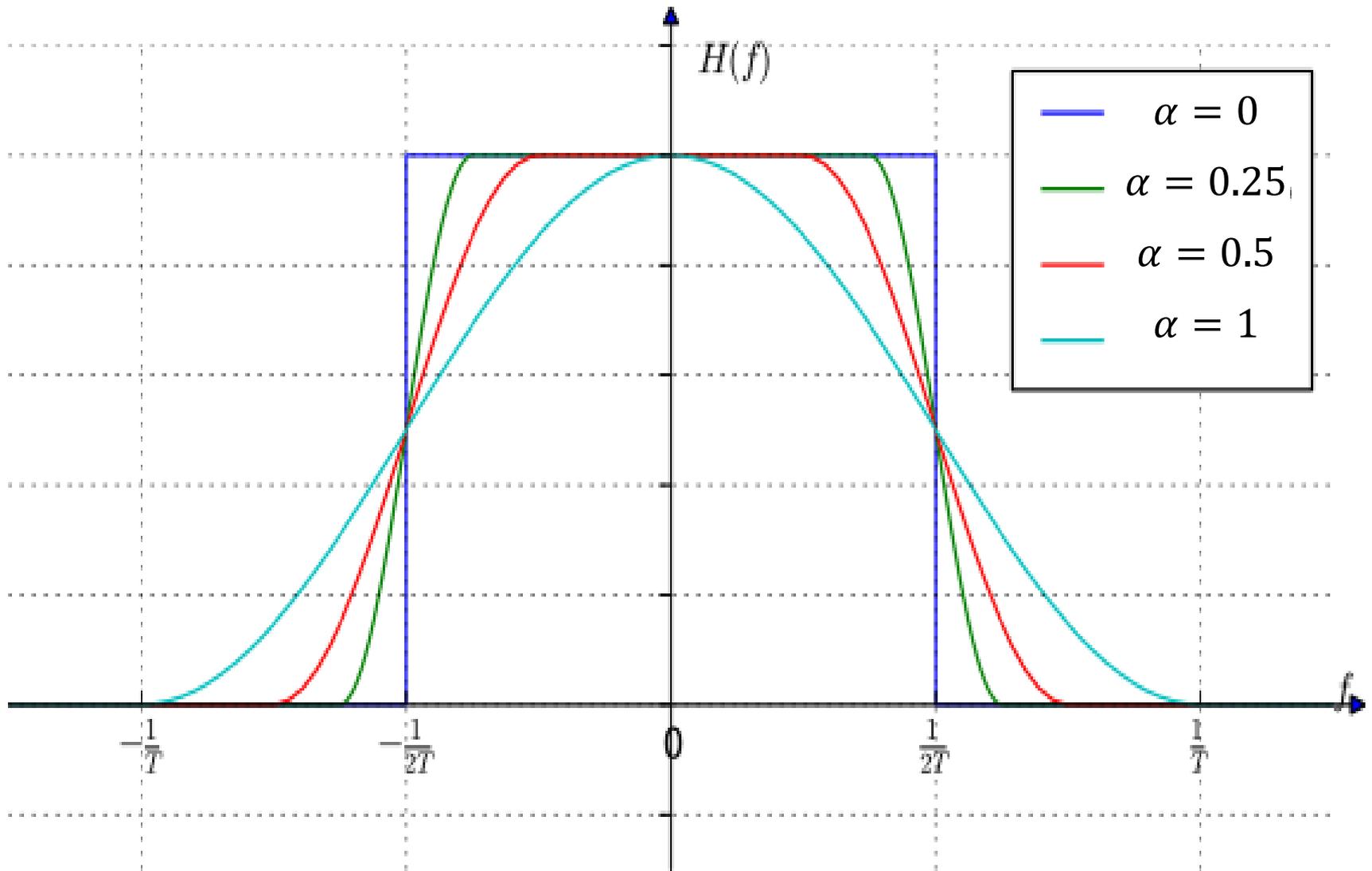
La réponse impulsionnelle correspondante:

$$cS_{\alpha}(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}} \frac{\cos\left(\frac{\pi \alpha t}{T}\right)}{1 - 4\alpha^2 \frac{t^2}{T^2}}$$



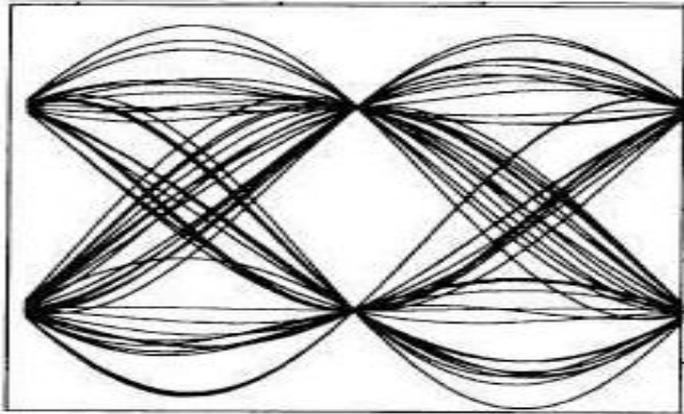
Réponse impulsionnelle du filtre en cosinus surélevé pour différentes valeurs de  $\alpha$

# Filtre en cosinus surélevé

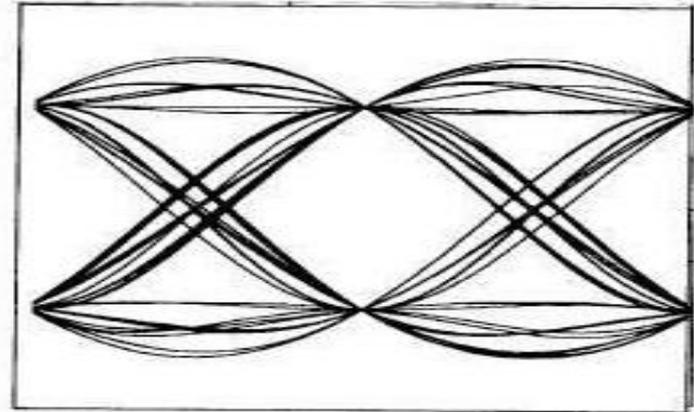


Réponse en amplitude du filtre en cosinus surélevé pour différentes valeurs de  $\alpha$

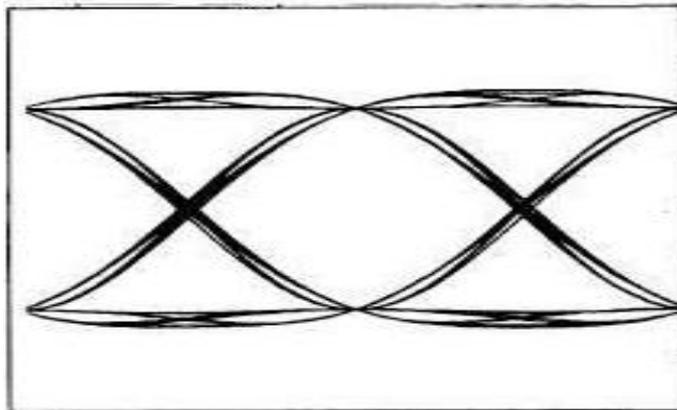
## Filtre en cosinus surélevé



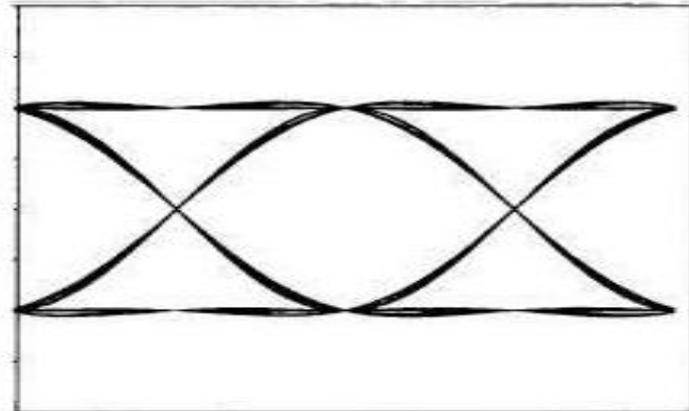
$\alpha = 0.2$



$\alpha = 0.5$



$\alpha = 0.8$

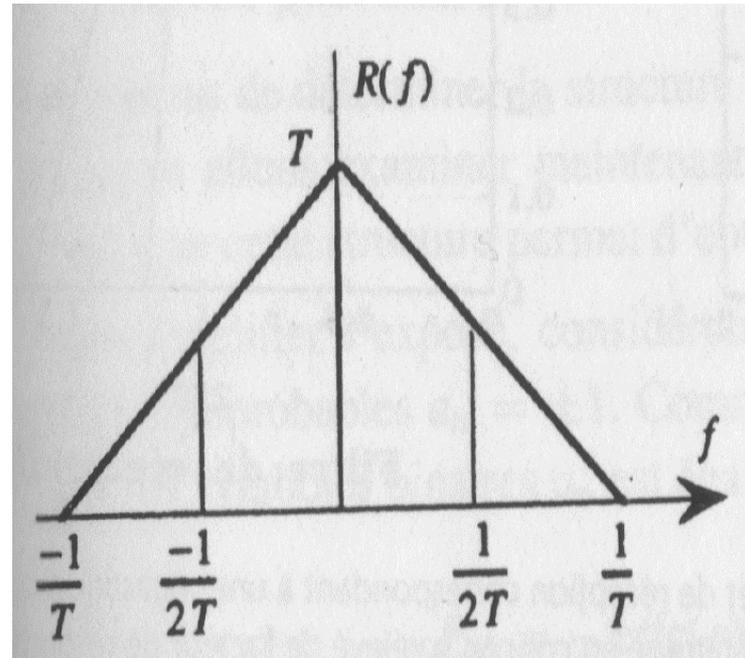
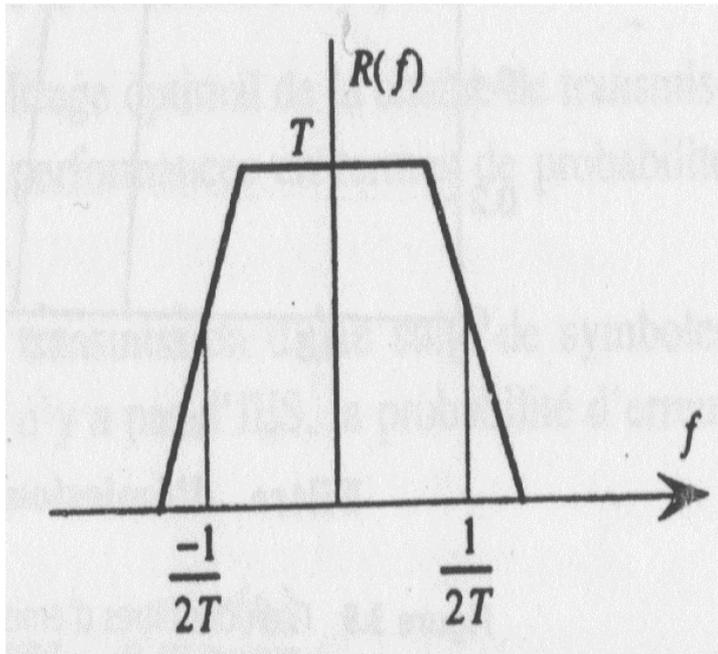


$\alpha = 1$

Diagramme de l'œil associé à un code en ligne à symboles  $[-1,1]$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  (Après filtrage en cosinus surélevé).

## Filtre en cosinus surélevé

Le filtre en cosinus surélevé n'est pas la seule solution qui satisfasse le critère Nyquist. On représente dans les deux figures suivantes deux exemples de filtres qui peuvent être utilisés pour garantir une IES nulle aux instants de décision,



Deux filtres vérifiant le critère de Nyquist

# Répartition optimale du filtrage entre l'émission et la réception

---

En l'absence d'IES, c.-à-d. lorsque la réponse en fréquence  $R^{(t_0)}(f)$  vérifie le critère de Nyquist, la sortie du filtre de réception  $y(t_0+nT)$  à l'instant  $t_0+nT$  dépend du seul symbole  $a_n$  et du bruit.

$$y(t_0 + nT) = a_n r(t_0) + b(t_0 + nT)$$

Pour des symboles M-aires  $a_n$ , à valeurs équiprobables dans l'alphabet A, les seuils de décision optimaux  $S_\rho$  sont donc inchangés et ainsi la probabilité d'erreur sur les symboles  $a_n$  est égale à:

$$P_e = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc}(\rho)$$
$$\rho = \frac{r(t_0)}{\sigma\sqrt{2}}$$

# Répartition optimale du filtrage entre l'émission et la réception

---

→ Pour minimiser la probabilité d'erreur  $P_e$ , il faut maximiser  $\rho$ .

→  $\rho$  est maximal si le filtre de réception est adapté à la forme d'onde reçue  $h_e(t)$  soit:  $g_r(t) = Kh_e(t_0 - t)$ ,

Avec  $k$  est une constante réelle positive et  $h_e(t)$  est le résultat de filtrage de forme d'onde  $h(t)$  avec le filtre d'émission  $g_e(t)$  :

$$h_e(t) = h(t) * g_e(t).$$

La réponse en fréquence  $G_r(f)$  du filtre de réception est:

$$G_r(f) = KH_e^*(f)e^{-j2\pi f t_0} \quad (a)$$

Ce résultat n'est bien entendu valable que sous la contrainte d'une **IES** nulle aux instant de décision, ce qui s'écrit:

$$H_e(f)G_r(f) = R(f) \quad (b)$$

Où  $R(f)$  désigne la TF d'une forme d'onde ne présentant pas d'**IES**

$$R(f) = r(t_0)N_y^{(t_0)}(f)e^{-j2\pi f t_0}.$$

$N_y^{(t_0)}(f)$  est une fonction satisfaisant le critère de Nyquist.

# Répartition optimale du filtrage entre l'émission et la réception

---

En exprimant maintenant la fonction  $H_e^*(f)$  à partir de la contrainte (b) :

$$H_e^*(f) = \frac{R^*(f)}{G_r^*(f)}$$

L'expression du module de  $G_r(f)$ , à partir de (a) devient:

$$|G_r(f)|^2 = KR^*(f)e^{-j2\pi ft_0} = Kr(t_0) \left[ N_y^{(t_0)}(f) \right]^*$$

On constate sur cette relation que les équations (a) et (b) (qui expriment respectivement les deux conditions d'optimalité: puissance de bruit minimale et IES nulle) n'ont de solution que si  $N_y^{(t_0)}(f)$  est réelle et positif, c.-à-d. que si  $R(f)$  a une phase linéaire et égale à  $-2\pi ft_0$ , soit:

$$R(f) = |R(f)| e^{-j2\pi ft_0}$$

$$|R(f)| = r(t_0) N_y^{(t_0)}(f)$$

# Répartition optimale du filtrage entre l'émission et la réception

---

Le gain (module de la réponse en fréquence) du filtre de réception est alors égale à :

$$|G_r(f)| = \sqrt{K} \cdot \sqrt{|R(f)|}$$

D'où l'on déduit celui du filtre  $H_e(f)$  :

$$|H_e(f)| = \frac{|R(f)|}{|G_r(f)|} = \frac{|R(f)|}{\sqrt{K} \cdot \sqrt{|R(f)|}} = \frac{1}{\sqrt{K}} \sqrt{|R(f)|}$$

Les relations précédentes ne déterminent que les gains des filtres d'émission et de réception; ces filtres ne sont donc définies qu'à une phase arbitraire  $\psi(f)$  près. La répartition optimale du filtrage entre l'émission et la réception devient donc finalement :

$$G_r(f) = \sqrt{K} \cdot \sqrt{r(t_0) N_y^{(t_0)}(f)} e^{-j\psi(f)}$$

$$G_e(f) = \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{\sqrt{r(t_0) N_y^{(t_0)}(f)}}{H(f)} \cdot e^{-j(2\pi f t_0 - \psi(f))}$$

# Répartition optimale du filtrage entre l'émission et la réception

---

Où  $\psi(f)$  est une phase arbitraire.

En général, on choisit pour la fonction  $N_y^{(t_0)}(f)$  un filtre en cosinus surélevé, soit:

$$|R(f)| = r(t_0)CS_\alpha(f)$$

Les relations finales de  $Ge(f)$  et  $Gr(f)$  montre que le filtrage de Nyquist  $R(f)$  doit être équiréparti en amplitude entre l'émission et la réception. Le terme  $H(f)$  qui apparaît au dénominateur de la réponse en fréquence du filtre d'émission « compense » la forme de l'impulsion  $h(t)$ . Autrement dit, le signal en sortie du filtre optimale ne dépend plus de l'impulsion  $h(t)$  qui caractérise le signal issu du codeur en ligne. Ce terme permet de « blanchir » le spectre du signal transmis.

## Expression de la probabilité d'erreur minimale

Considérons la transmission d'une suite de symboles binaires équiprobables  $a_n = \pm 1$ . comme il n'y a pas d'IES  $P_{eb}$  est donnée par:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\rho) \text{ Avec : } \rho = \frac{r(t_0)}{\sigma\sqrt{2}} \text{ et:}$$

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_r(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} K |R(f)| df$$

$$\text{Et en tenant compte du fait que: } r(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(f) e^{j2\pi ft_0} df$$

Le rapport  $\rho$  optimal est égale à:

$$\rho = \sqrt{\frac{r(t_0)}{KN_0}} \text{ et: } P_{eb} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}$$

Ce résultat est valable pour le cas de la transmission M-aires

$$P_e = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc} \left( \frac{3}{M^2-1} \cdot \left( \frac{E_m}{N_0} \right) \right)$$