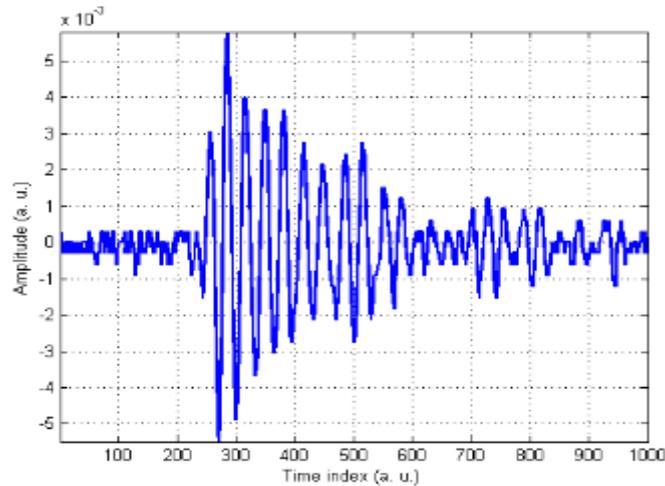
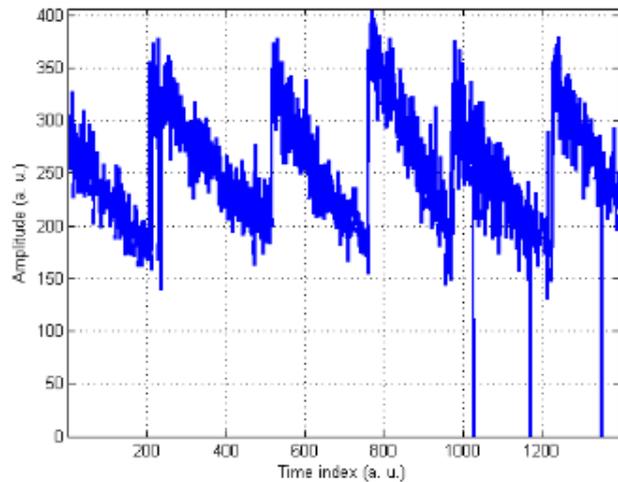
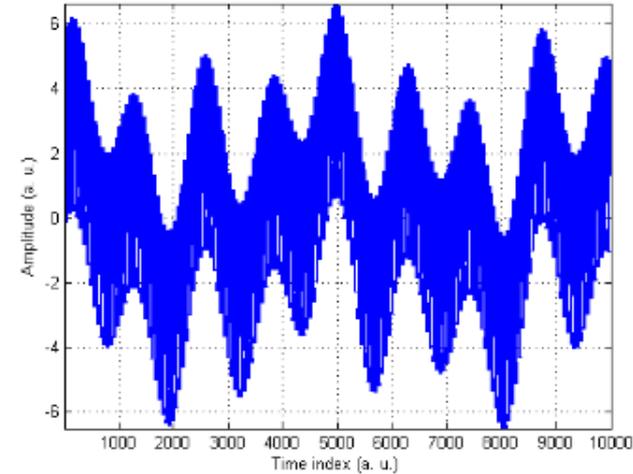
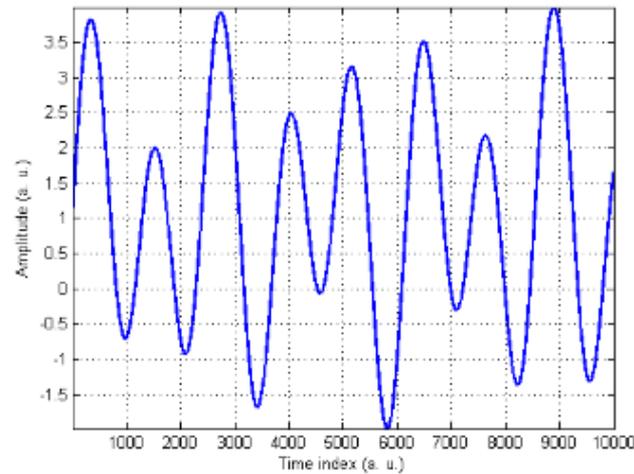
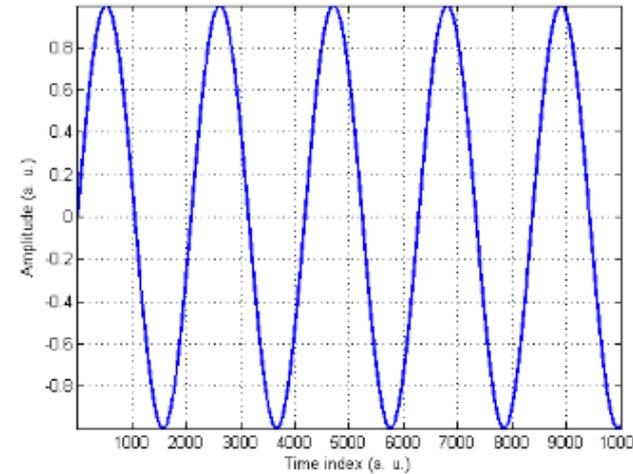


# **CHAPITRE 1**

## **Rappels sur les transformations discrètes**

# INTRODUCTION

*C'est quoi l'analyse spectrale?*

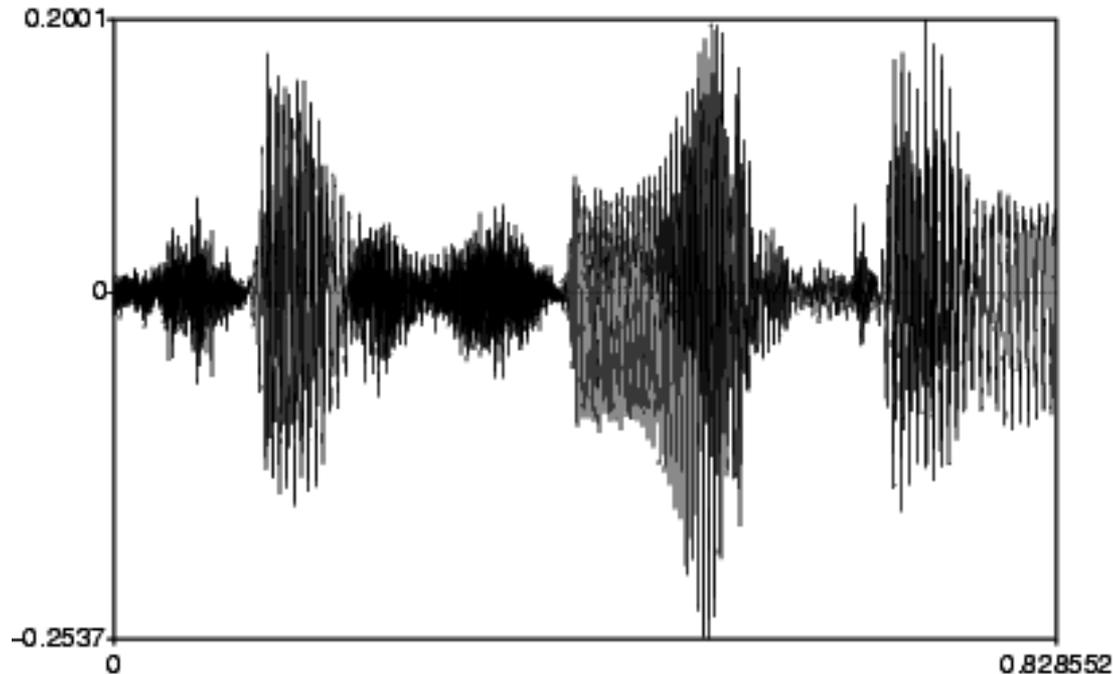


*Exemples de signaux*

*Peut-on interpréter et analyser ces signaux uniquement dans le domaine temporel?*

# INTRODUCTION

*C'est quoi l'analyse spectrale?*

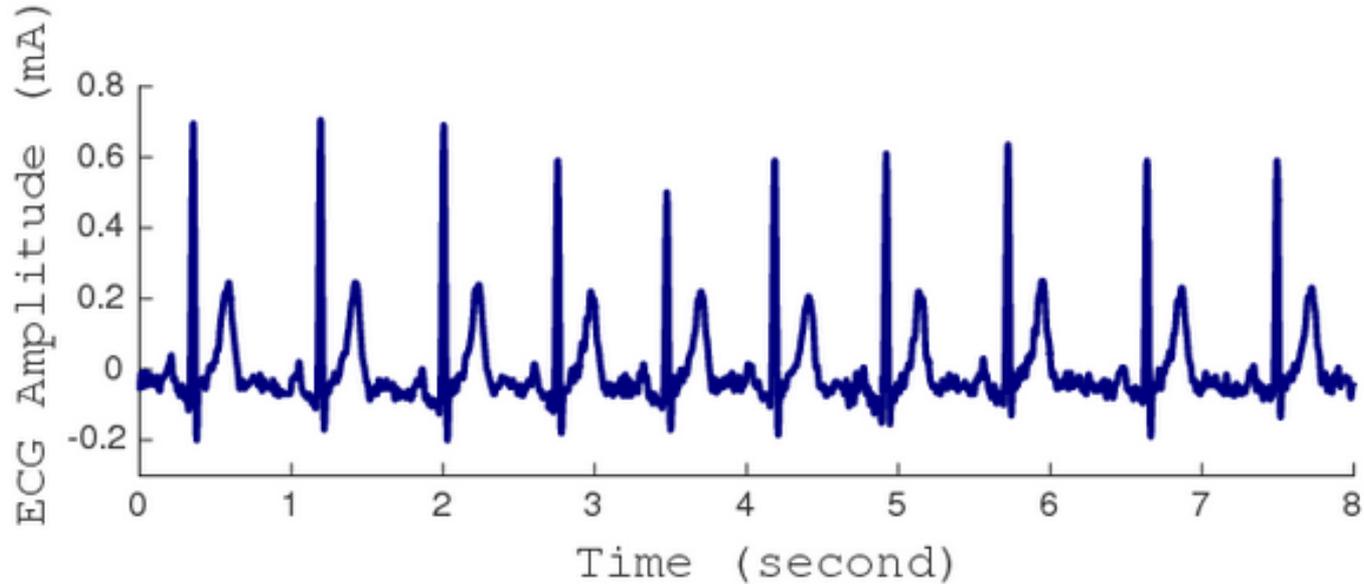


*Exemple d'un signal de parole du mot 'Samedi'*

*Peut on interpréter et analyser ce signal uniquement dans le domaine temporel?*

# ***INTRODUCTION***

*C'est quoi l'analyse spectrale?*

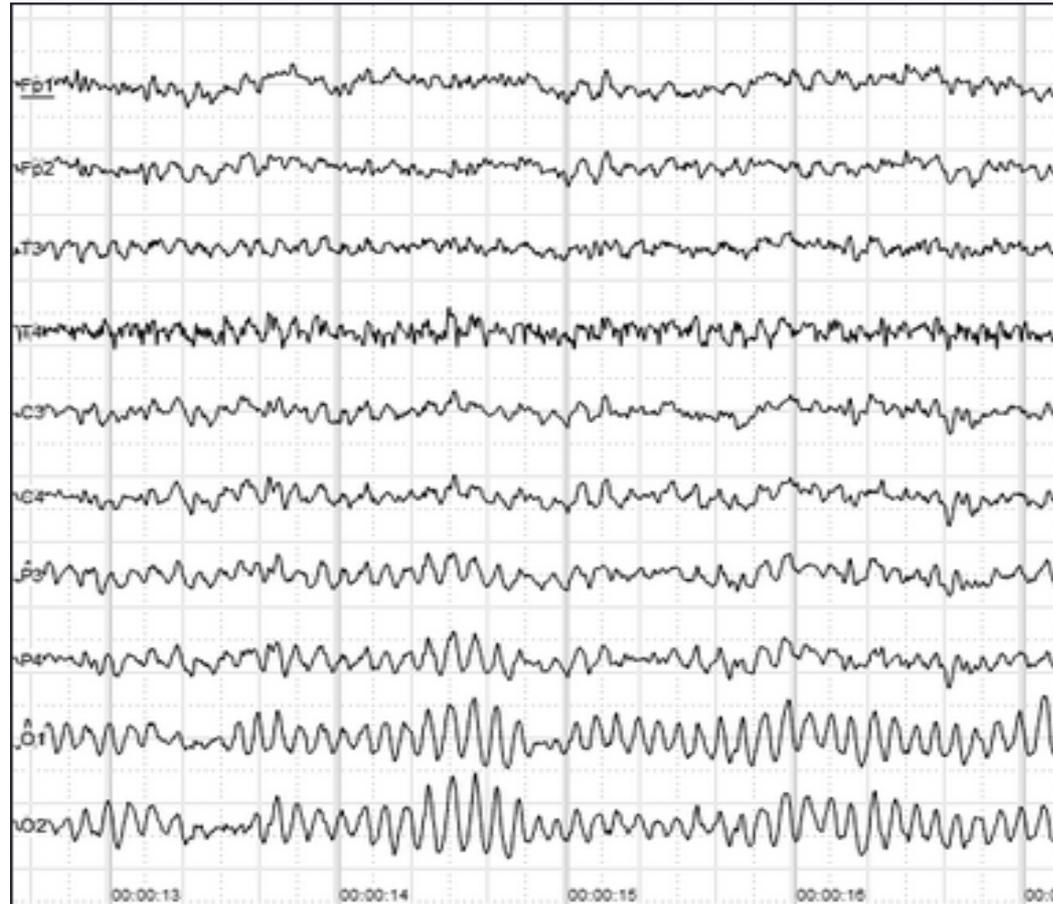


*Exemple d'un signal ECG*

***Peut on interpréter et analyser ce signal uniquement dans le domaine temporel?***

# *INTRODUCTION*

*C'est quoi l'analyse spectrale?*

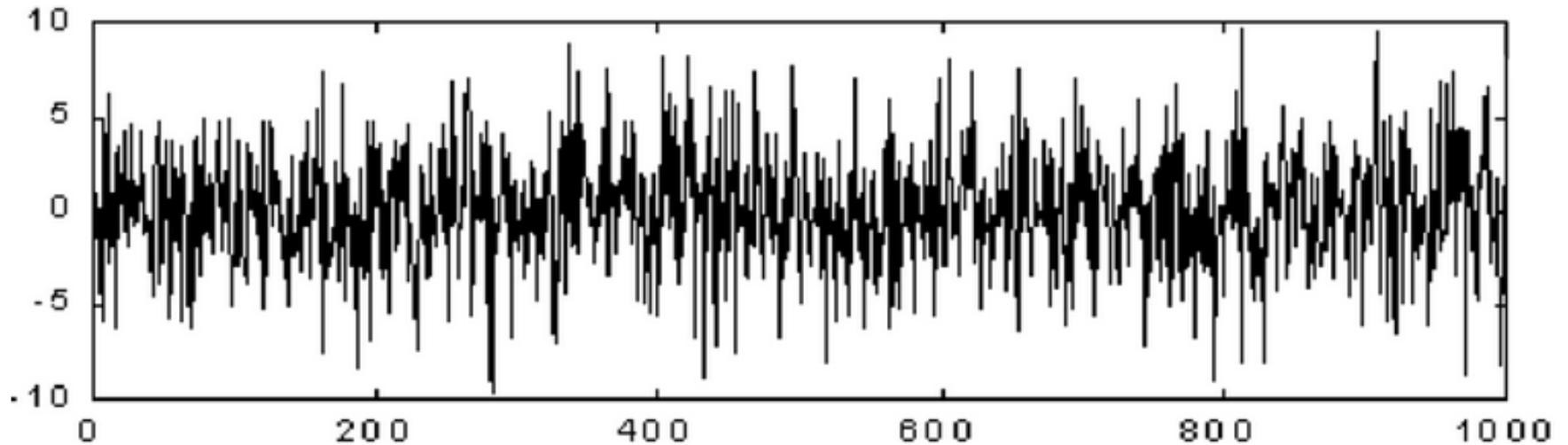


*Exemple d'un enregistrement EEG*

*Peut on interpréter et analyser ce signal uniquement dans le domaine temporel?*

# *INTRODUCTION*

*C'est quoi l'analyse spectrale?*



*Exemple d'un bruit blanc centré et Gaussien*

*Peut-on interpréter et analyser ce signal uniquement dans le domaine temporel?*

# ***INTRODUCTION***

*C'est quoi l'analyse spectrale?*



*Exemples d'images Barbara*

***Peut-on interpréter et analyser ces images uniquement dans le domaine spatial?***

# ***INTRODUCTION***

*C'est quoi l'analyse spectrale?*

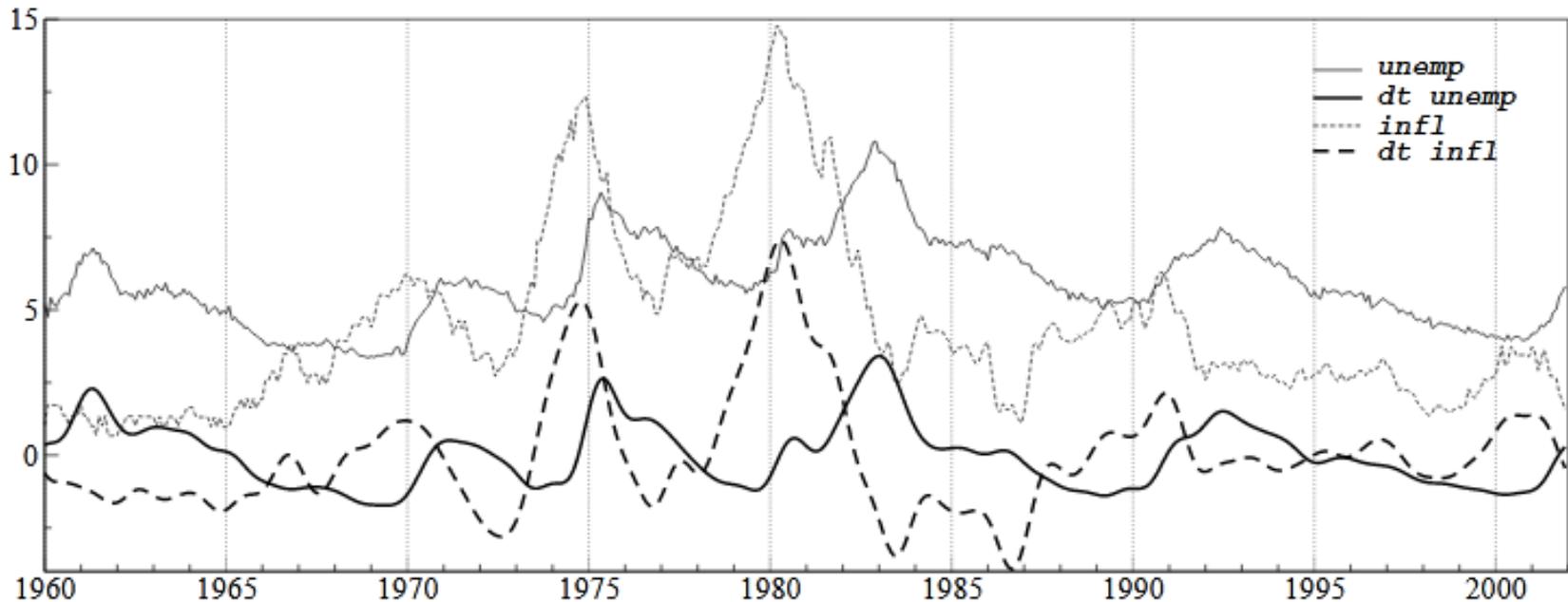


*Exemples d'images de texture*

***Peut on interpréter et analyser ces images uniquement dans le domaine spatial?***

# INTRODUCTION

## C'est quoi l'analyse spectrale?



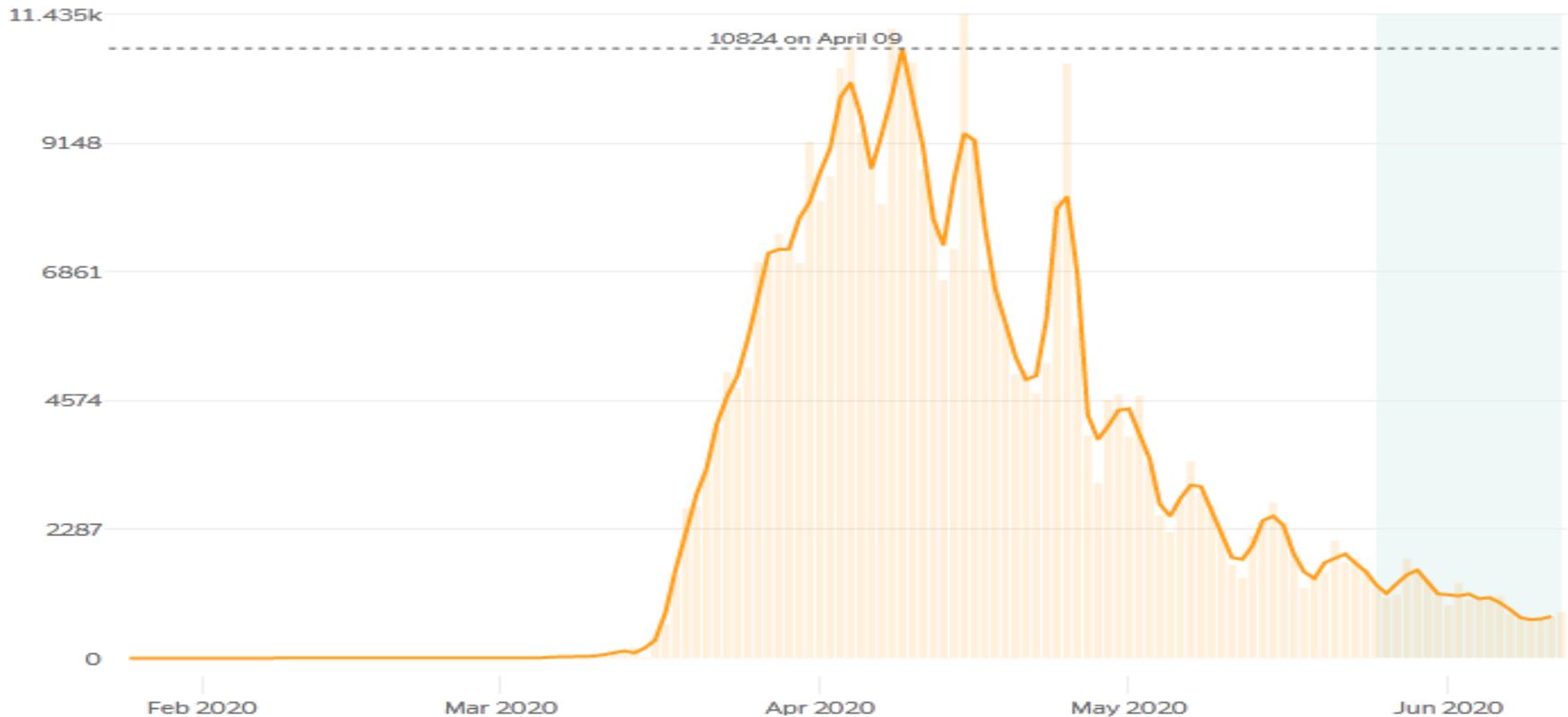
### Exemples de series temporelles économiques

*Ces courbes sont des données obtenues grâce à une étude économique sur l'inflation et le chômage. Elles représentent donc des séries brutes utilisées dans cette étude économique et celles détendues correspondantes: chômage (brut: ligne mince, détendu: ligne en gras) et l'inflation (brut: ligne fine en pointillés, détendu: ligne en pointillés épais). Les données sont mensuelles et couvrent la période Jan60-Dec01.*

*Peut on interpréter et analyser ces données économiques uniquement dans le domaine temporel? Que doit faire l'économiste*

# INTRODUCTION

*C'est quoi l'analyse spectrale?*



*Exemples de series temporelles d'épidémiologie*

*Peut-on interpréter et analyser ces données de la crise sanitaire due à la covid-19 à New York (nombre de gens contaminés par jour) uniquement dans le domaine temporel? Que doit faire l'épidémiologiste ?*

# INTRODUCTION

*C'est quoi l'analyse spectrale?*

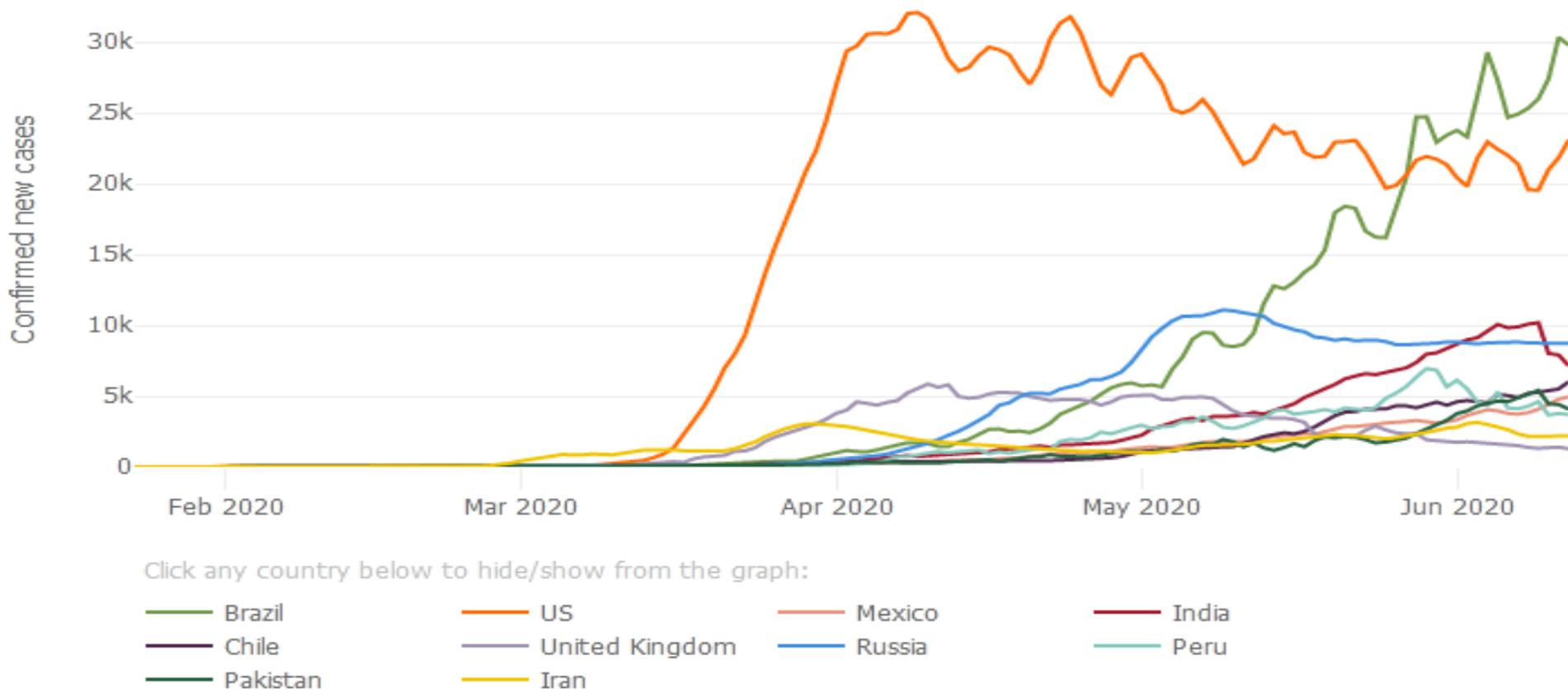


*Exemples de series temporelles d'épidémiologie*

*Peut on interpréter et analyser ces données de la crise sanitaire due à la covid-19 au Michigan (nombre de gens contaminés par jour) uniquement dans le domaine temporel? Que doit faire l'épidémiologiste?*

# INTRODUCTION

## C'est quoi l'analyse spectrale?



## Exemples de series temporelles d'épidémiologie

*Peut on interpréter et analyser ces données de la crise sanitaire due à la covid-19 dans différents pays (nombre de gens contaminés par jours) uniquement dans le domaine temporel? Que doit faire l'épidémiologiste?*

# INTRODUCTION

## C'est quoi l'analyse spectrale?

*C'est l'ensemble des méthodes permettant de mettre en évidence les composantes périodiques présentes dans un signal, une série de données, une courbe, une image ou même une vidéo.*

*Donc elle permet d'identifier le contenu spectral (ensemble des fréquences) présentes dans ces données traitées.*

## Pour quelles applications?

*Les données mesurées et/ou acquises (signal, images, vidéos données ....etc) doivent être traitées surtout numériquement (par exemple un filtrage, un débruitage, une extraction, une détection, une compression, une synthèse ....etc). Souvent il est plus intéressant d'effectuer ces traitements dans le domaine spectrale (dit domaine transformé) au lieu du domaine original dit direct (temporel, spatial, spatio-temporel ...etc)*

# ***INTRODUCTION***

*Quels sont les outils de base pour l'analyse spectrale?*

*Sans nul doute la transformée de Fourier ...!*

*Mais aussi bien d'autres transformées linéaires et surtout orthogonales.*

*D'ailleurs pourquoi on les appelle transformées linéaires et aussi orthogonales?*

# ***RAPPELS MATHÉMATIQUES***

## ***Combinaison linéaire***

*Souvent, au lieu de garder les signaux observés et acquis, que l'on note par exemple  $x(t)$ , sous leurs formes originales (sous forme de données mesurées) nous essayons de les représenter, ou les approcher (les approximer), sous forme d'une combinaison linéaire utilisant une base de fonction  $\phi_k(t)$  choisies préalablement. C'est ce que l'on appelle habituellement une représentation vectorielle des signaux*

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k(t)$$

*$\hat{x}(t)$  est l'approximation de  $x(t)$ ,  $N$  est l'ordre de la combinaison linéaires et les coefficients  $\alpha_k$  doivent être calculés pour une approximation optimale*

*C'est ce qui représente les fondements de base de l'analyse spectrale déterministe. Ceci doit donc nous permettre de représenter les signaux mesurés sous forme plus simples nous aidant à mieux les interpréter et les analyser*

# ***RAPPELS MATHÉMATIQUES***

## ***Notions de distance***

*Pour mesurer le degré de ressemblance ou de dissemblance entre  $x(t)$  et  $y(t)$  (ou sous forme discrète  $x_n$  et  $y_n$ ), deux signaux, deux vecteurs ou même deux séries de données on utilise la distance  $d(x,y)$ .*

*Il s'agit d'un scalaire réel, positif ou nul et vérifiant les propriétés suivantes :*

### **Nom**

### **Propriété**

**symétrie**

$$\mathbf{d(x , y) = d (y , x )}$$

**séparation**

$$\mathbf{d (x , y) = 0 \Leftrightarrow x = y}$$

**inégalité triangulaire**

$$\mathbf{d (x , z ) \leq d (x , y) + d (y , z)}$$

# RAPPELS MATHÉMATIQUES

## Exemples de distances

<u>Nom</u>	<u>Paramètre</u>	<u>Fonction</u>
<b>distance de Manhattan</b>	1-distance	$\sum_{n=1}^N  y_n - x_n $
<b>distance euclidienne</b>	2-distance	$\sqrt{\sum_{n=1}^N  y_n - x_n ^2}$
<b>distance de Minkowski</b>	$p$ -distance	$\sqrt[p]{\sum_{n=1}^N  y_n - x_n ^p}$
<b>distance de Tchebychev</b>	$\infty$ -distance	$\lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\sum_{n=1}^N  y_n - x_n ^p}$

La distance Euclidienne permet de généraliser l'application du théorème de Pythagore à un espace de dimension  $n$ . C'est la distance la plus utilisée et la plus « intuitive ».

# RAPPELS MATHÉMATIQUES

## Notions de norme

La norme du signal  $x(t)$ , que l'on note  $\|x(t)\|$ , représente la distance  $d$  qui sépare l'origine de l'extrémité du signal.

On peut de ce fait calculer la distance qui sépare deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  en calculant en tous points la norme de la différence entre ces deux signaux.

$$\|y_n - x_n\| = \|e_n\| = d(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^N |y_n - x_n|^2}$$

# RAPPELS MATHÉMATIQUES

## Notions de produit scalaire

Un produit scalaire entre deux fonctions, deux signaux ou encore deux vecteurs, noté  $\langle x, y \rangle$ , est un scalaire réel ou complexe permettant entre autres de déterminer le degré de ressemblance (corrélation) ou dissemblance (décorrélation ou orthogonalité) entre  $x(t)$  et  $y(t)$  et possédant les propriétés suivantes

$$\langle x, y \rangle = \int_D x(t) y^*(t) dt \quad \text{Où } D \text{ est le domaine de définition de } x(t) \text{ et } y(t). \\ * \text{ Représente le conjugué}$$

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2 \quad \text{Si } x(t) \in L^2, \text{ l'ensemble des signaux à énergie totale finie, alors } \langle x, x \rangle \text{ représente son énergie totale}$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$$

$$\langle \alpha x, \beta y \rangle = \alpha \beta^* \langle x, y \rangle \quad \text{Où } \alpha \text{ et } \beta \text{ représentent deux constantes}$$

$$\langle x + u, y + v \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, v \rangle + \langle u, y \rangle + \langle u, v \rangle$$

## Important :

□ Si  $\langle x, y \rangle = 0$  alors  $x(t)$  et  $y(t)$  sont orthogonaux

□ Une base  $\phi_k(t)$  est dite orthogonale si  $\langle \phi_k(t), \phi_l(t) \rangle = 0, \forall k \neq l$

# APPROXIMATION AU SENS DES MOINDRES CARRES

L'idée est d'approcher un signal mesuré ou observé  $x(t)$  par une combinaison linéaire de la forme:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k(t)$$

On cherche donc à déterminer les valeurs optimales  $\alpha_k$  garantissant une distance Euclidienne  $d(x, \hat{x})$  minimale.

$$\left\| x_n - \hat{x}_n \right\| = \|e_n\| = d\left(x, \hat{x}\right) = \sqrt{\sum_{n=1}^N \left| x_n - \hat{x}_n \right|^2} = \min$$

$$\|e_n\|^2 = d^2\left(x, \hat{x}\right) = \sum_{n=1}^N \left| x_n - \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k(t) \right|^2 = \min$$

# THEOREME DE PROJECTION

L'approximation  $\hat{x}(t)$ , sous forme d'une combinaison linéaire, est optimale au sens des moindres carrés si l'erreur  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  est orthogonale à toutes les fonctions  $\phi_k(t)$ .

C'est-à-dire :  $\langle e, \phi_k \rangle = 0 \quad \forall k$

Comme nous avons :  $\langle \hat{x}, \hat{x} \rangle = \langle \hat{x} + e, \hat{x} \rangle = \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle + \langle e, \hat{x} \rangle$

et :  $\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k(t)$

Alors nous aurons :

$$\langle x, \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k(t) \rangle = \langle \sum_{l=1}^N \alpha_l \phi_l(t), \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k(t) \rangle + \langle e, \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k(t) \rangle$$

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^* \langle x, \phi_k(t) \rangle = \sum_{l=1}^N \alpha_l \sum_{k=1}^N \alpha_k^* \langle \phi_l(t), \phi_k(t) \rangle + \sum_{k=1}^N \alpha_k^* \langle e, \phi_k(t) \rangle$$

# CALCUL DES COEFFICIENTS $\alpha_k$

En appliquant le théorème de projection pour une approximation optimale, ce qui nous permettra de trouver les meilleures valeurs des coefficients  $\alpha_k$

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^* \langle x, \phi_k(t) \rangle = \sum_{l=1}^N \alpha_l \sum_{k=1}^N \alpha_k^* \langle \phi_l(t), \phi_k(t) \rangle + \underbrace{\sum_{k=1}^N \alpha_k^* \langle e, \phi_k(t) \rangle}_{=0, \forall k}$$

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^* \langle x, \phi_k(t) \rangle = \sum_{l=1}^N \alpha_l \sum_{k=1}^N \alpha_k^* \langle \phi_l(t), \phi_k(t) \rangle$$

Si, en plus, on choisit une base  $\phi_k(t)$  orthogonale alors nous aurons:

$$\langle x, \phi_k(t) \rangle = \alpha_k \langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle \quad \forall k$$

C'est donc un système de  $N$  équations à  $N$  inconnues (les coefficients  $\alpha_k$ ) et où chaque équation possède une seule inconnue

# CALCUL DES COEFFICIENTS $\alpha_k$

$$\langle x, \phi_k(t) \rangle = \alpha_k \langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle \quad \forall k$$

*Sous forme matricielle, nous pouvons écrire :*

$$\begin{bmatrix} \langle x, \phi_1 \rangle \\ \langle x, \phi_2 \rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \langle x, \phi_N \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \langle \phi_N, \phi_N \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_N \end{bmatrix}$$

$$\alpha_k = \frac{\langle x, \phi_k(t) \rangle}{\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle} \quad \forall k$$



# ***SERIES DE FOURIER***

# SERIE DE FOURIER

*Il suffit d'utiliser les résultats précédents avec une base de fonction  $\phi_k(t)$  sous forme d'exponentielles complexes à savoir des fonctions complexes périodiques de périodes respectivement  $T/k$ .*

$$\phi_k(t) = e^{2\pi j \frac{k}{T} t}$$
$$\alpha_k = \frac{\langle x, e^{2\pi j \frac{k}{T} t} \rangle}{\langle e^{2\pi j \frac{k}{T} t}, e^{2\pi j \frac{k}{T} t} \rangle} \quad \forall k$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} dt$$

*Comme la combinaison va de  $-\infty$  à  $+\infty$  alors l'approximation sera égale à l'approximée et nous aurons:*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{2\pi j \frac{k}{T} t}$$

# SERIES DE FOURIER

*Si on suppose que  $x(t)$  est périodique de période  $T$ , de puissance moyenne finie, et réel alors nous pouvons déduire qu'il peut être décomposé en une somme de sinus et de cosinus.*

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi \frac{n}{T}t) + b_n \sin(2\pi \frac{n}{T}t)$$

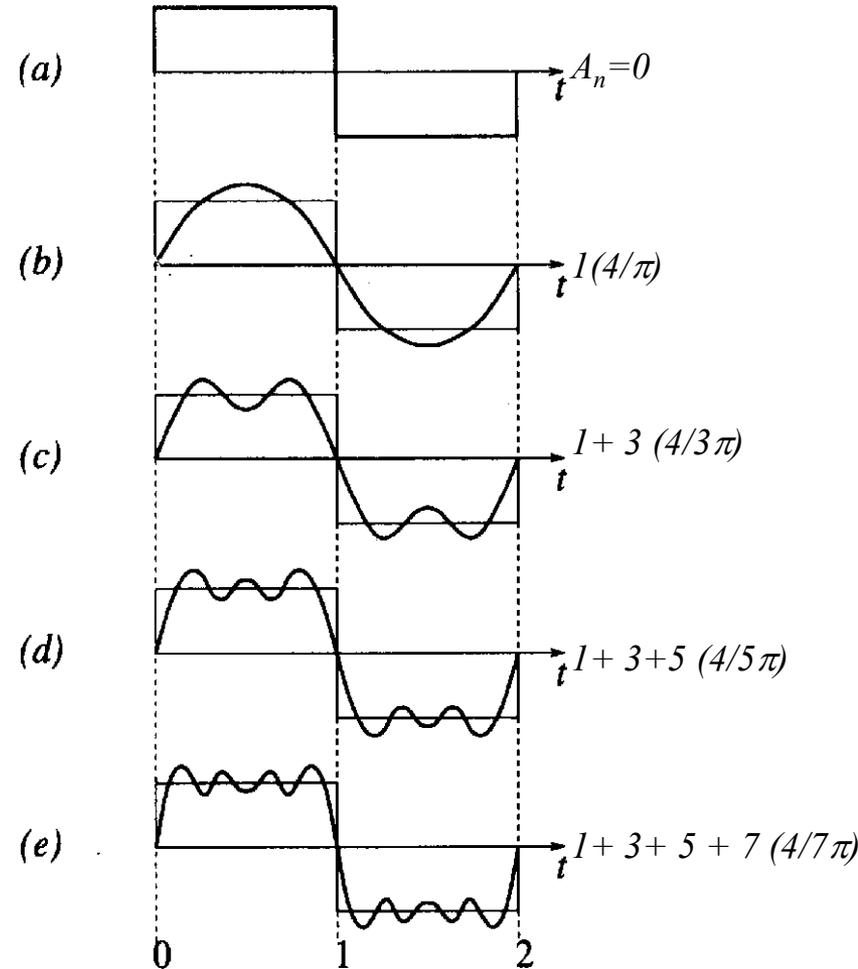
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \cos(2\pi \frac{n}{T}t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \sin(2\pi \frac{n}{T}t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

□  $a_0$  est l'amplitude de la composante continue DC ou valeur moyenne de  $x(t)$

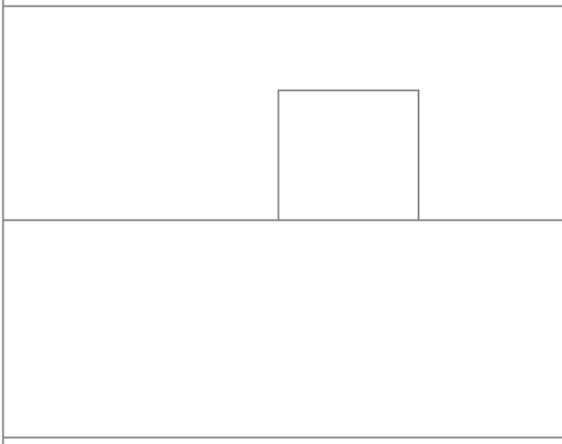
□  $a_1$  et  $b_1$  sont les amplitudes de la Fondamental de fréquence  $1/T$ , celle de  $x(t)$

□  $a_n$  et  $b_n$ , pour  $n \neq 1$  sont les amplitudes des autres harmoniques de fréquences multiples entiers de la fréquence de  $x(t)$  ( $2/T, 3/T, \dots$ )



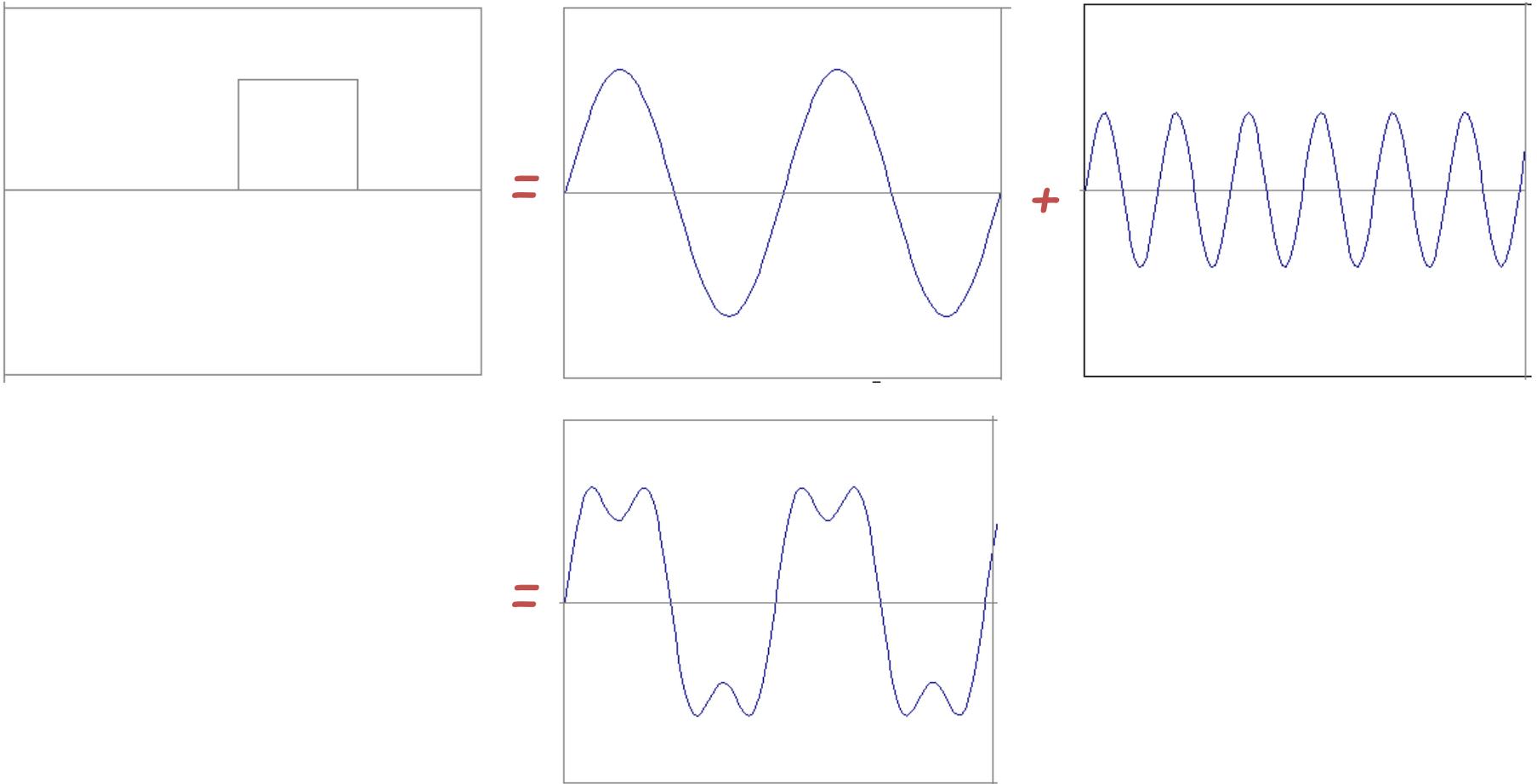
# ***SERIES DE FOURIER***

## Exemple



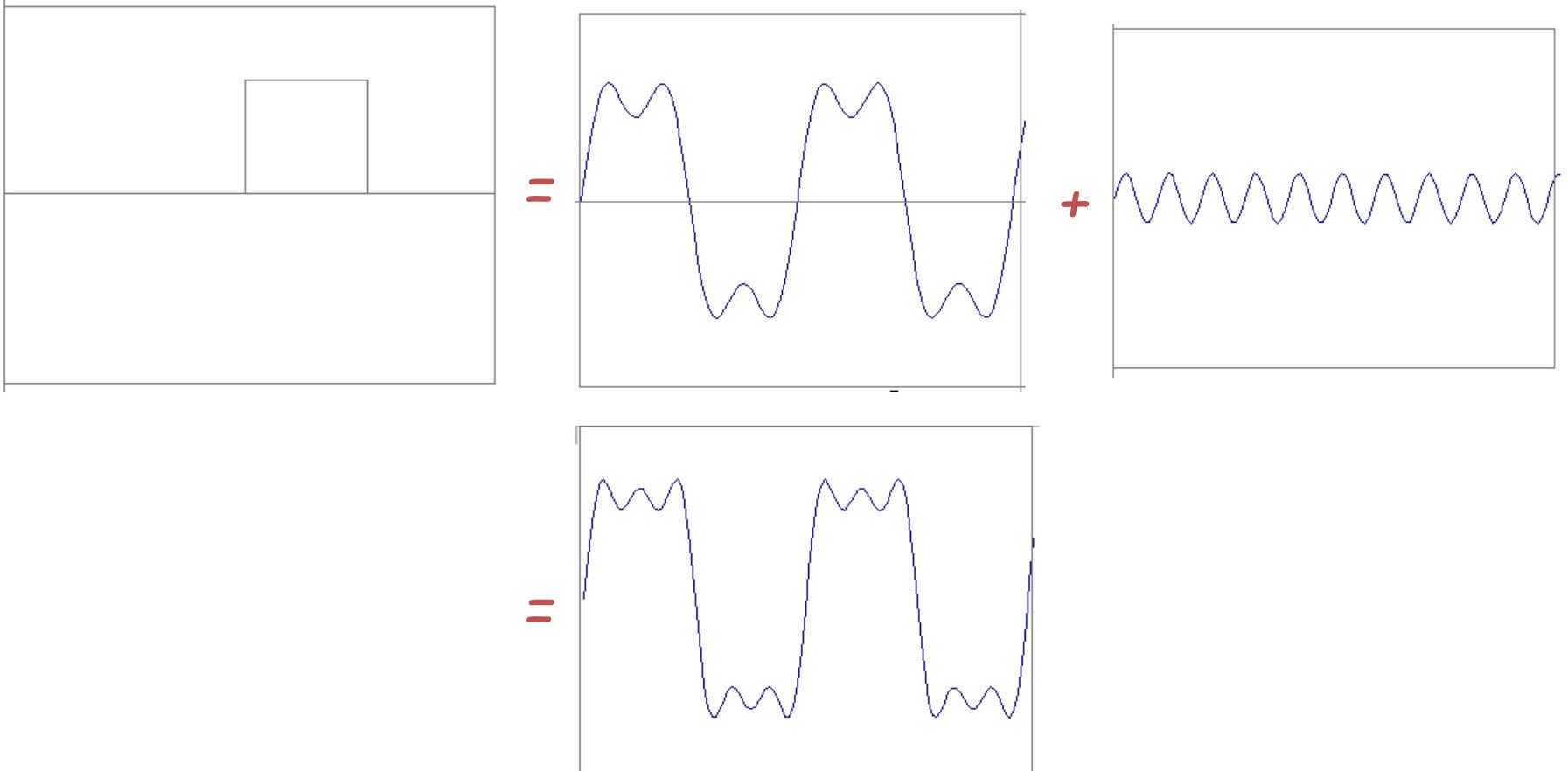
# ***SERIES DE FOURIER***

## Exemple



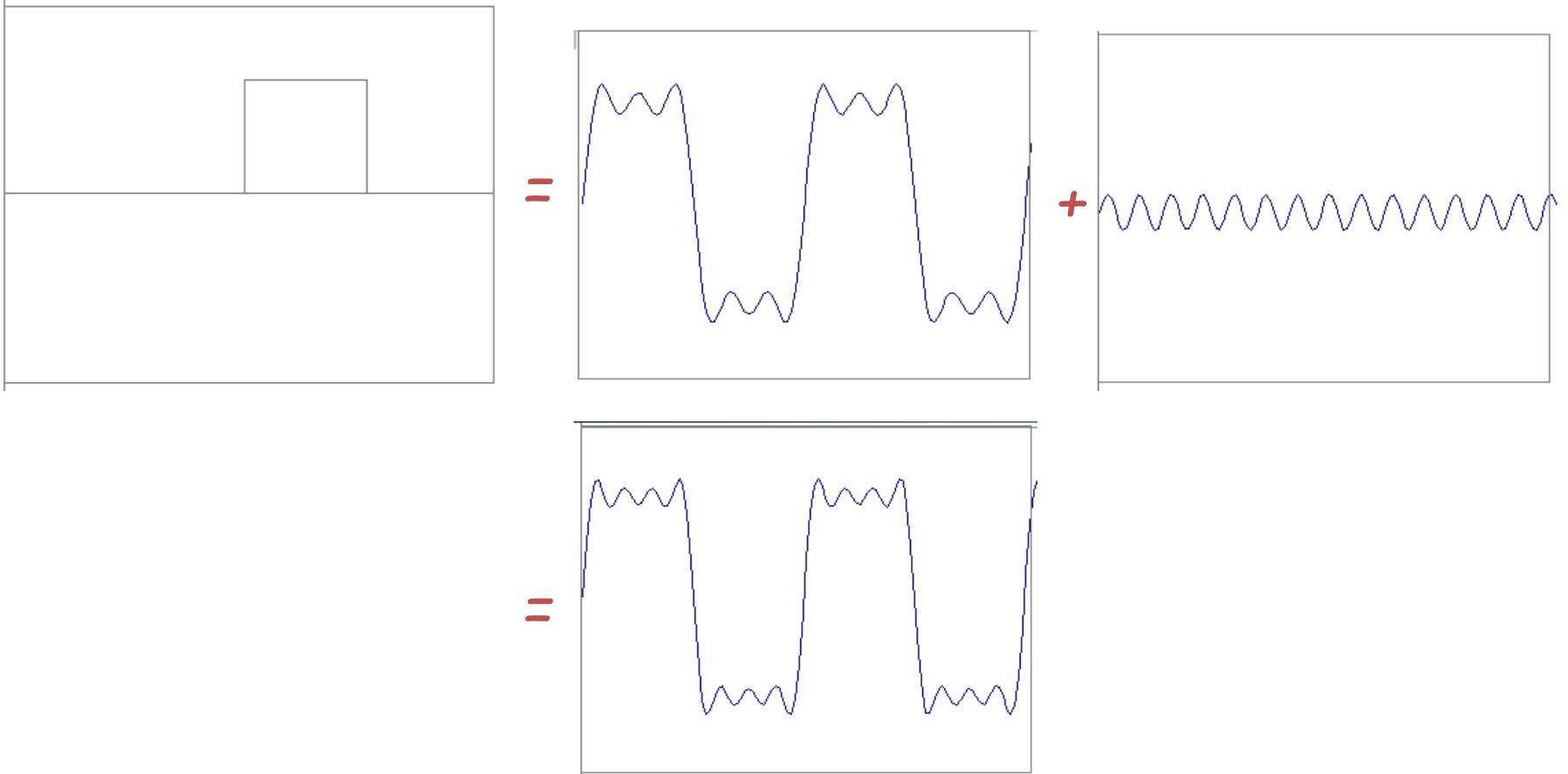
# ***SERIES DE FOURIER***

## Exemple



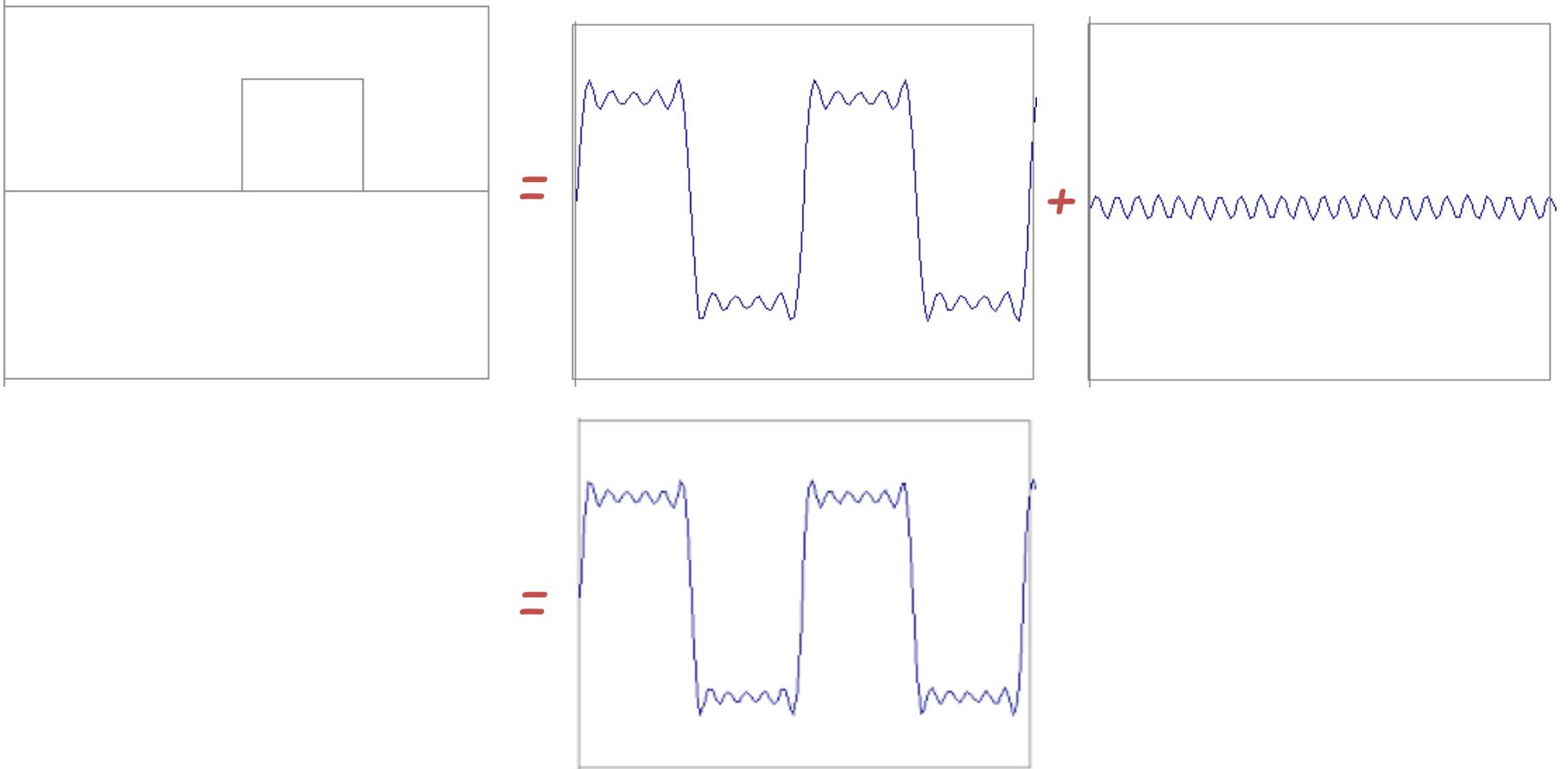
# ***SERIES DE FOURIER***

## Exemple



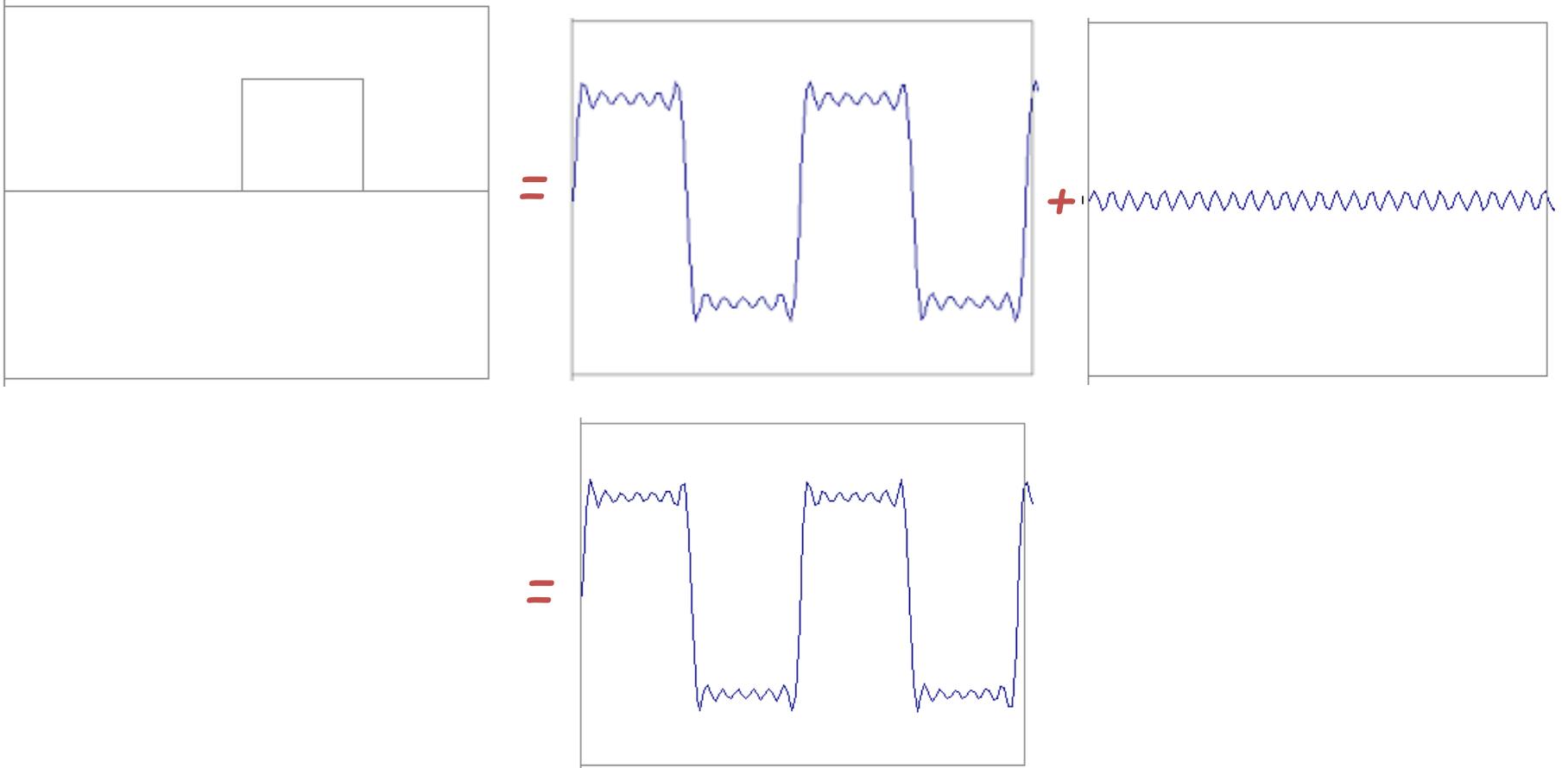
# ***SERIES DE FOURIER***

## Exemple



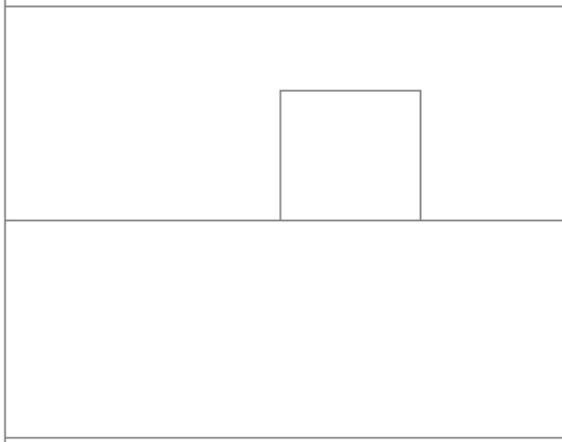
# ***SERIES DE FOURIER***

## Exemple



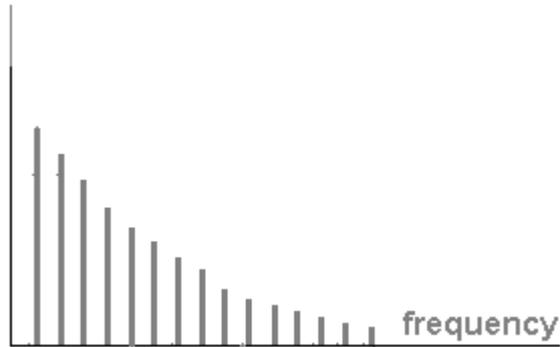
# *SERIES DE FOURIER*

## Exemple



=

$$A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2\pi kt)$$



# SPECTRE DE FOURIER

Comme les séries de Fourier vont nous permettre de représenter dans le domaine temporel tout signal périodique de période  $T$  par une composante continue (éventuellement) et des sinus et cosinus de fréquences multiples entiers de la fréquence du signal  $1/T$ , il est plus intéressant d'utiliser une autre représentation, autre que la représentation habituelle temporelle, pour le signal  $x(t)$  en fonction des fréquences dont il dispose. Il s'agit de la représentation fréquentielle ou spectrale.

Dans cette représentation, en fonction des fréquences constituant le signal, nous allons parler de spectre.

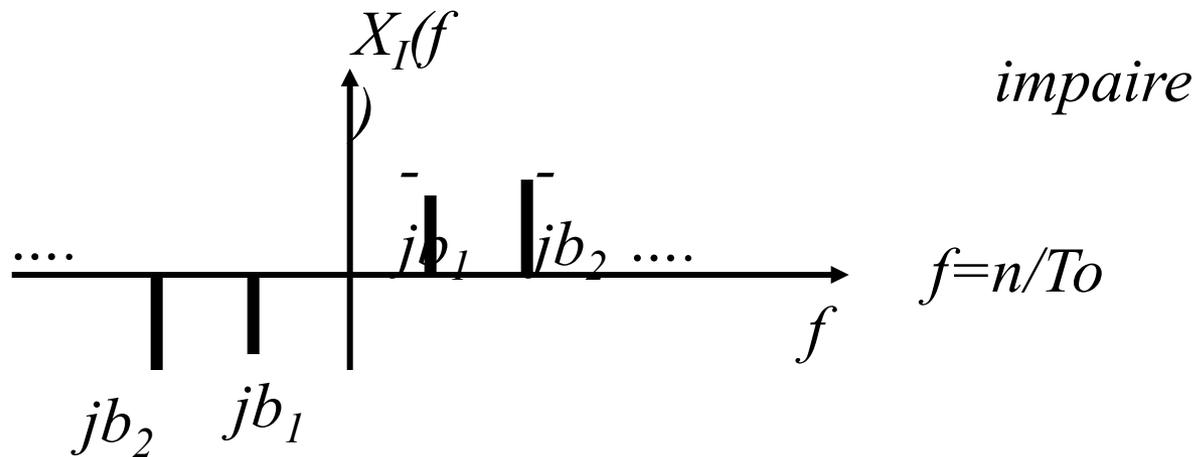
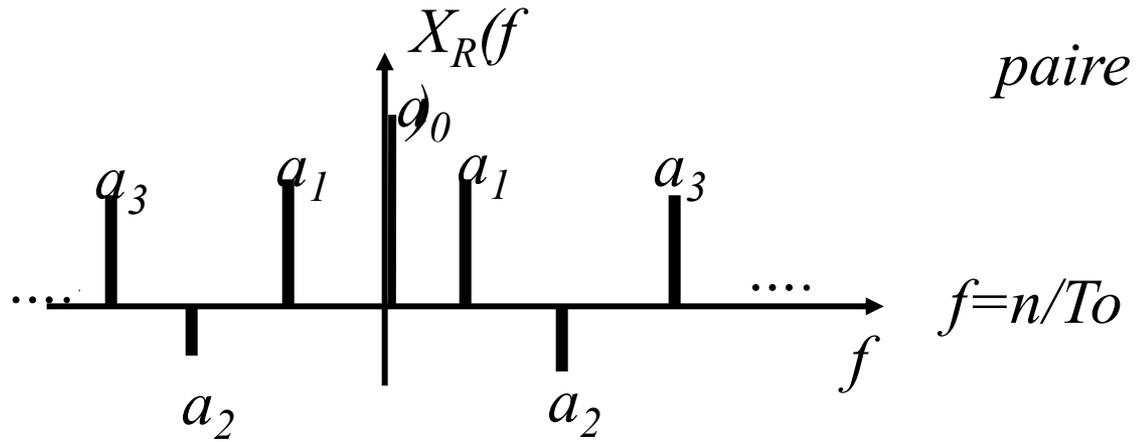
Le noyau des séries de Fourier  $\phi_k(t) = \alpha_k e^{2\pi j \frac{k}{T} t}$  aura donc pour spectre  $\phi_k(f) = \alpha_k \delta(f - \frac{k}{T})$

$a_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right)$  et  $b_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right)$  auront donc respectivement pour spectres :

$$\frac{a_k}{2} \left[ \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) + \delta\left(f + \frac{k}{T}\right) \right] \text{ et } \frac{jb_k}{2} \left[ \delta\left(f + \frac{k}{T}\right) - \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \right]$$

Quant à la composante continue  $a_0$  elle aura pour spectre :  $a_0 \delta(f)$

# ***SPECTRE DE FOURIER***



# SPECTRE DE FOURIER

*Le spectre peut être représenté par une partie réelle et une partie imaginaire*

*Ou bien : Par un module et phase*

Domaine

temporel

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_0} + \varphi_n\right)$$

$$\text{avec } c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} ; \varphi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

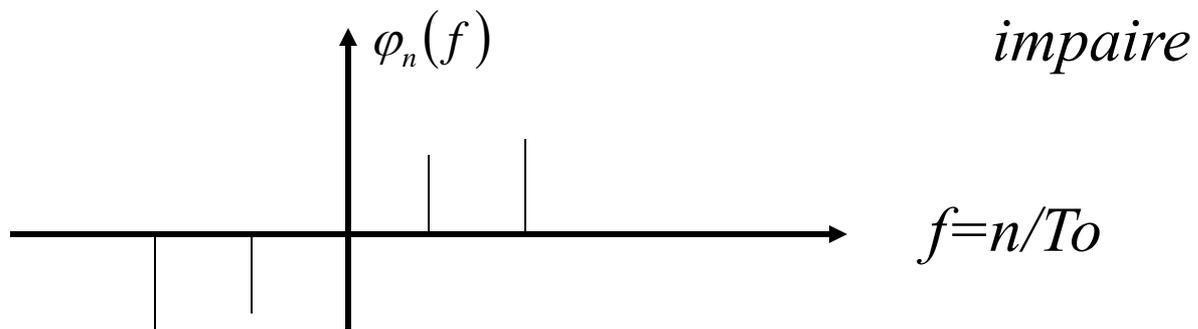
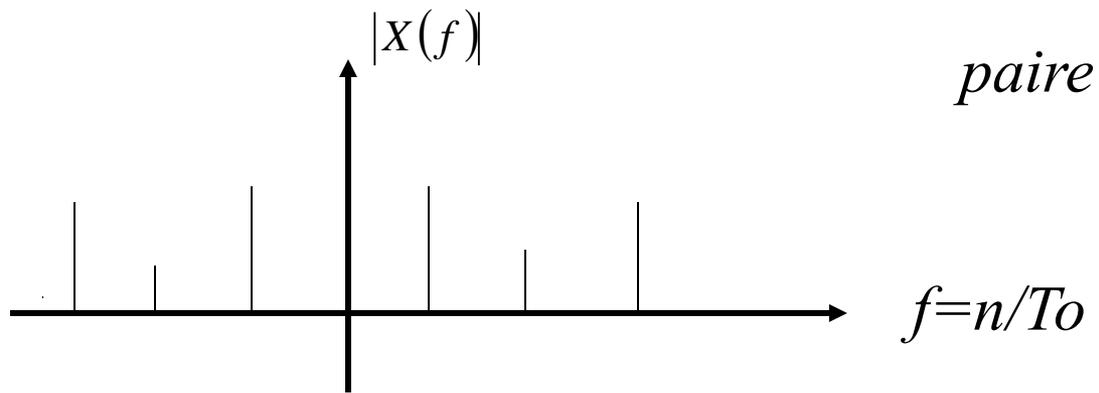
Domaine

Spectral

$$|X(f)| = |a_0| + c_n \left[ \delta\left(f - \frac{j\pi n t}{T_0}\right) + \delta\left(f + \frac{2j\pi n t}{T_0}\right) \right]$$

$$\varphi_n(f) = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \left( \delta\left(f + \frac{2j\pi n t}{T_0}\right) - \delta\left(f - \frac{2j\pi n t}{T_0}\right) \right)$$

# *SPECTRE DE FOURIER*



# ***SPECTRE DE FOURIER***

*Dès lors pour un signal  $x(t)$  périodique réel et quelconque et compte tenu de son développement en série de Fourier, son spectre sera donc obtenu ainsi:*

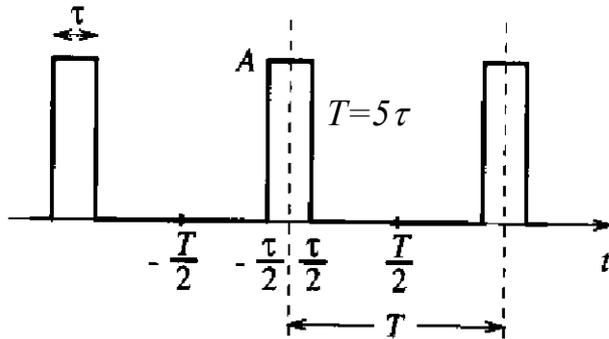
## *Domaine temporel*

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right)$$

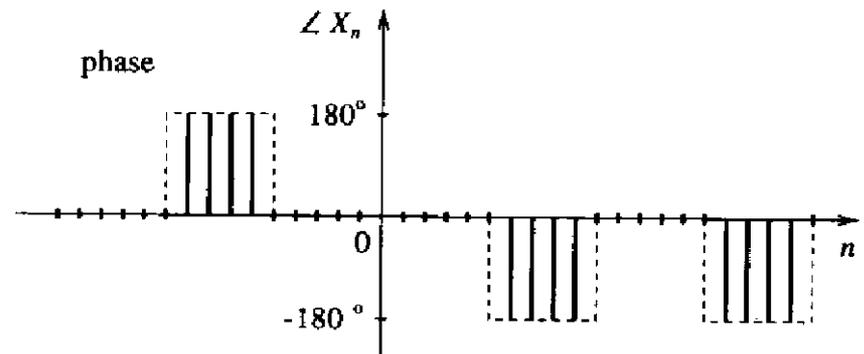
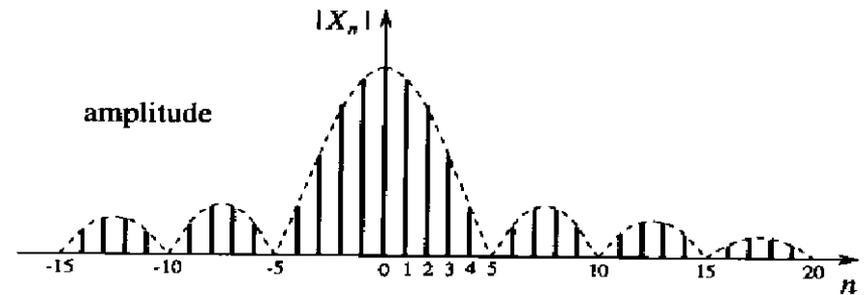
## *Domaine spectral*

$$X(f) = \frac{a_0}{2} \delta(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left[ \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) + \delta\left(f + \frac{n}{T}\right) \right] + \frac{jb_n}{2} \left[ \delta\left(f + \frac{n}{T}\right) - \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \right]$$

*Pour ça ?*



$$X_n = \frac{A\tau}{T} \frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}$$



# DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE

L'analyse et l'étude d'un signal nécessitent souvent le calcul de son énergie totale et de sa puissance moyenne totale. Pour un signal déterministe physiquement réalisable son énergie totale est finie et par conséquent sa puissance moyenne totale est nulle. Par contre un signal périodique possède une puissance moyenne totale non nulle ce qui implique une énergie totale infinie.

Pour un signal non périodique, l'énergie totale et la puissance moyenne totale sont calculées respectivement par:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$
$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Si le signal  $x(t)$  est périodique, nous allons nous intéresser uniquement à la puissance moyenne totale (l'énergie est dans ce cas infinie) en la calculant à partir de :

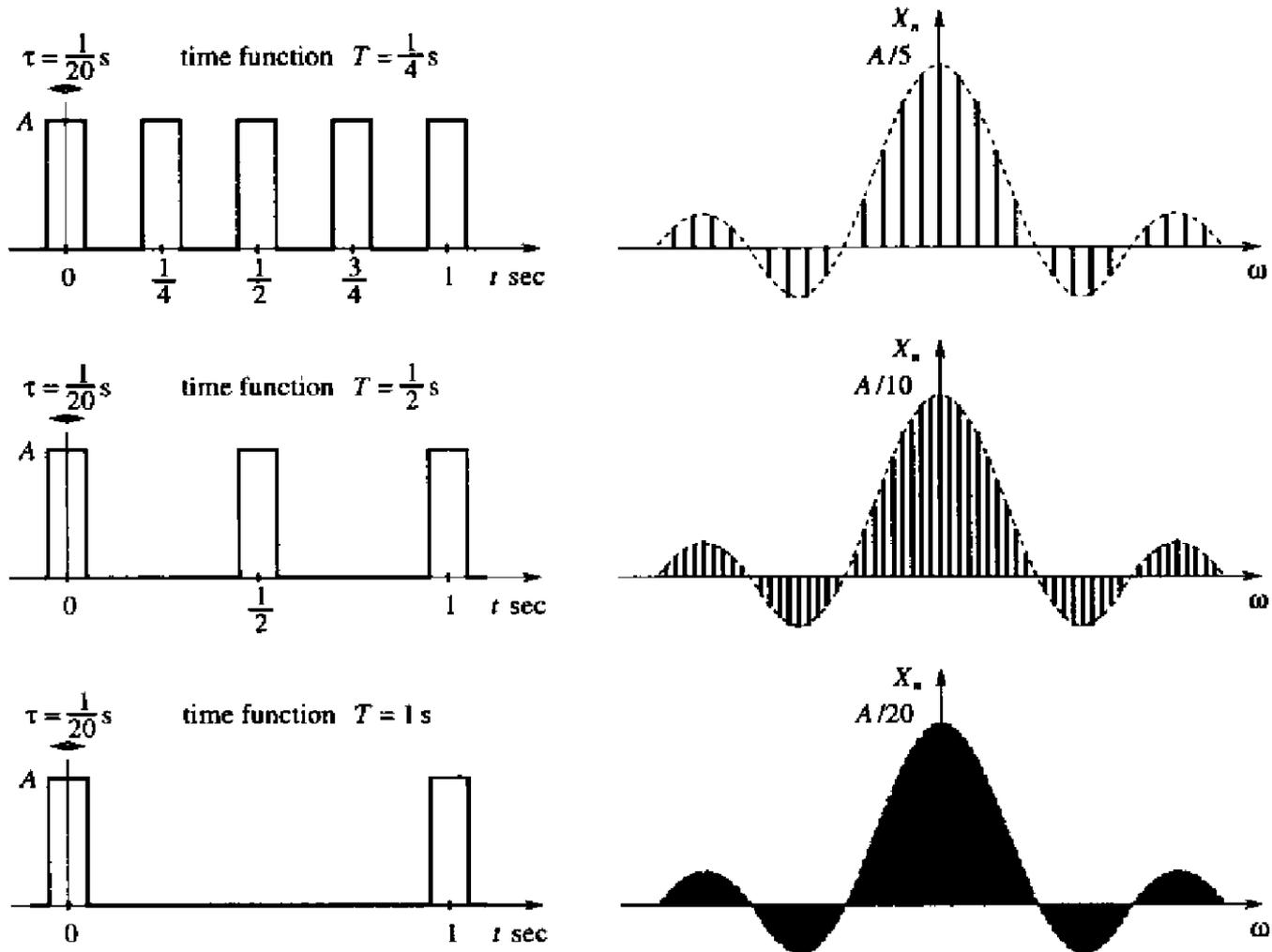
$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$
$$P_x = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Ou encore, en utilisant l'identité de Parseval:  $P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2$  ← **Densité Spectrale de Pu**

La DSP ou Densité Spectrale de Puissance est la caractéristique essentielle que nous cherchons à obtenir par l'analyse spectrale. Elle représente la dispersion de la puissance du signal par unité de fréquence.

# TRANSFORMEE DE FOURIER

Si le signal  $x(t)$  n'est pas périodique (c'est le cas pour tous les signaux physiquement réalisables) nous ne pouvons plus le décomposer en série de Fourier (1<sup>ère</sup> impression). Cependant, nous pouvons toujours considérer qu'il est toujours périodique mais de période de plus en plus élevée :



# TRANSFORMEE DE FOURIER

*Extension des séries de Fourier aux signaux non périodiques (ie, transitoires..)*

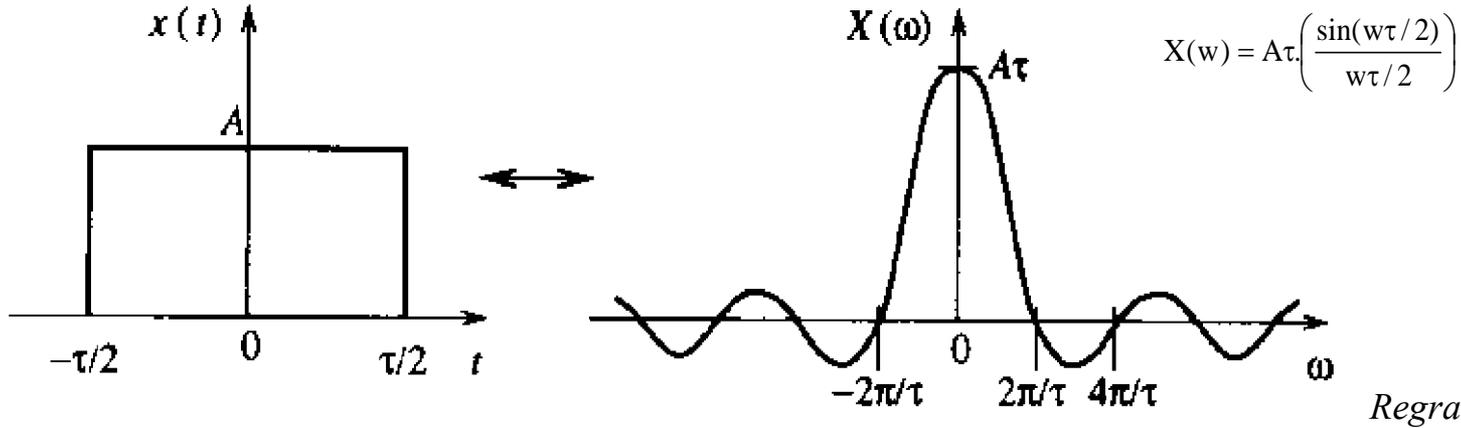
$$(1) \left\{ \begin{array}{l} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi jft} dt \\ x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+2\pi jft} df \end{array} \right.$$

*spectre d'énergie, de puissance*

$$(2) P_{moy} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t) dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2, \quad x(t) \text{ périodique}(T_0)$$

$$(3) E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df, \quad x(t) \text{ non périodique, énergie totale de } x(t)$$

# TRANSFORMEE DE FOURIER



$$X(f) = TF[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt, t \in R, f \in R$$

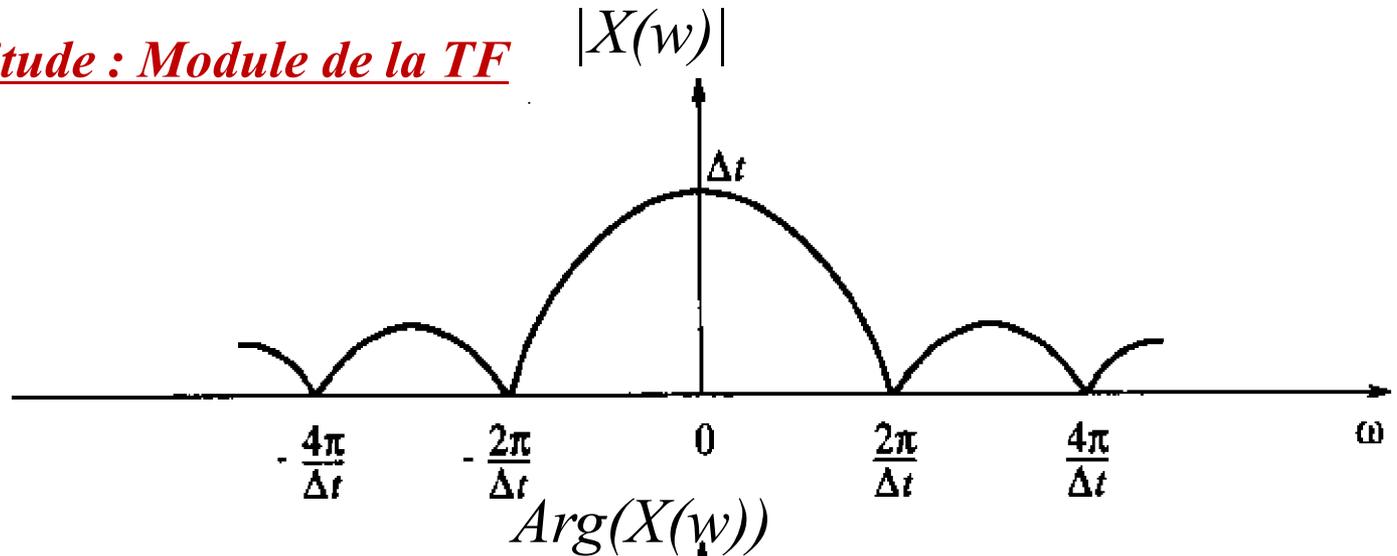
$$x(t) = TF^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df, t \in R, f \in R$$

**La TF, comme toutes les transformations linéaires, est réversible. Autrement dit :**

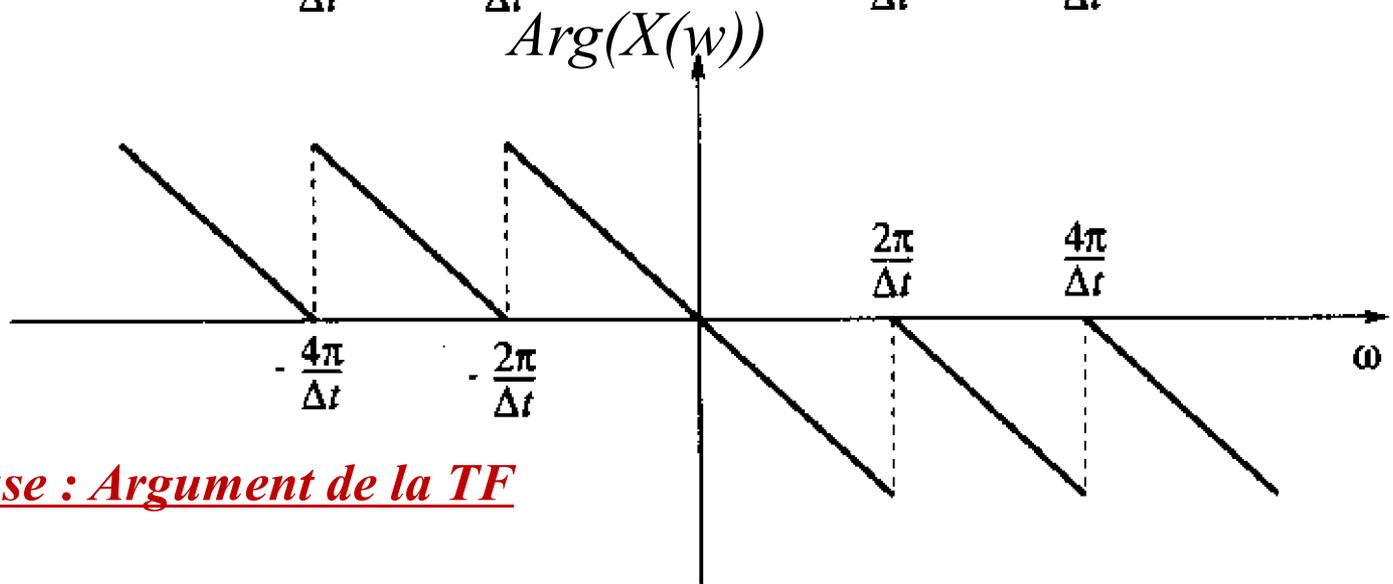
$$TF^{-1}[TF[x(t)]] = x(t)$$

# SPECTRE DE FOURIER

Spectre d'amplitude : Module de la TF



$Arg(X(\omega))$



Spectre de phase : Argument de la TF

# DENSITE SPECTRALE D'ENERGIE

*Si le signal  $x(t)$  est déterministe et physiquement réalisable (énergie totale finie et puissance moyenne totale nulle), pour son analyse spectrale nous allons nous intéresser plutôt à sa DES ou Densité spectrale d'énergie:*

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi jft} dt$$

$V/Hz$        $V$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$V^2 \cdot sec$        $DSE \text{ en } (V/Hz)^2 \cdot Hz = V^2/Hz$

*La DSE ou Densité Spectrale d'énergie est la caractéristique essentielle que nous cherchons à obtenir par l'analyse spectrale d'un signal déterministe physiquement réalisable. Elle représente la dispersion de l'énergie du signal par unité de fréquence.*

# PROPRIETES DE LA TF

## PROPRIETES DE LA TF

- $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \Leftrightarrow a_1X_1(f) + a_2X_2(f)$       *linéarité*
- $A\delta(t) \Leftrightarrow A$       *Dirac = élément neutre*
- $A \Leftrightarrow A\delta(t)$       *Constante*
- $x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a}W\left(\frac{f}{a}\right)$       *chg d'échelle de temps*
- $x(t - \tau) \Leftrightarrow X(f)e^{-2\pi jf\tau}$       *retard temporel*
- $x(-t) \Leftrightarrow X(-f) = X(f)^*$       *renversement du temps*
- $x(t)\cos(2\pi f_m t) \Leftrightarrow 1/2[X(f - f_m) + X(f + f_m)]$       *modulation d'amplitude*
- $x_1(t) * x_2(t) \Leftrightarrow X_1(f)X_2(f)$       *convolution*
- $x_1(t)x_2(t) \Leftrightarrow X_1(f) * X_2(f)$       *multiplication*
- $\frac{d^n}{dt}x(t) \Leftrightarrow (2\pi jf)^n X(f)$       *dérivation*
- $X_R = \text{réel}(X(f))$       *paire*
- $X_I = \text{imag}(X(f))$       *impaire*

# ***PROPRIETES DE LA TF***

## *PROPRIETES DE LA TF*

### □ Relation de Parseval

Loi de conservation de l'énergie

Dans le cas où les intégrales existent, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

La Transformée de Fourier conserve l'énergie du signal

# PROPRIETES DE LA TF

## PROPRIETES DE LA TF

Les définitions symétriques de la TF et de la TF inverse permettent de mettre en avant une propriété de la TF appelée **Dualité de la TF**.

Soit  $x(t)$ , une fonction quelconque dont la TF est bien définie

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{et} \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

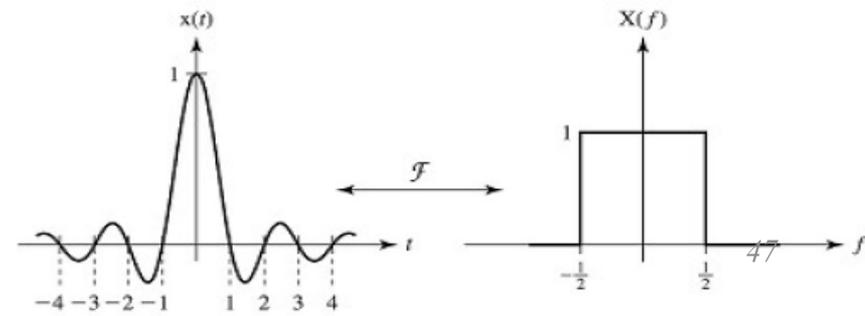
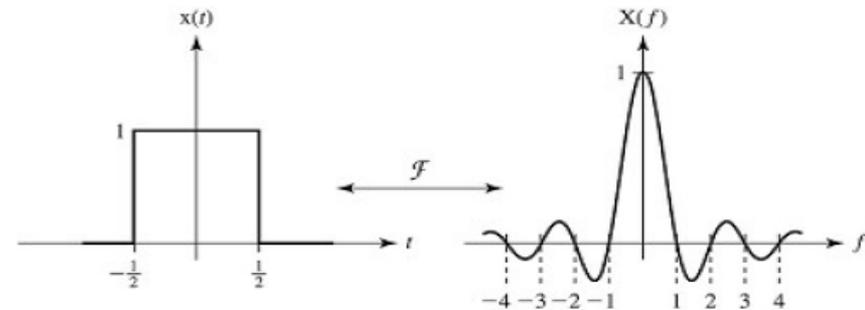
$$\text{On a donc} \quad x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{-j2\pi ft} df$$

En intervertissant les variables temporelles et fréquentielles, on obtient :

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-j2\pi ft} dt = \mathbf{F}(X(t))$$

$$\text{Donc si} \quad x(t) \xrightarrow{\mathbf{F}} X(f)$$

$$\text{alors} \quad X(t) \xrightarrow{\mathbf{F}} x(-f)$$



# PROPRIETES DE LA TF

## PROPRIETES DE LA TF

### Linéarité

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f)$$

### Décalage temporel

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

L'amplitude  $A_f$  ne change pas. La phase est modifiée de  $-j2\pi f t_0$

### Décalage fréquentiel

$$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \leftrightarrow X(f - f_0)$$

$x(at)$  arrow

### Changement d'échelle

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad a \in \mathbb{R}^*$$

La contraction dans le domaine temporel ( $a \geq 1$ ) correspond à la dilatation dans le domaine fréquentiel et inversement

### Dérivation

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j2\pi f X(f)$$

### Intégration

Soit  $P[x(t)]$  la primitive de  $x(t)$

$$P[x(t)] \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f)$$



La TF et la TF inverse ne sont pas toujours définies

# PROPRIETES DE LA TF

## PROPRIETES DE LA TF

### ❑ Inversion temporelle

$$x(-t) \leftrightarrow X(-f)$$

### ❑ Conjugaison complexe

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$$

### ❑ Symétrie dans le cas de signaux réels

Si  $x(t)$  est un signal réel alors  $X(f) = X(-f)$

donc  $|X(f)| = |X(-f)|$  et  $\varphi(f) = -\varphi(-f)$

Le spectre d'amplitude est une fonction paire et le spectre d'argument est impair

### ❑ Symétrie dans le cas de signaux imaginaires purs

Si  $x(t)$  est un signal imaginaire pur alors  $X(f) = -X(-f)$

### ❑ Parité

▪ Si  $x(t)$  est un signal réel et pair alors  $X(f)$  est réelle et paire

▪ Si  $x(t)$  est un signal réel et impair alors  $X(f)$  est imaginaire pure et impaire

# PROPRIETES DE LA TF

- Linéarité
- $X(f)$  ↗ module  $|X(f)|$ , phase  $\text{Arg}[X(f)]$
- $x(t)$  réel  $\Leftrightarrow \text{Re}[X(f)]$  paire,  $\text{Im}[X(f)]$  impaire, module pair, phase impaire
- $x(t)$  réel pair  $\Leftrightarrow X(f)$  réel pair
- $x(t)$  réel impair  $\Leftrightarrow X(f)$  imaginaire impair
- $x(t)*y(t) \Leftrightarrow X(f).Y(f)$  et  $x(t).y(t) \Leftrightarrow X(f)*Y(f)$  !

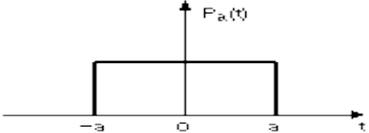
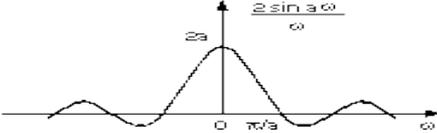
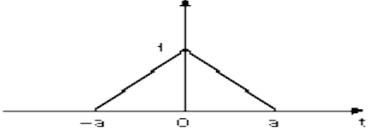
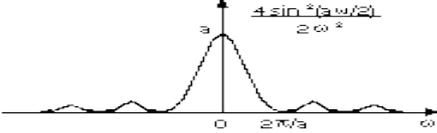
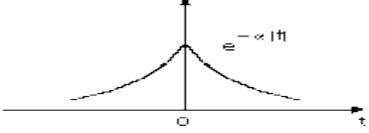
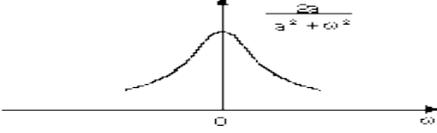
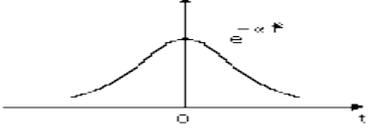
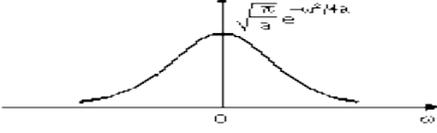
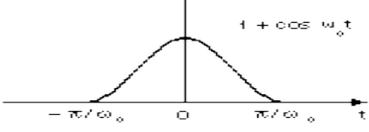
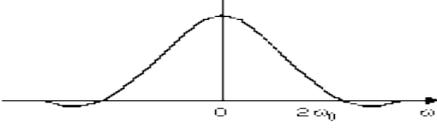
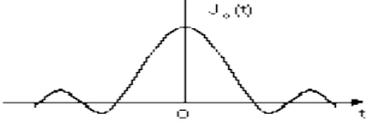
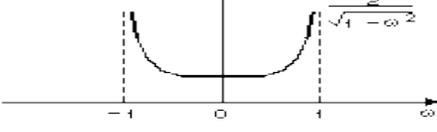
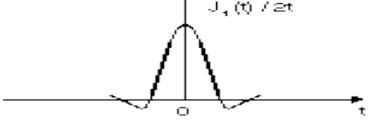
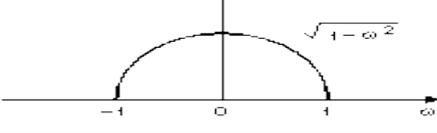
- $x(t)*\delta(t-t_0) = x(t-t_0) \Leftrightarrow X(f) \exp(-2j\pi f t_0)$
- $x(t) \exp(2j\pi t f_0) \Leftrightarrow X(f-f_0)$
- $x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-f)$
- $x(at) \Leftrightarrow |a|^{-1} X(f/a)$
- $d^n x(t)/dt^n \Leftrightarrow (2j\pi f)^n X(f)$

# PROPRIETES DE LA TF

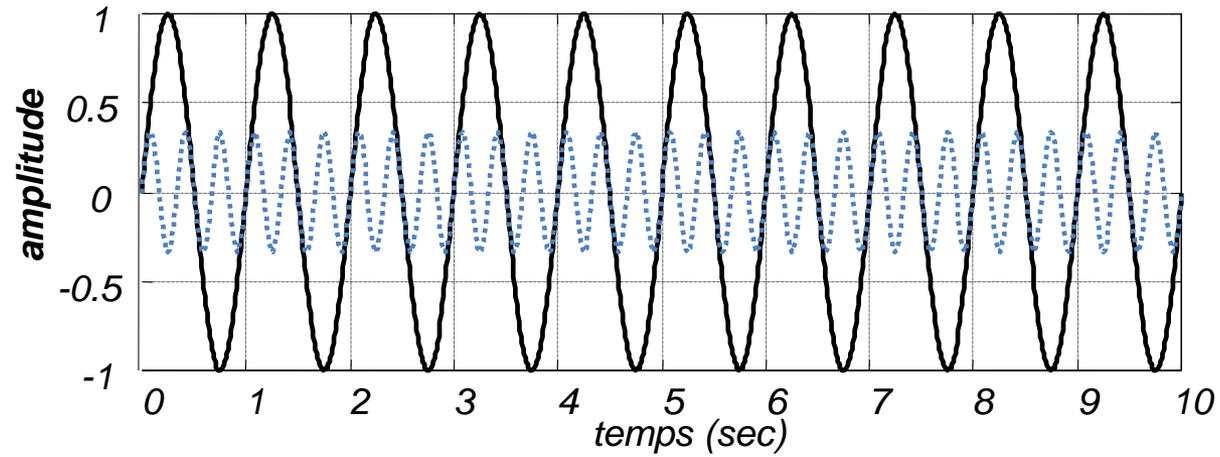
- $\delta(t) \Leftrightarrow 1$
- $1(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \delta(f) + 1/(2j\pi f)$
- $\cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]/2$
- $\sin(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow [\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]/2j$
- $\sum \delta(t+nT) \Leftrightarrow F_e \sum \delta(f+kF_e)$  avec  $F_e = 1/T$
- $\text{Rect}(t) \Leftrightarrow 2a \cdot \text{Sinc}(\pi f a)$

# PROPRIETES DE LA TF

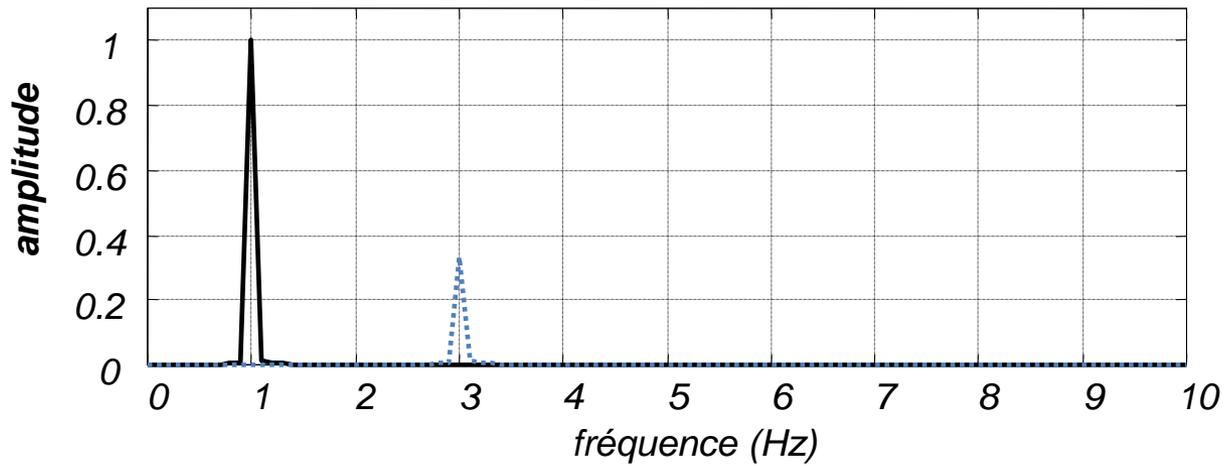
Examples of Fourier transforms

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$
	
	
	
	
	
	
	

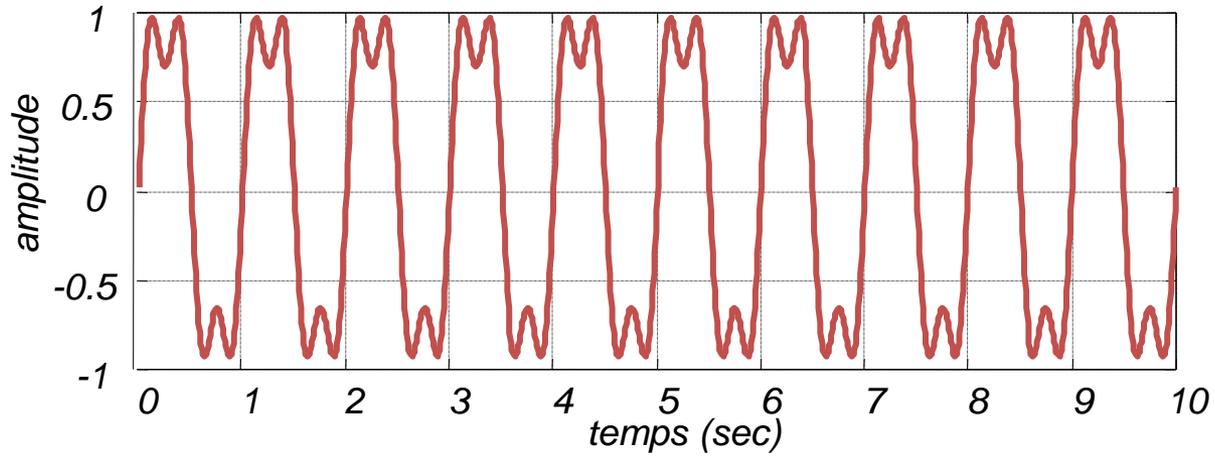
*représentation des signaux en temps*



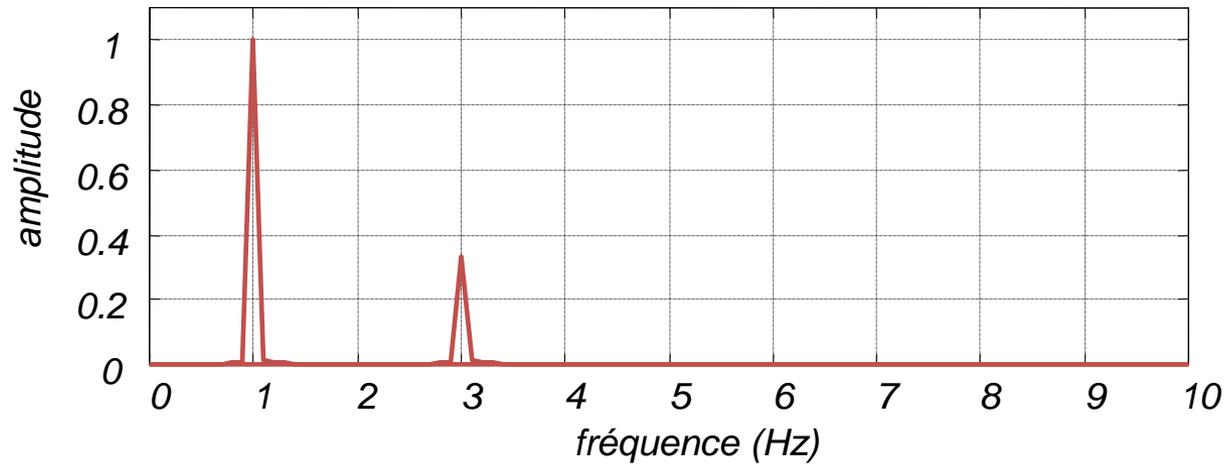
*représentation des signaux en fréquence*



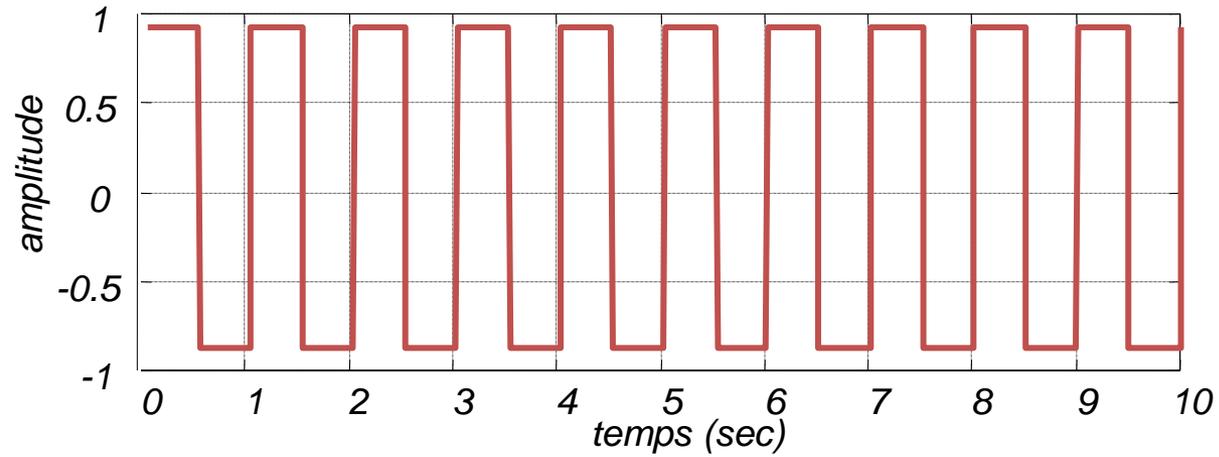
*représentation des signaux en temps*



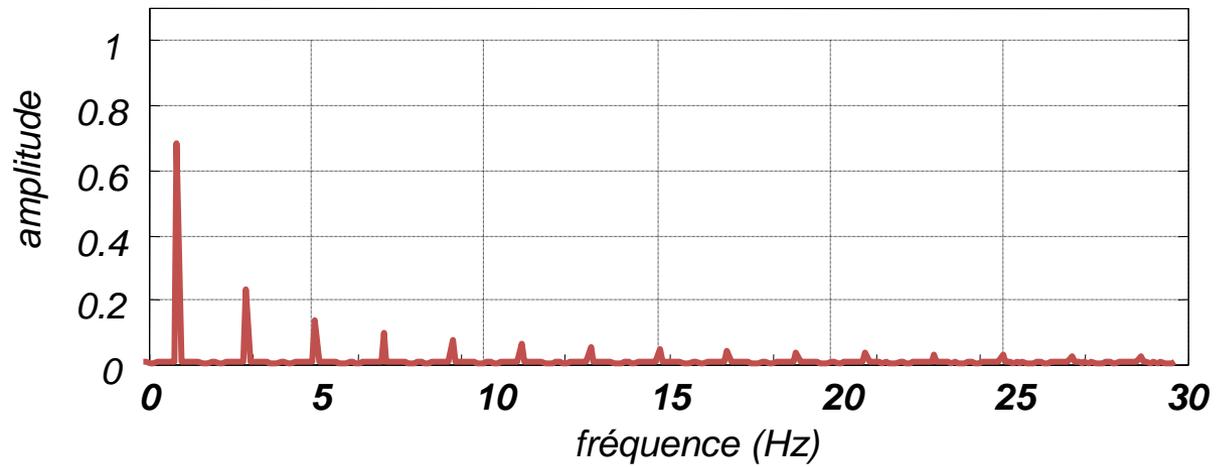
*représentation des signaux en fréquence*



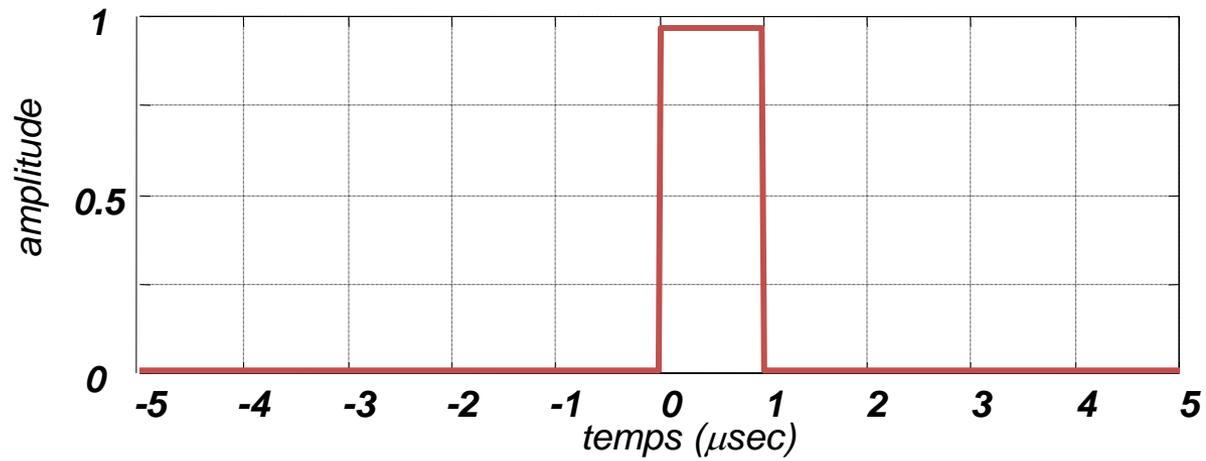
*représentation des signaux en temps*



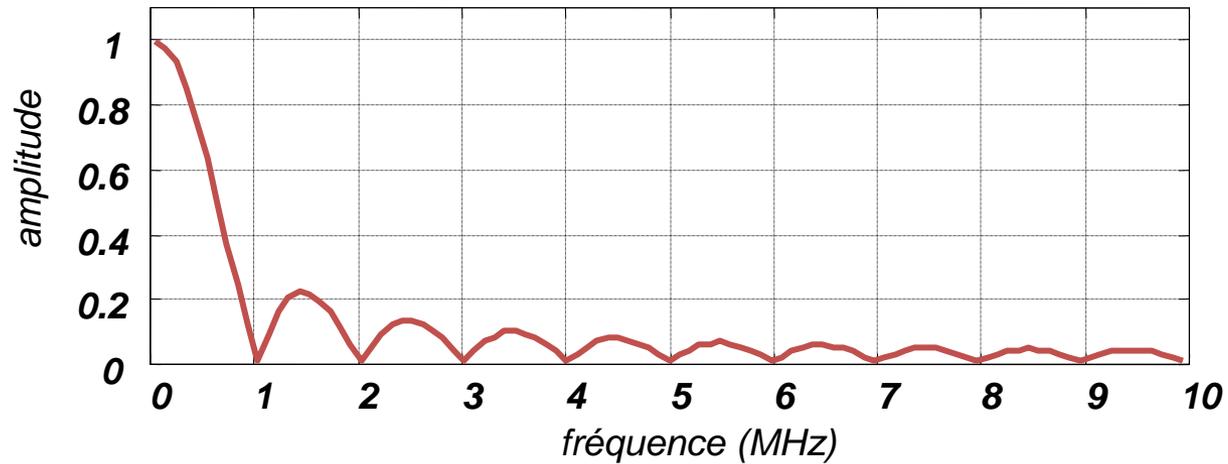
*représentation des signaux en fréquence*



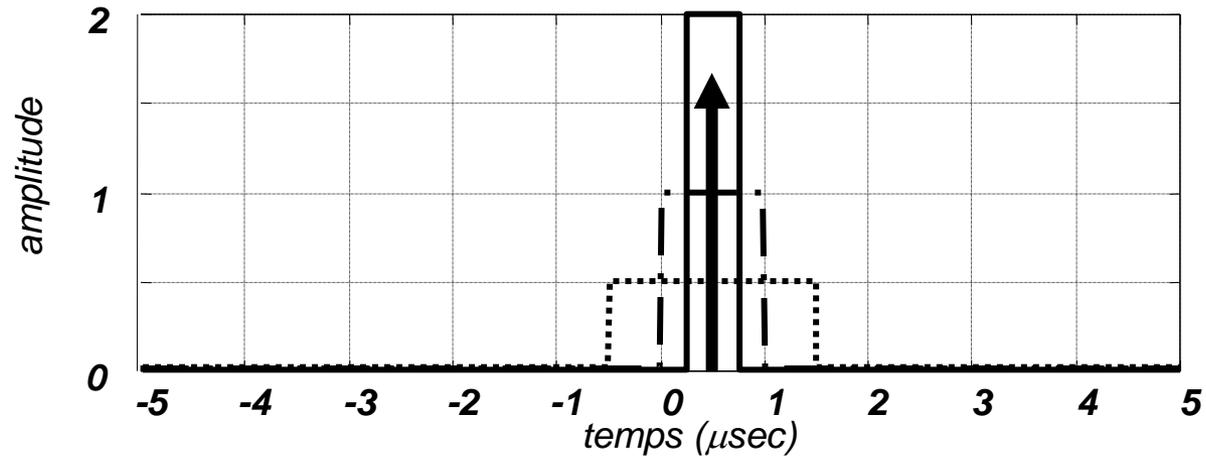
*représentation des signaux en temps*



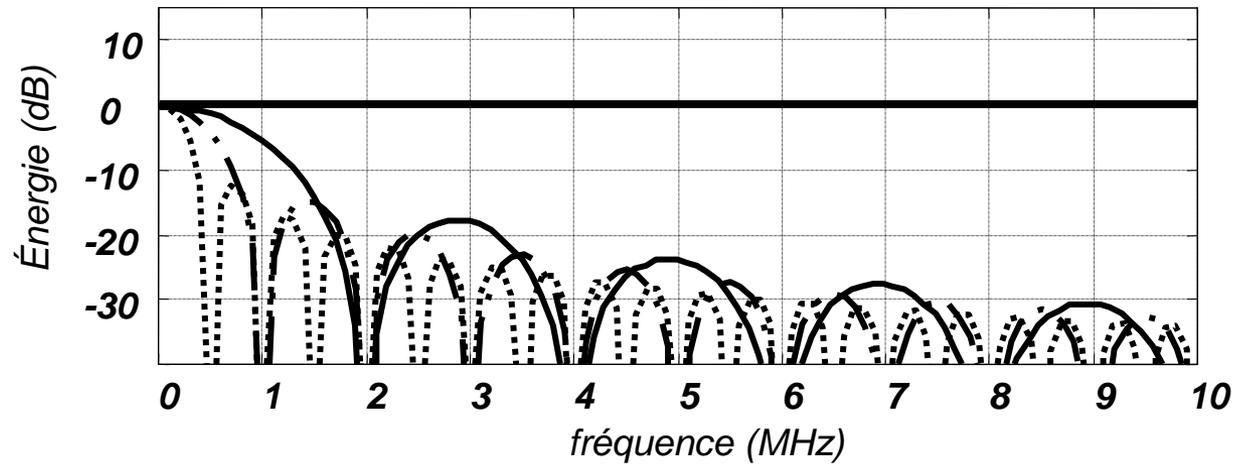
*représentation des signaux en fréquence*



*représentation des signaux en temps*



*représentation des signaux en fréquence*

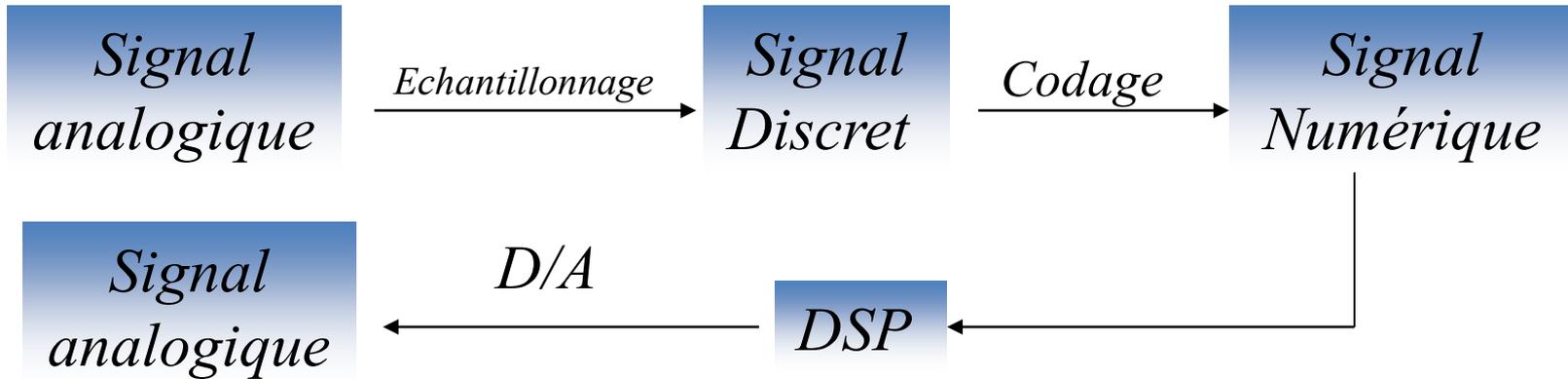


# **ECHANTILLONNAGE**

# ECHANTILLONNAGE

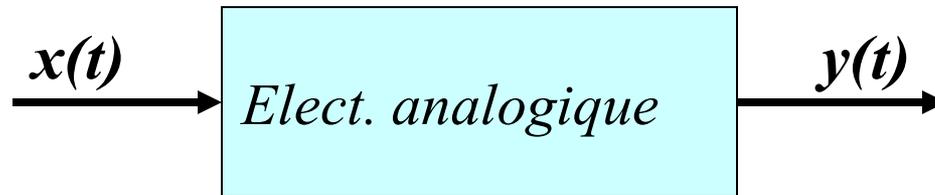
•

*Un traitement numérique ou une communication numérique exigent avant tout que le signal informatif, généralement analogique, soit numérisé.*



- **TRAITEMENT ANALOGIQUE:**

- *Circuits: resistances, capacités, ampli-op ...etc*



- **TRAITEMENT NUMERIQUE**

- Microprocesseurs, DSP, autres circuits programmables ...

*On doit commencer par convertir  $x(t)$  to nombres (numériques) à stocker dans une mémoire*

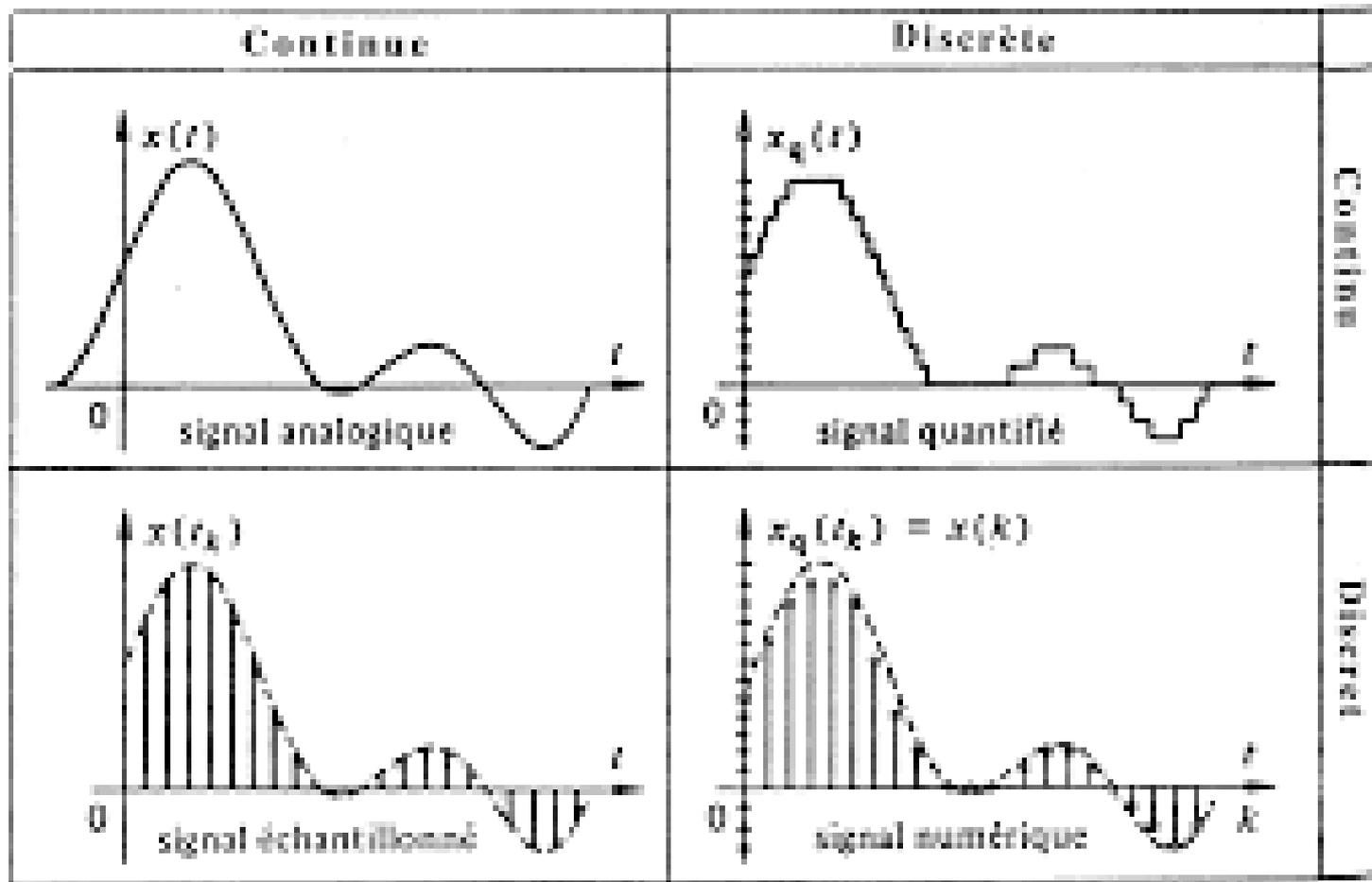


•

*Pour numériser un signal analogique (conversion analogique numérique CAN) il faut deux opérations:*

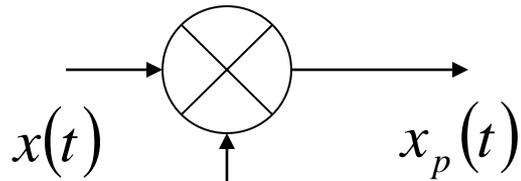
- *Echantillonnage: Il s'agit de discrétiser le temps*
- *Quantification: Il s'agit de discrétiser les amplitudes*

## AMPLITUDE

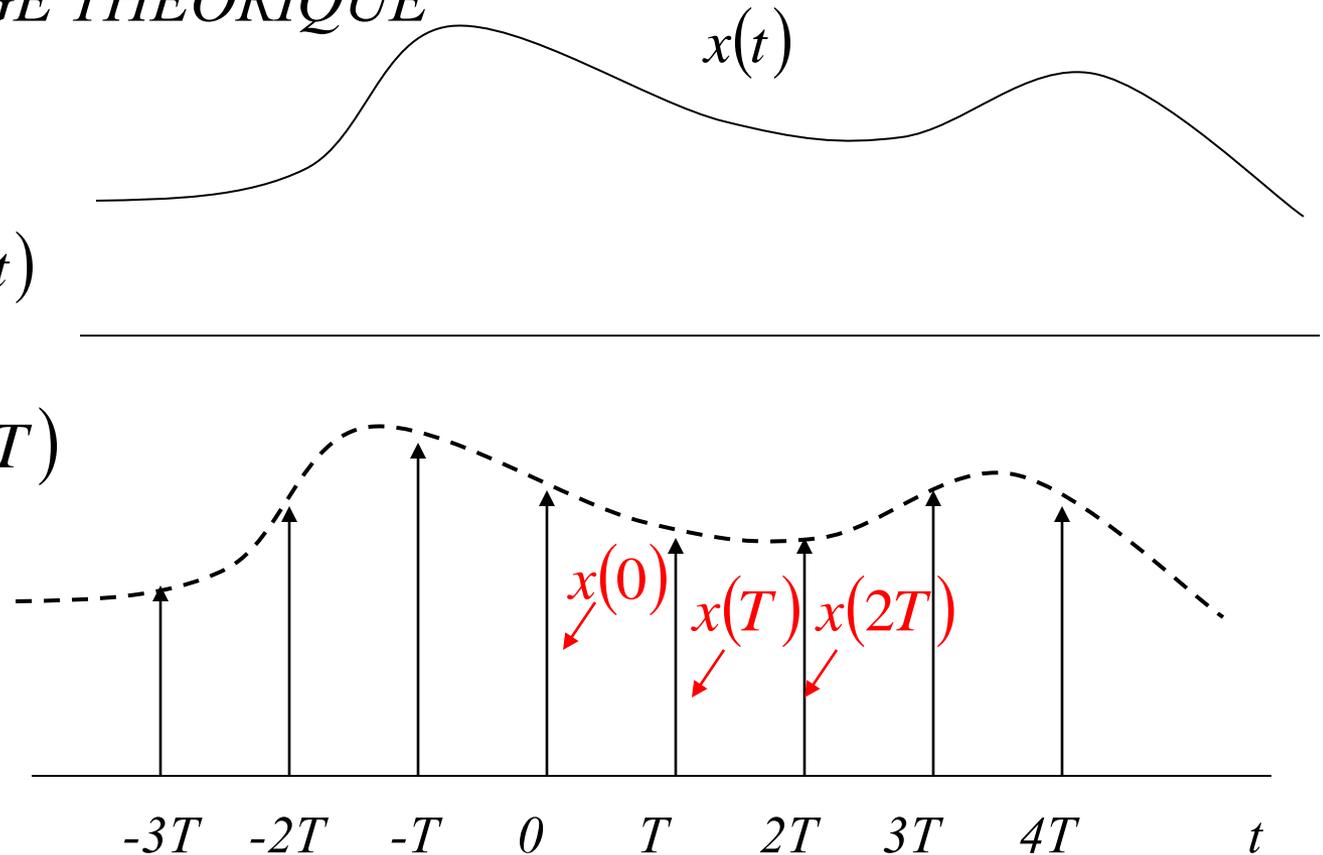


TEMPS

## ECHANTILLONNAGE THEORIQUE

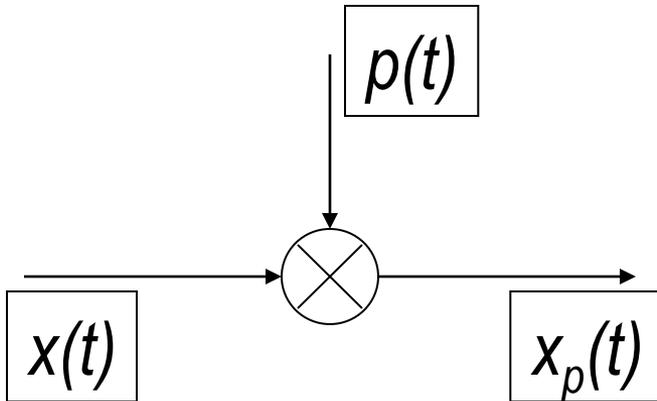


$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$



*NB: Il s'agit donc d'une modulation très particulière où la porteuse est un train d'impulsions (peigne de Dirac).*

## ECHANTILLONNAGE THEORIQUE



*C'est un échantillonnage théorique dans le sens où le peigne de Dirac ne peut être généré dans la pratique.*

$$\begin{cases} x_p(t) = x(t) \times p(t) \\ X_p(f) = X(f) * P(f) \end{cases}$$

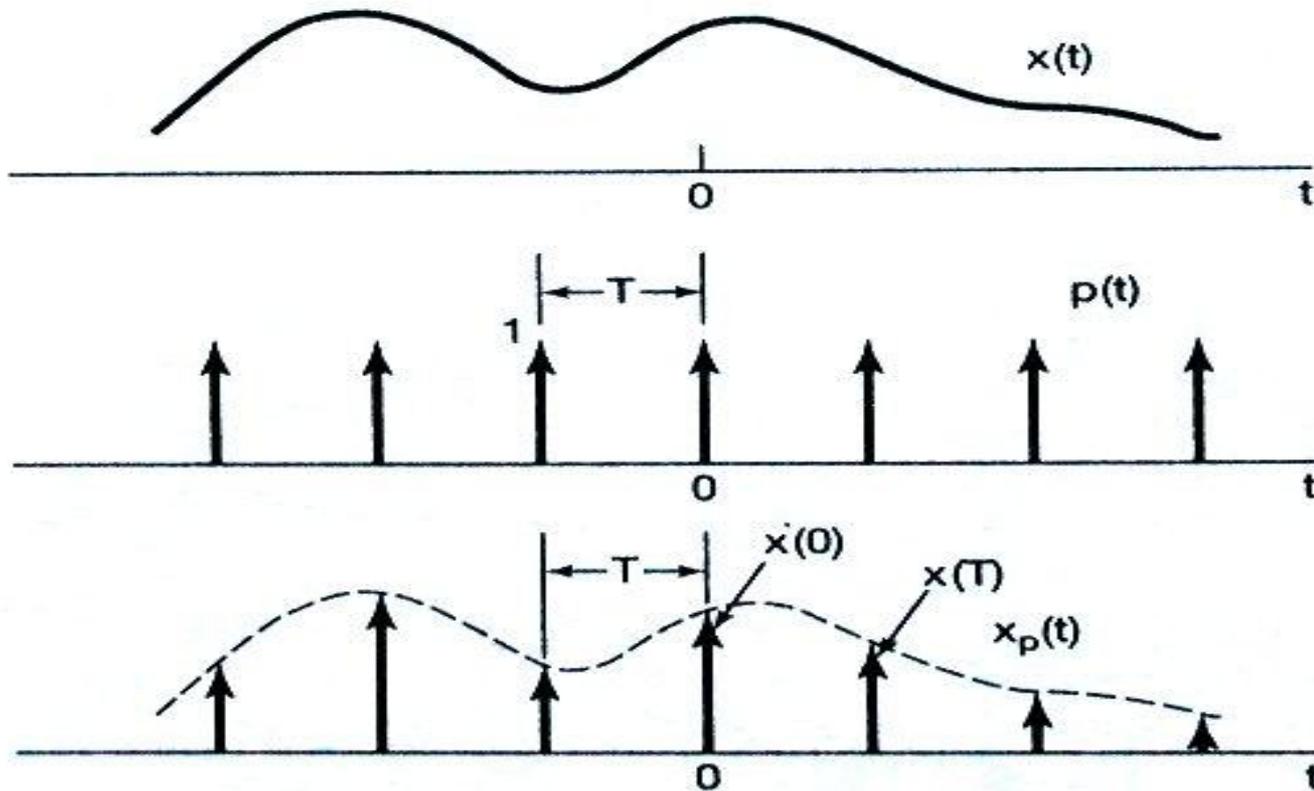
*L'échantillonnage est une multiplication dans le domaine temporelle du signal analogique par un peigne de Dirac. Dans le domaine spectral ça sera un produit de convolution.*

$$\text{où } p(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

## ECHANTILLONNAGE THEORIQUE

*Domaine temporel:*

$$x_p(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$



## ECHANTILLONNAGE THEORIQUE

*Domaine fréquentiel:*

$$x(t) \xleftrightarrow{TF} X(f)$$

$$p(t) \xleftrightarrow{TF} P(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_e)$$

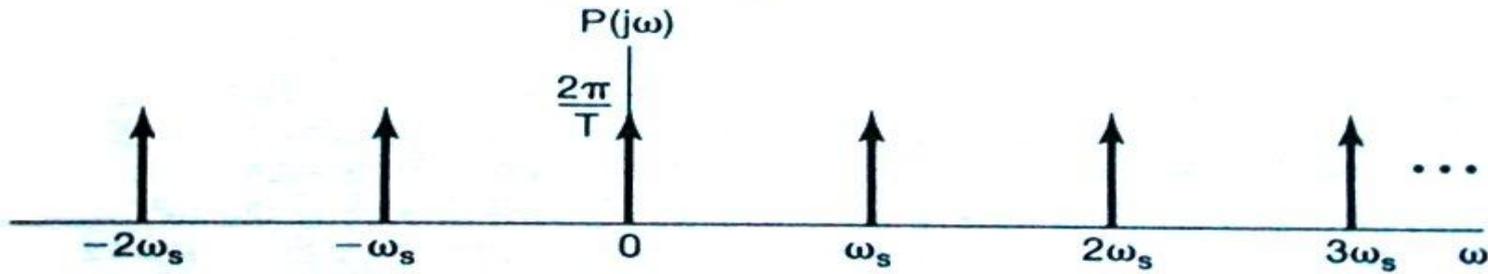
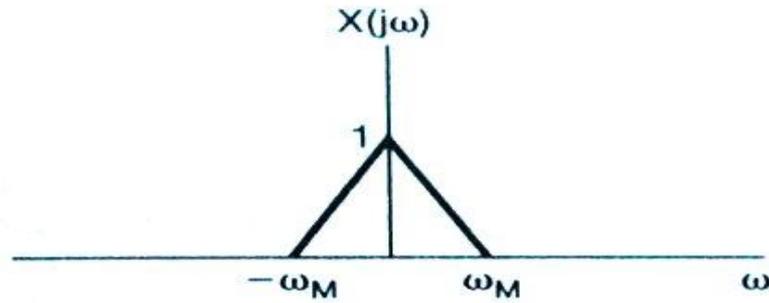
$$x_p(t) \xleftrightarrow{TF} X_p(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_e) = f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_e)$$

*On remarque donc que le spectre du signal échantillonné est périodisé avec une période égale à  $f_e$*

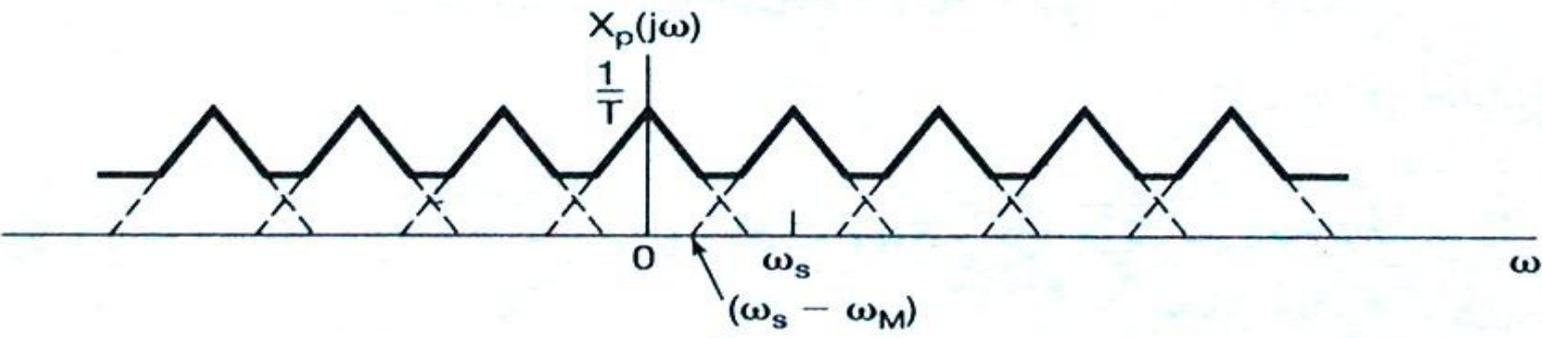
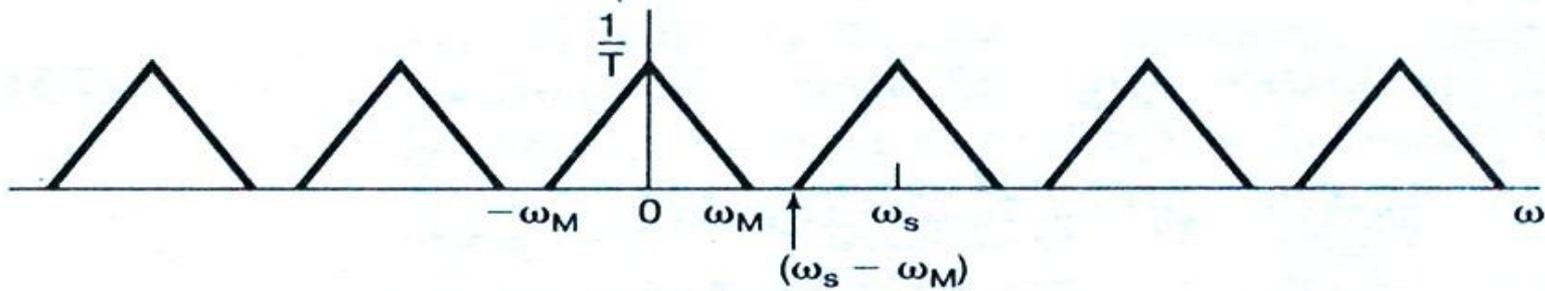
*Ceci confirme bien la propriété de la transformée de Fourier:*

*Périodiser dans un domaine (temporel ou fréquentiel) revient à échantillonner dans l'autre domaine (fréquentiel ou temporel).*

# ECHANTILLONNAGE



$$X_p(f) = X(f) * P(f)$$



## THEOREME DE L'ECHANTILLONNAGE

### *Théorème:*

Soit un signal  $x(t)$  supposé à bande limitée  $X(f) = 0$ ,  $|f| > f_M$

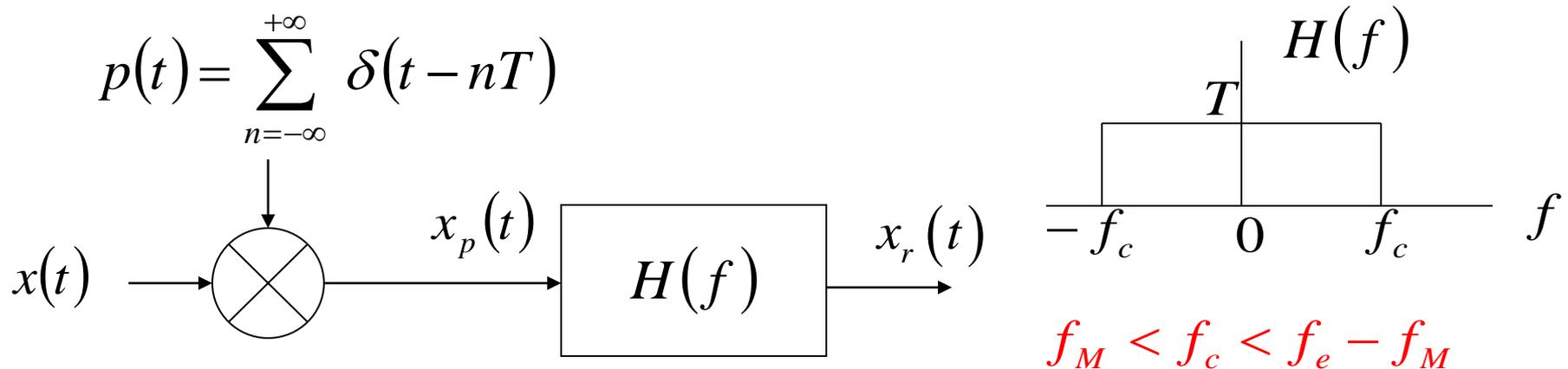
alors  $x(t)$  pourra être déterminé uniquement par ses échantillons

$$x(nT), n = 0, \pm 1, \Lambda \quad \text{if} \quad f_e > 2f_M \quad \text{où} \quad f_e = \frac{1}{T}$$

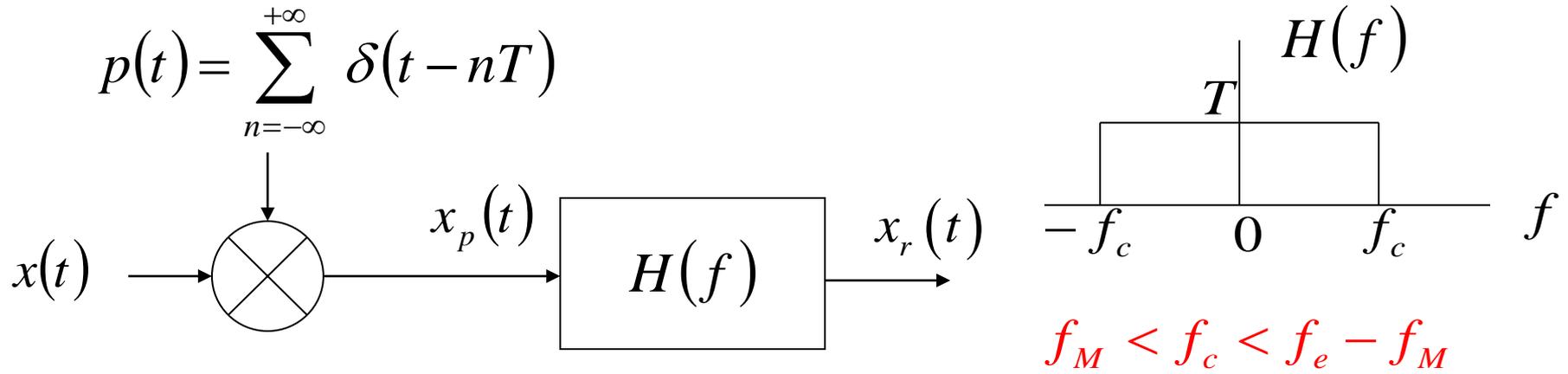
## La reconstruction du signal analogique

Pour convertir un signal échantillonné en un signal analogique il suffit d'éliminer la périodisation de son spectre et garder que la période principale. Ceci peut être obtenu par un filtre passe-bas.

Si on suppose au départ que le filtre de reconstruction, appelé aussi filtre interpolateur, est idéal (réponse fréquentielle sous forme d'une fenêtre rectangulaire).



## La reconstruction du signal analogique

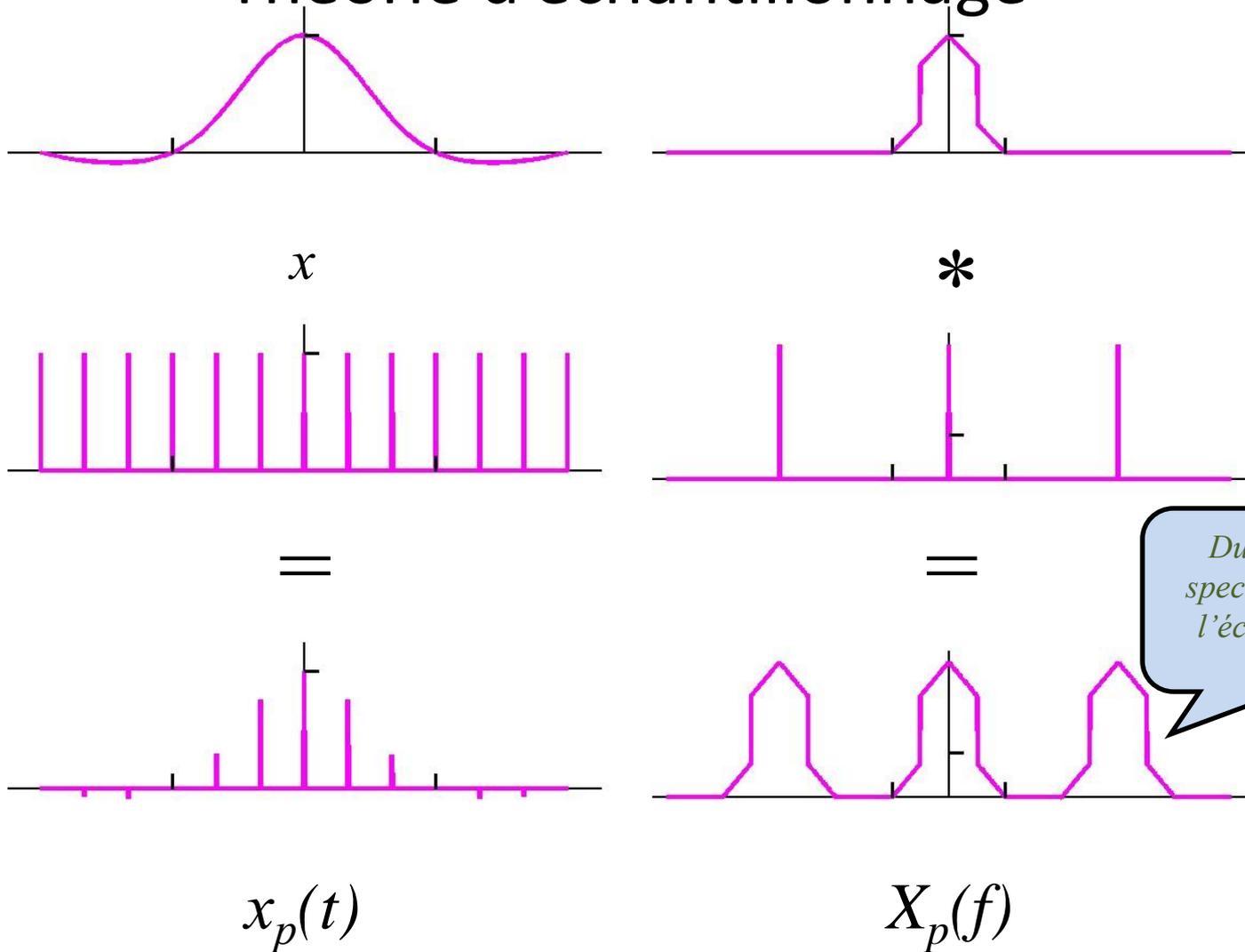


$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT) * TF^{-1} \left( T \operatorname{rect} \left( \frac{f}{2f_c} \right) \right)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT) * 2f_c T \operatorname{sinc}(2f_c t)$$

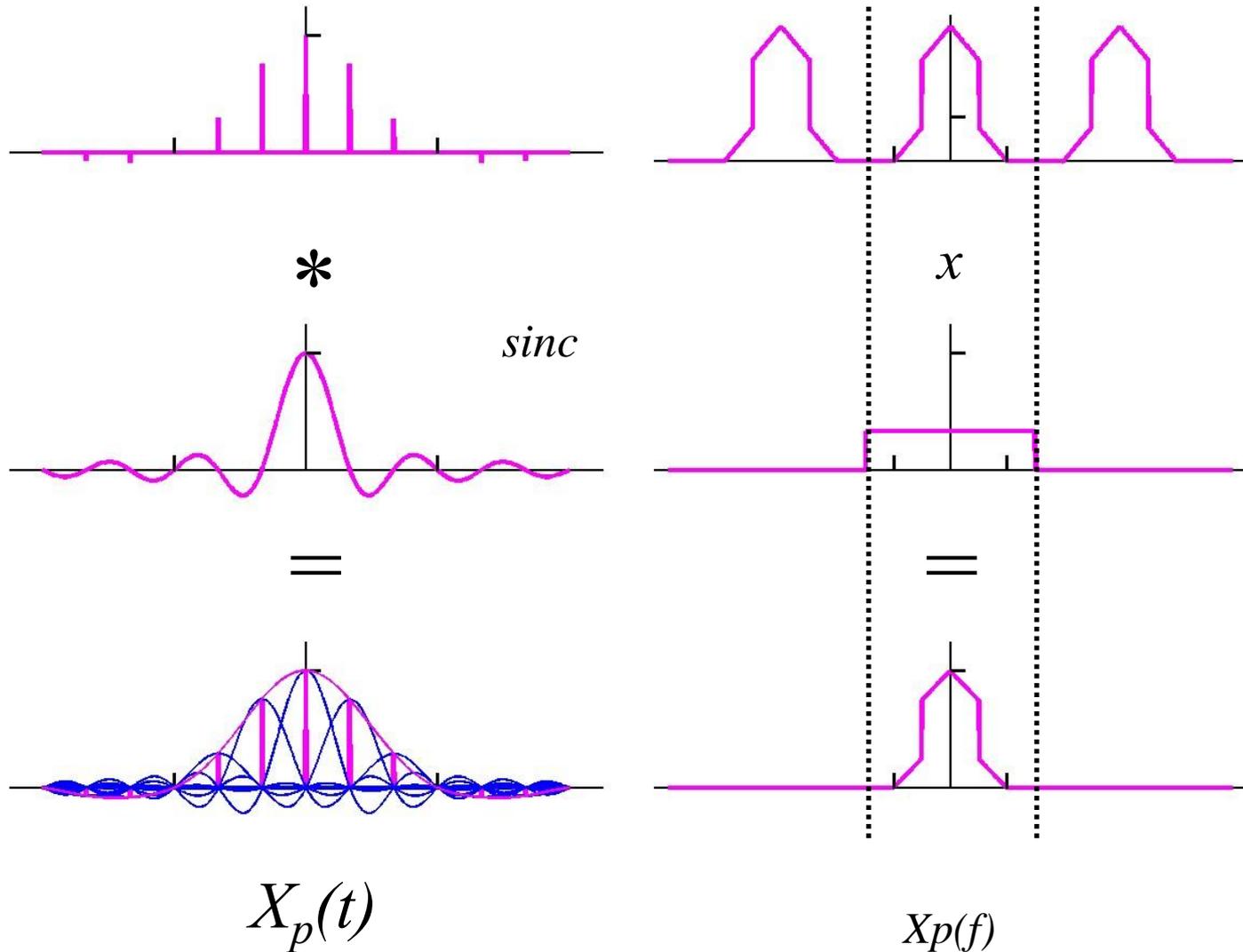
$$x(t) = 2f_c T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \operatorname{sinc}(2f_c t - nT)$$

# Théorie d'échantillonnage

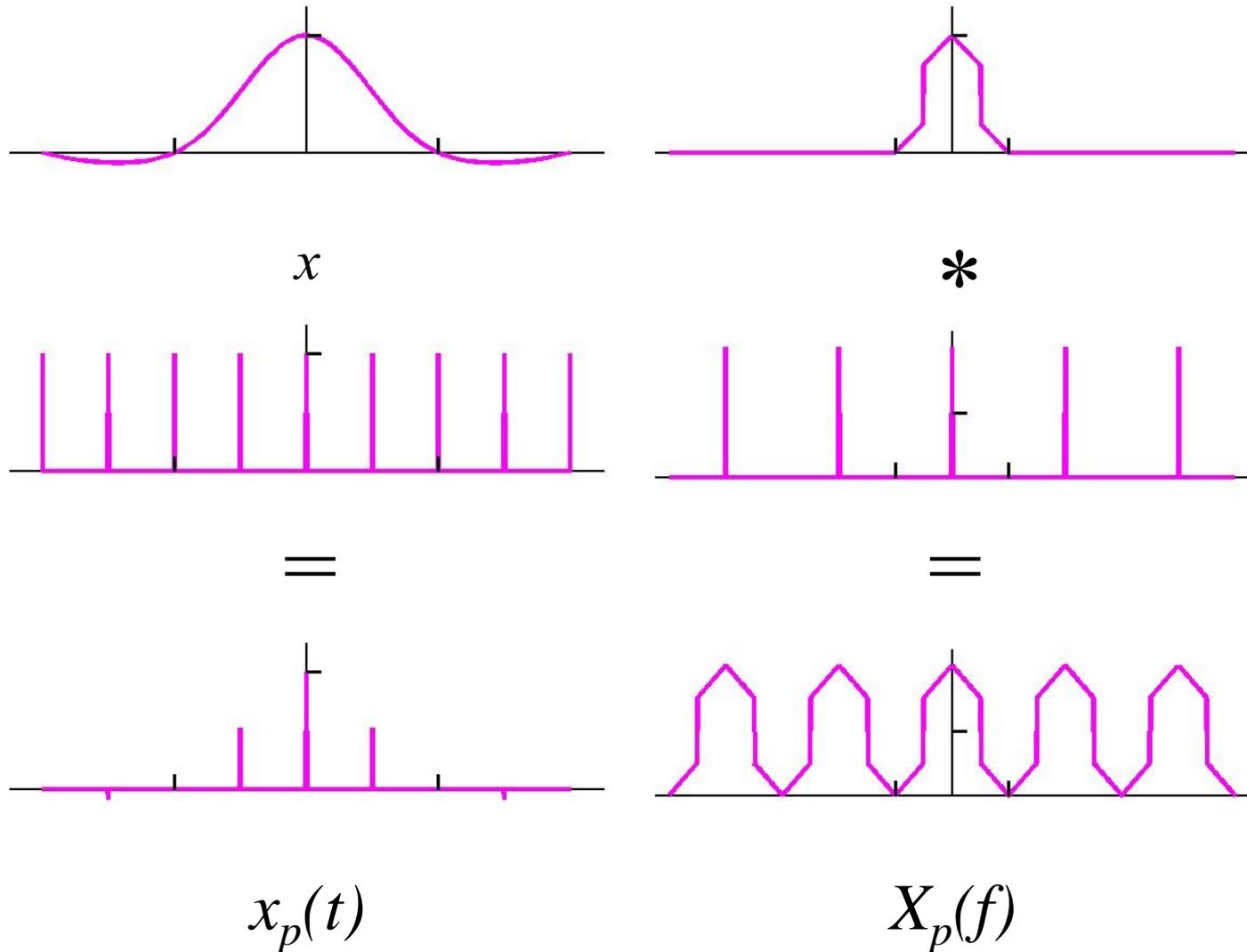


*Duplication des spectres à cause de l'échantillonnage*

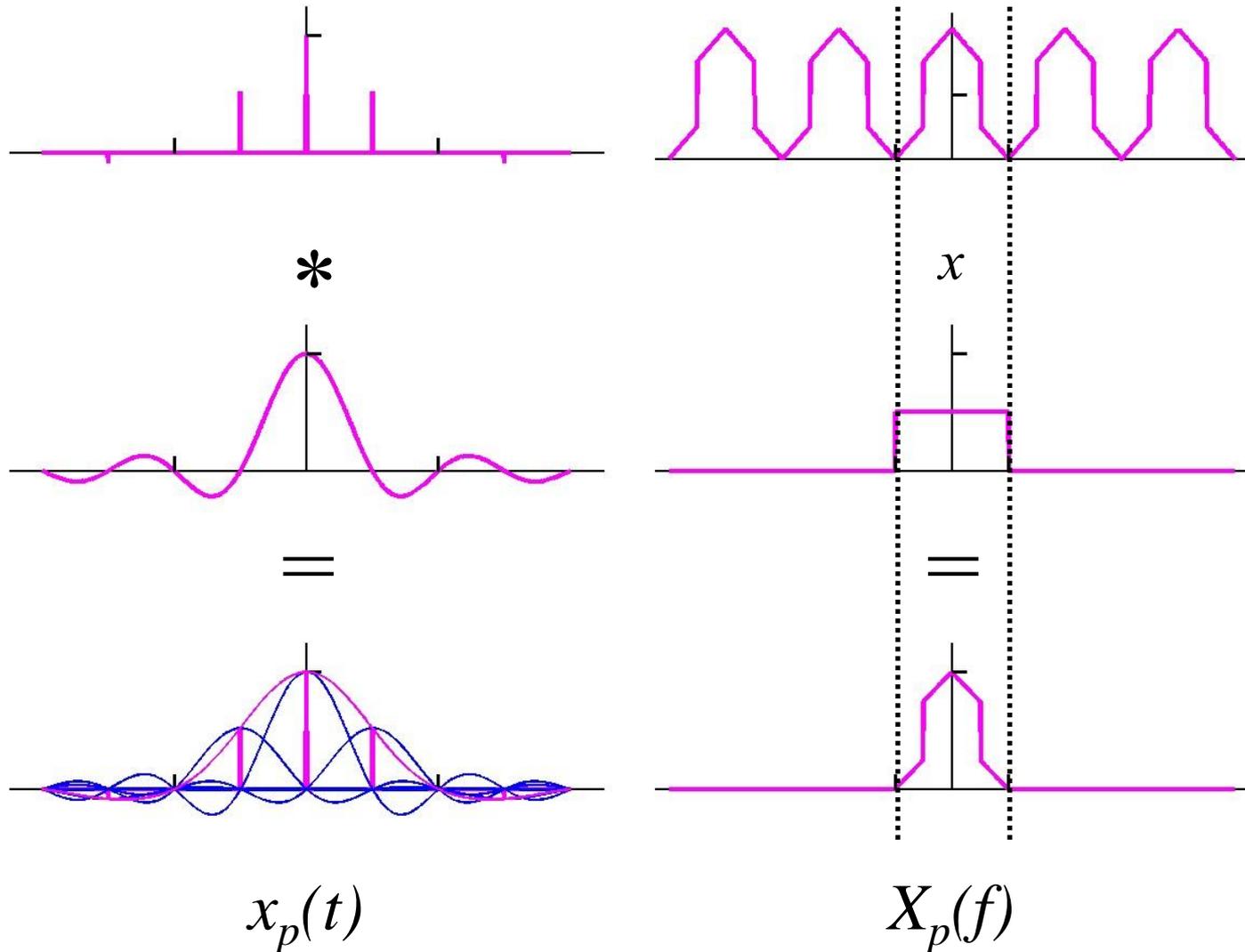
# Théorie de la Reconstruction



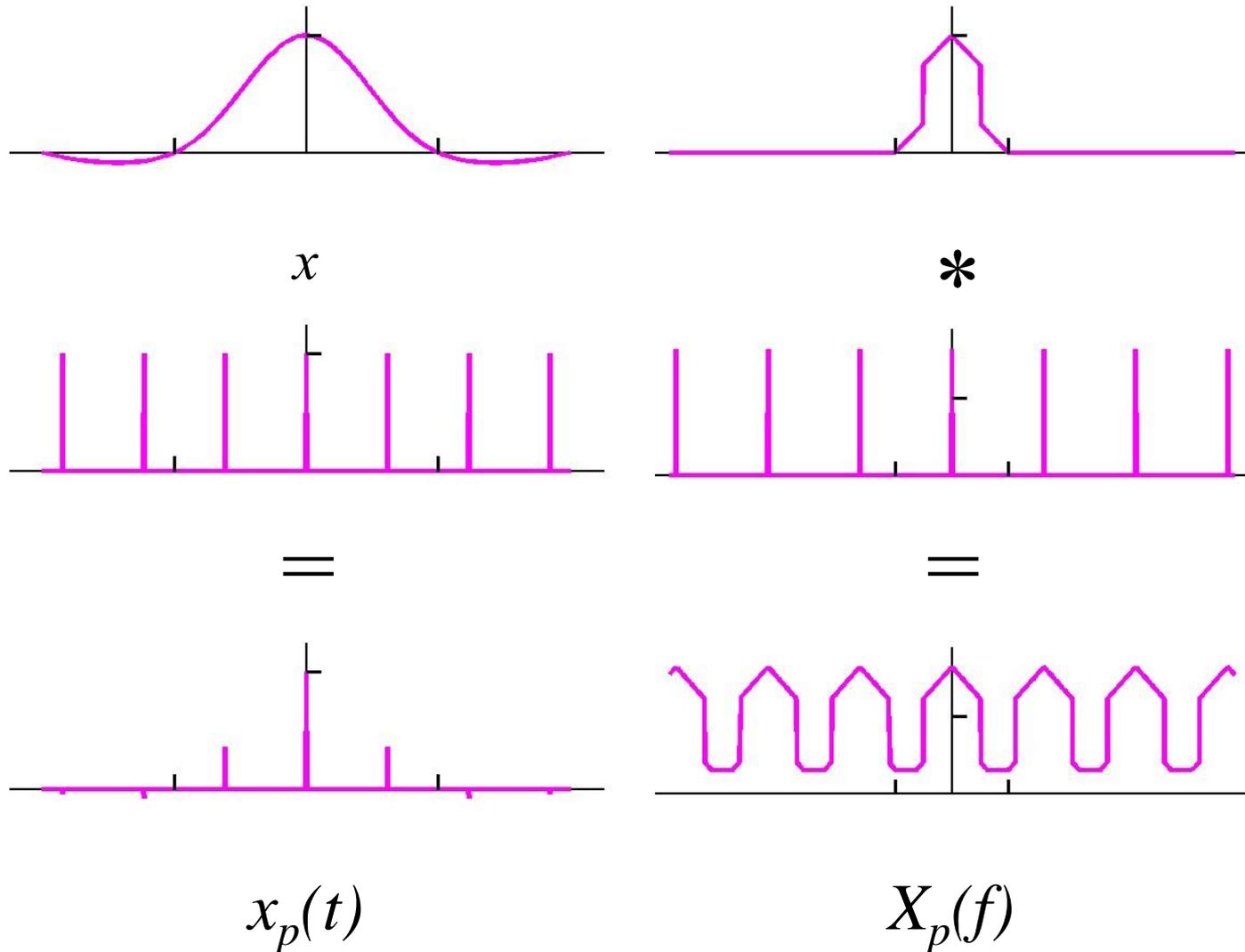
# Echantillonnage à la fréquence de Nyquist



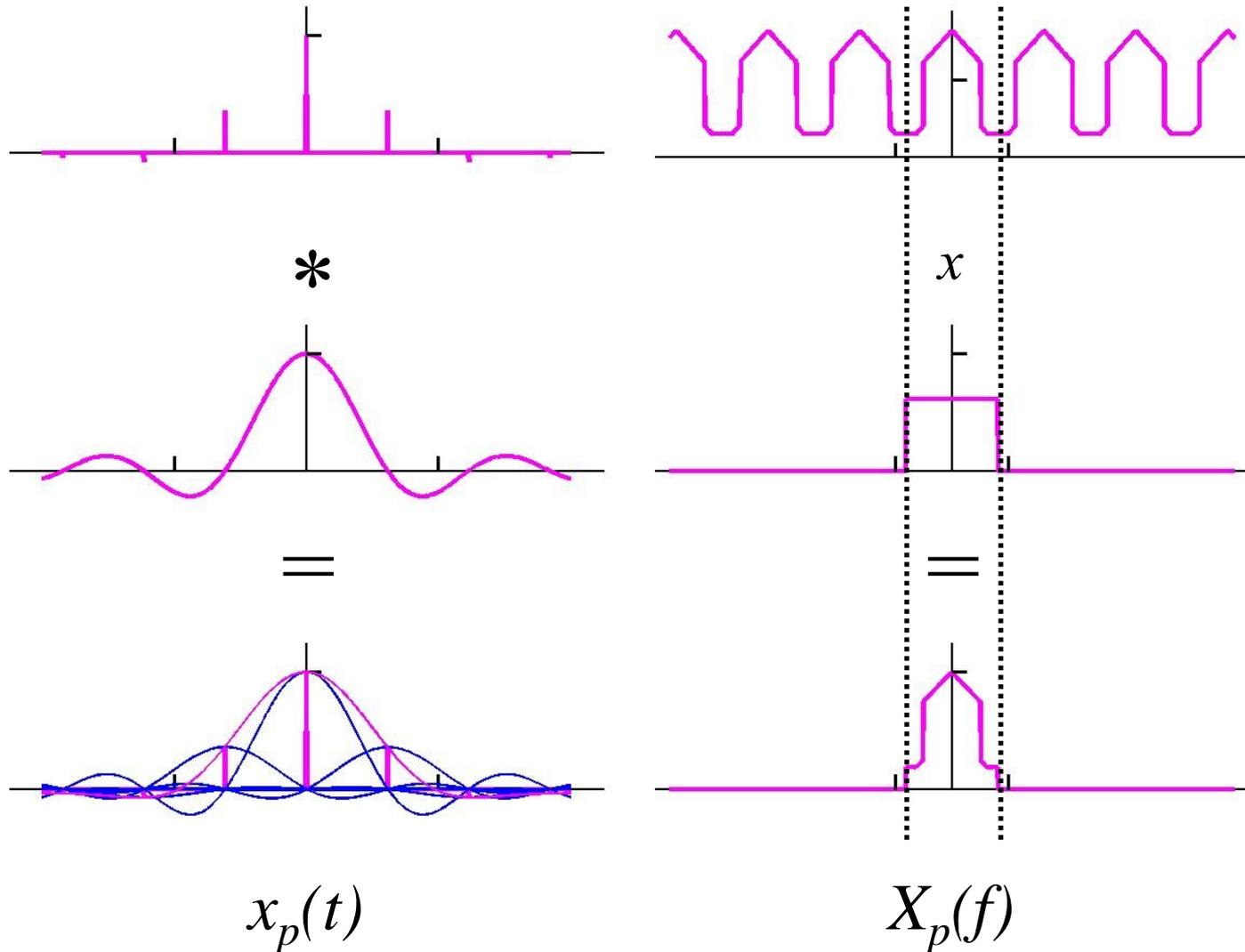
# Reconstruction à la fréquence de Nyquist



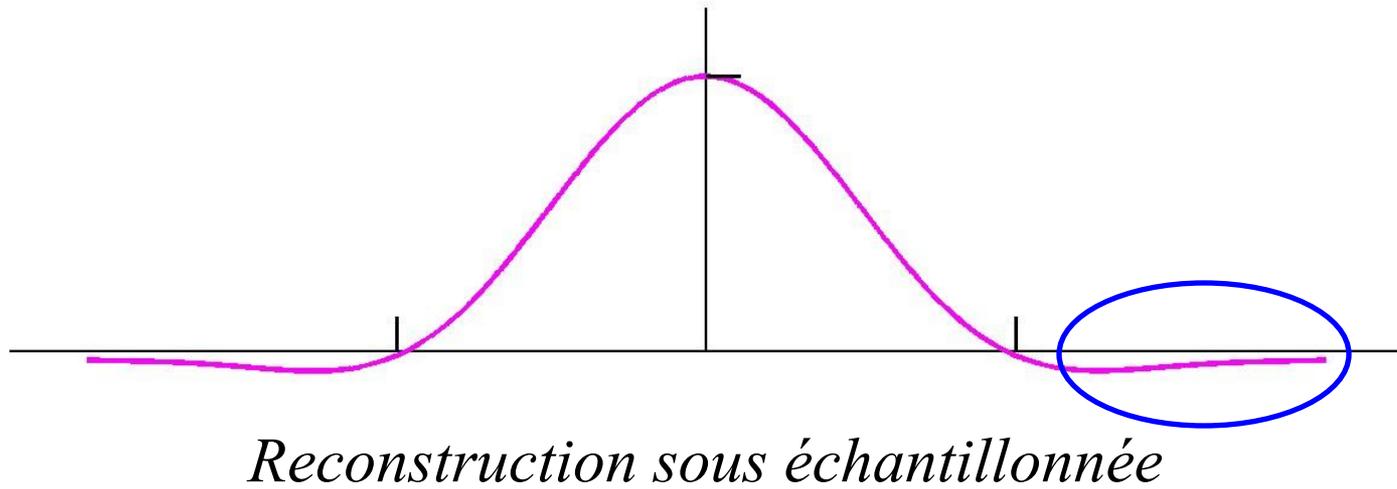
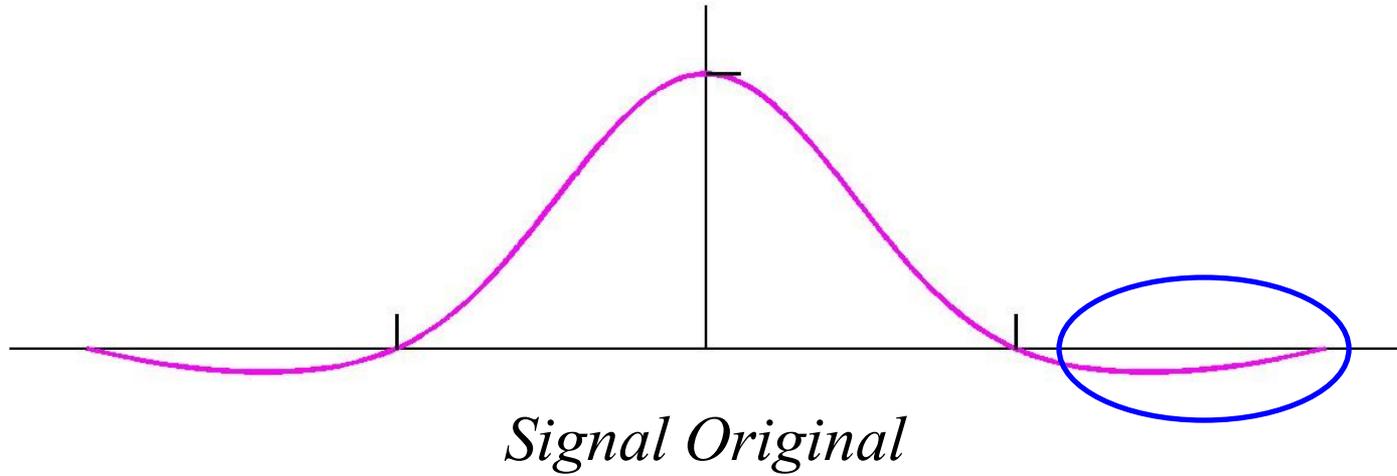
# Echantillonnage au dessous la fréquence de Nyquist



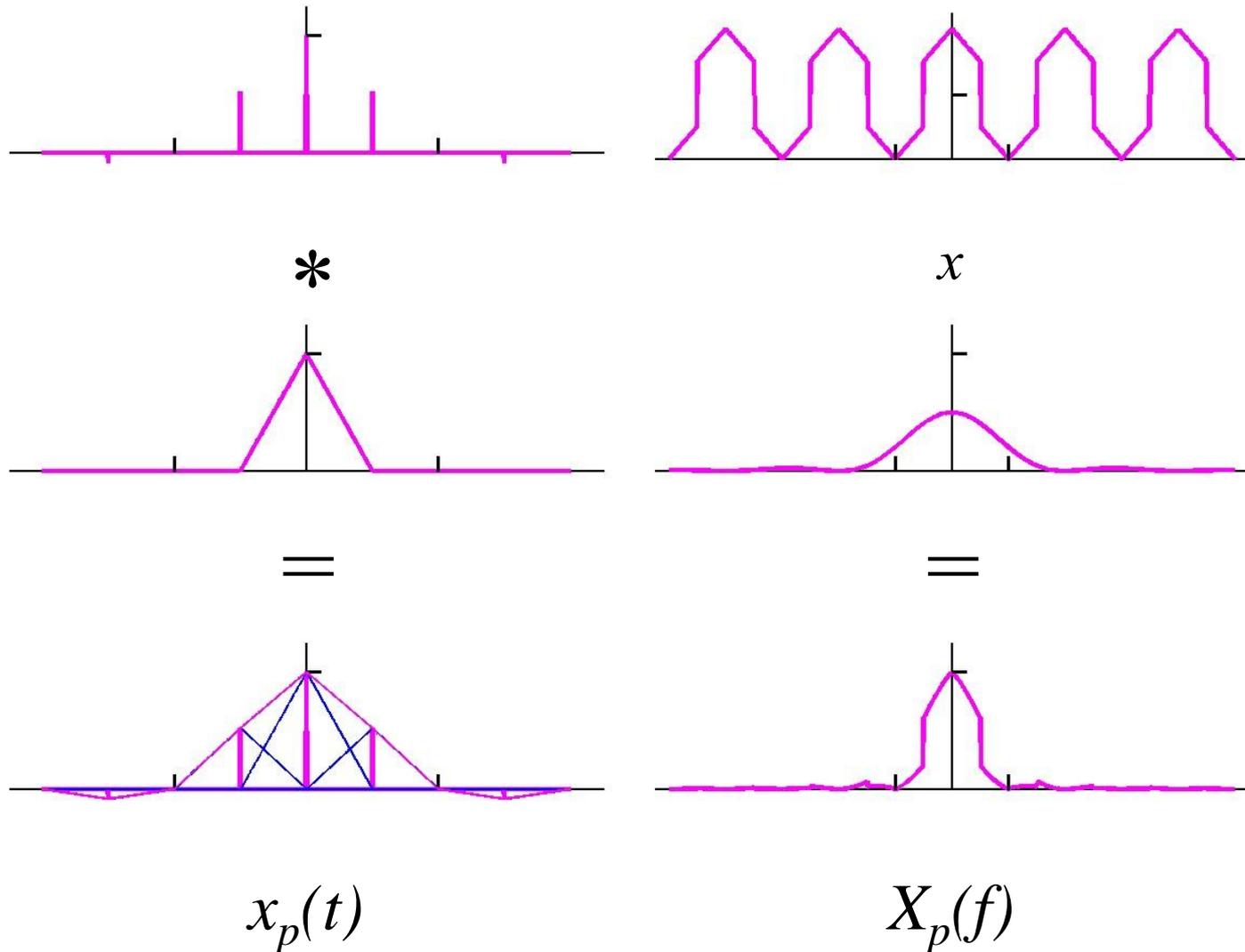
# Reconstruction au dessous la fréquence de Nyquist



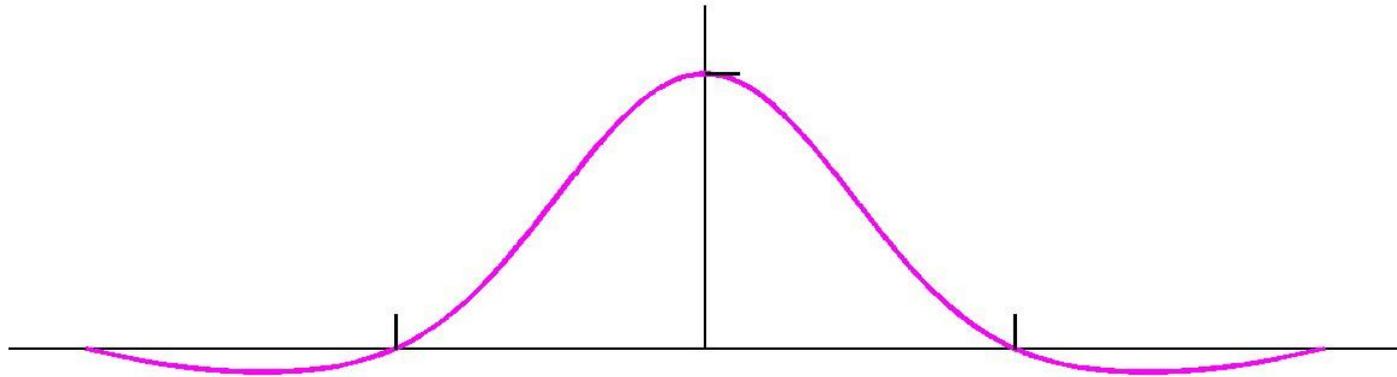
## Erreur de Reconstruction



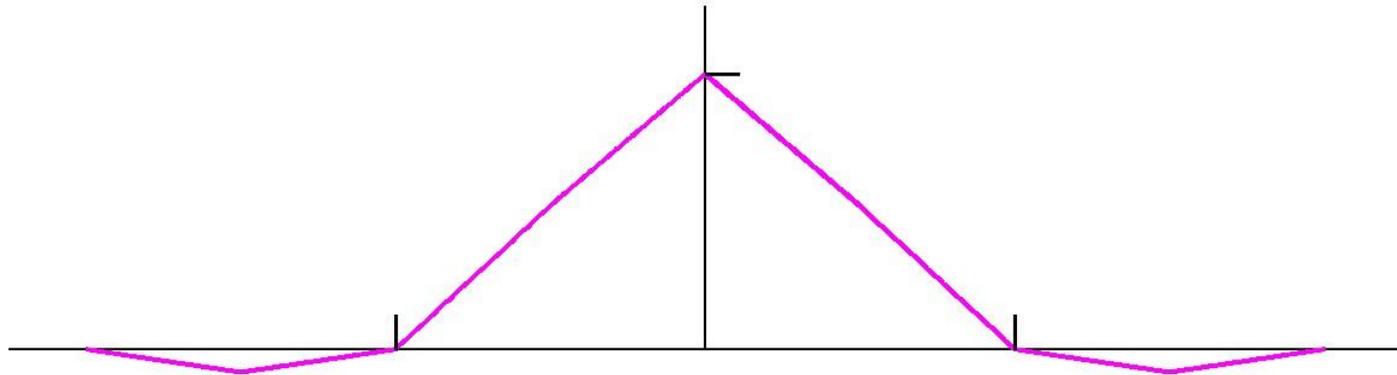
# Reconstruction avec une fenêtre triangulaire



## Erreur de Reconstruction

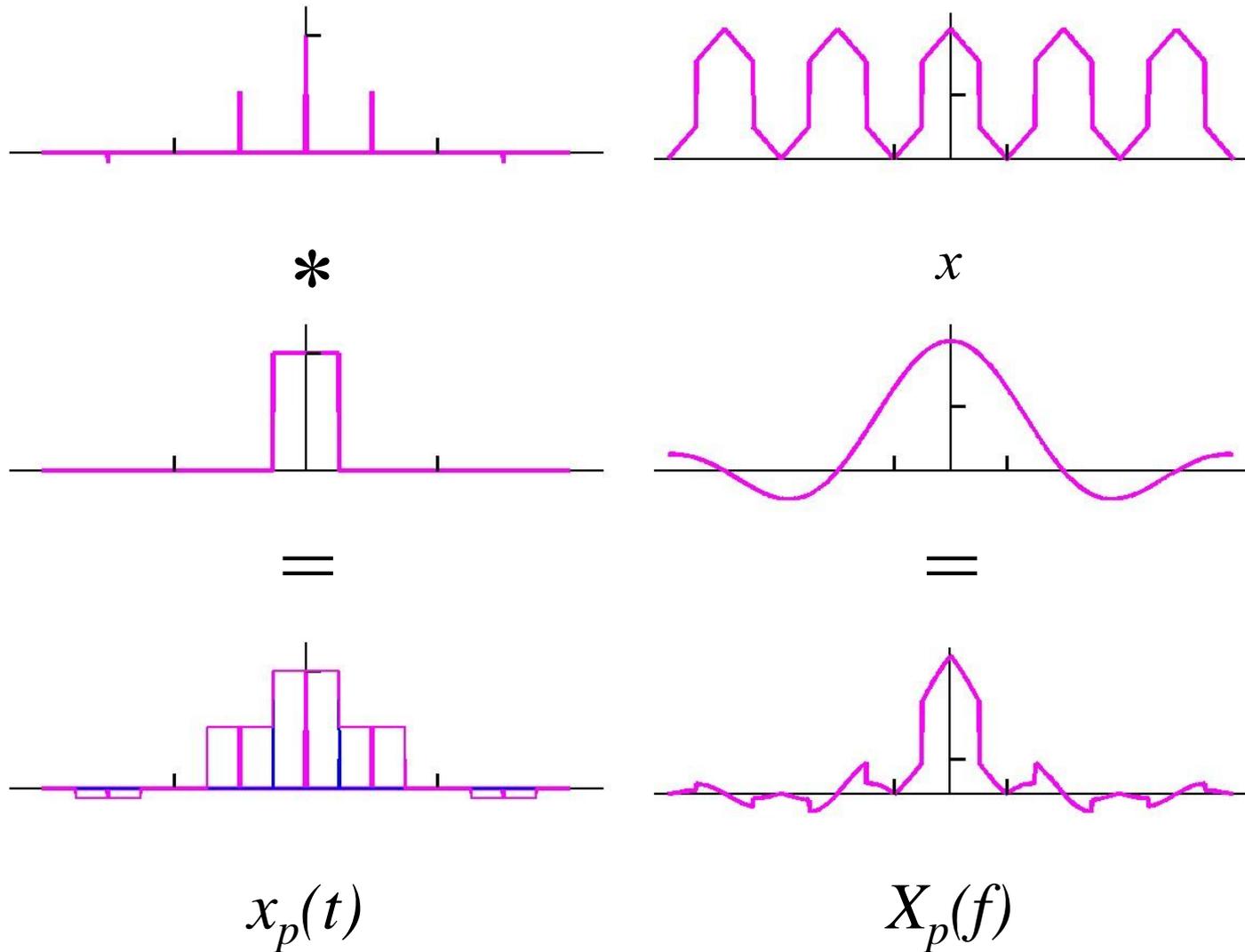


*Signal Original*

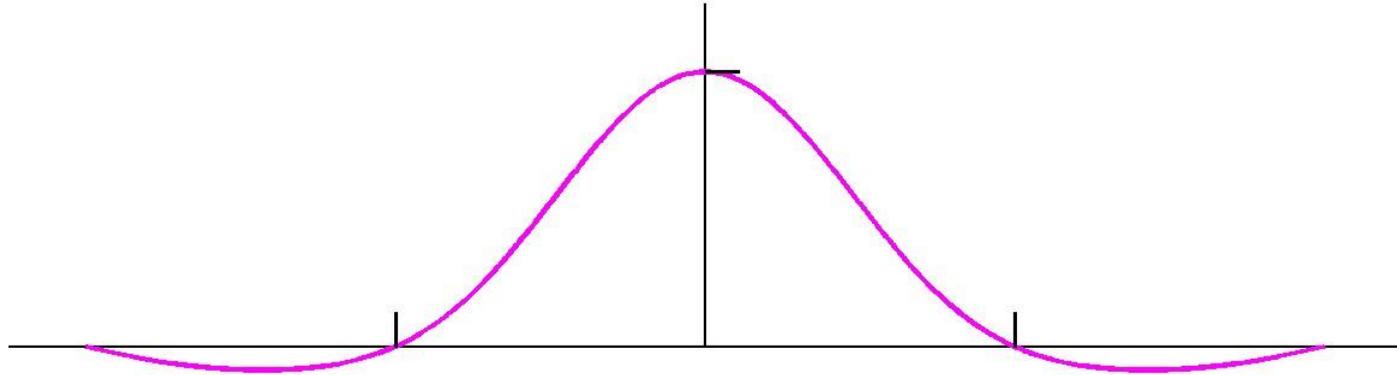


*Reconstruction du Triangle*

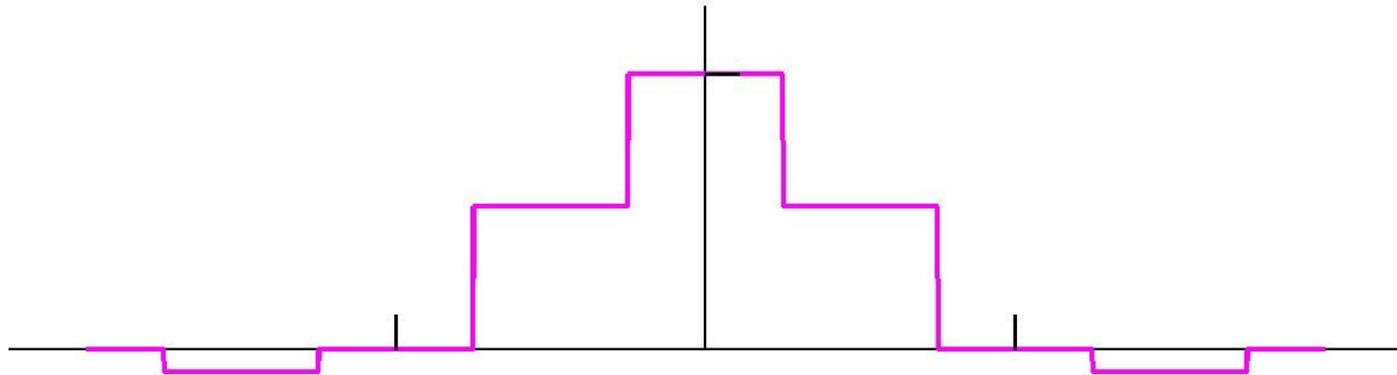
# Reconstruction avec une fenêtre rectangulaire



## Erreur de Reconstruction



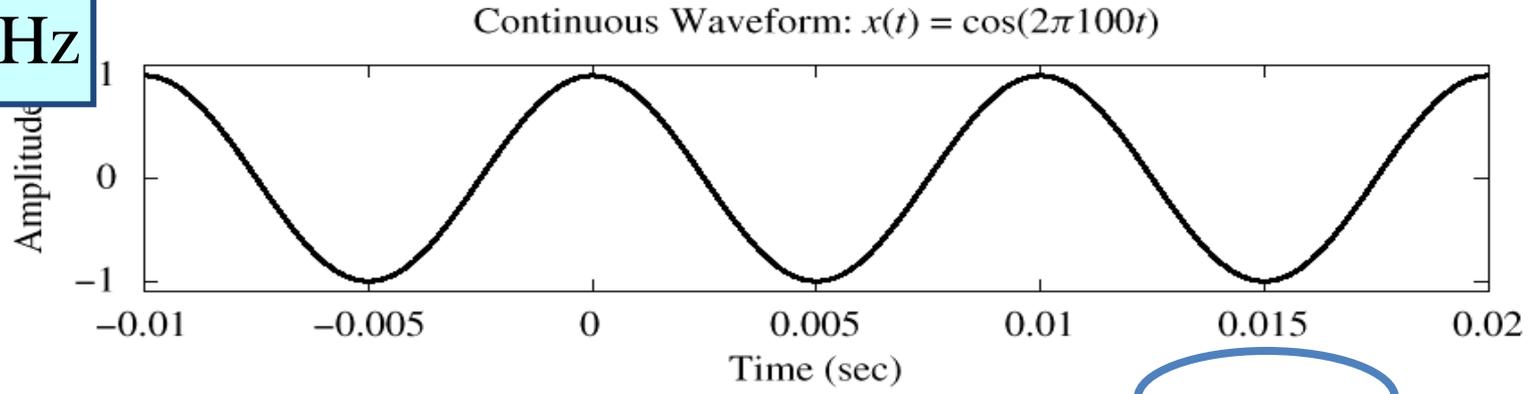
*Signal Original*



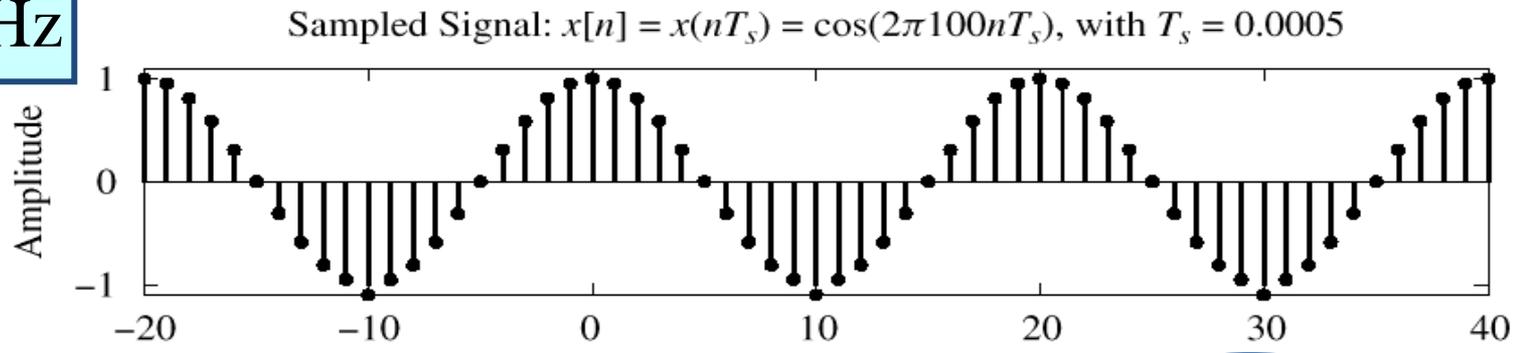
*Reconstruction Rectangle*

# Echantillonnage d'une sinusoïde

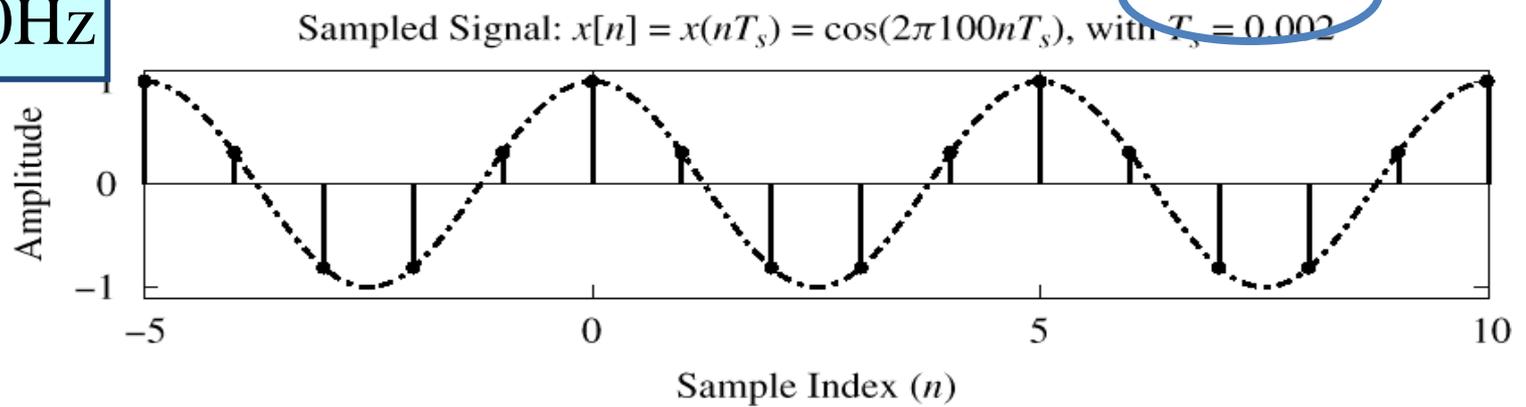
$$f = 100\text{Hz}$$



$$f_e = 2\text{kHz}$$



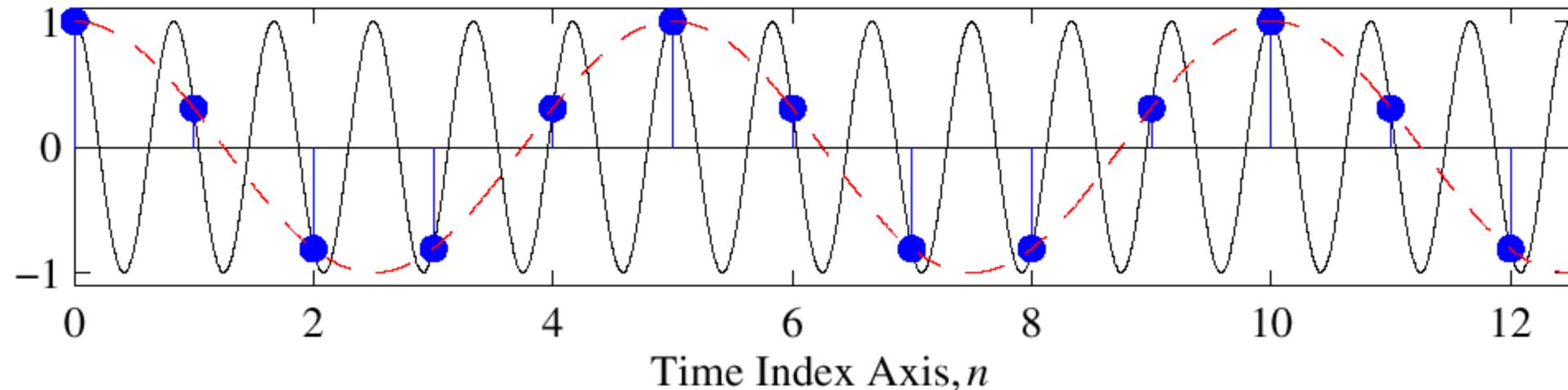
$$f_e = 500\text{Hz}$$



# Reconstruction de la sinusoïde? Oui mais laquelle

*Compte tenu des échantillons (en bleu), dessiner une sinusoïde à travers les valeurs*

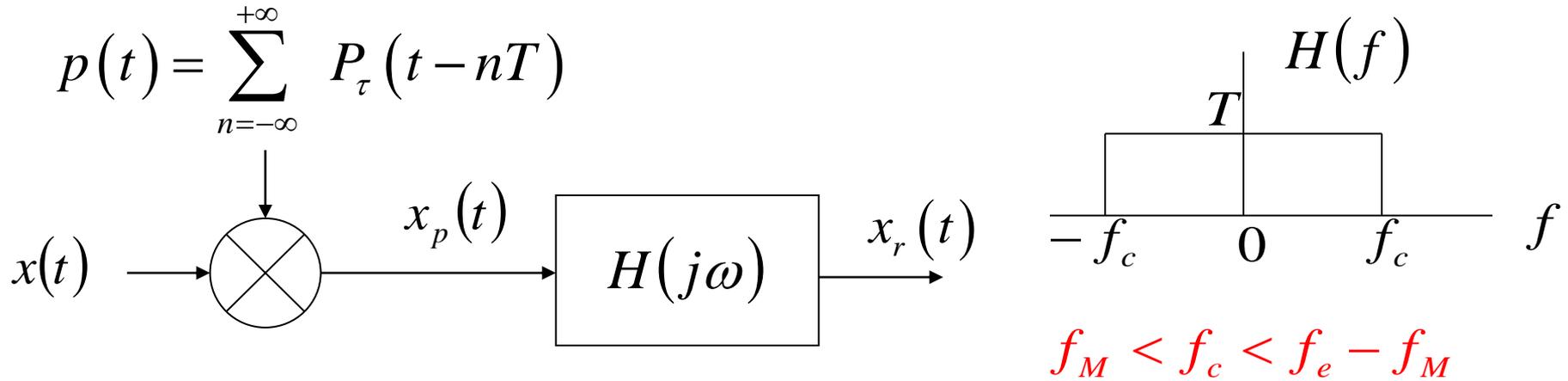
Two continuous cosine functions drawn through the same samples



$$x[n] = \cos(0.4\pi n)$$

Quand  $n$  est un entier  
 $\cos(0.4\pi n) = \cos(2.4\pi n)$

## ECHANTILLONNAGE NATUREL

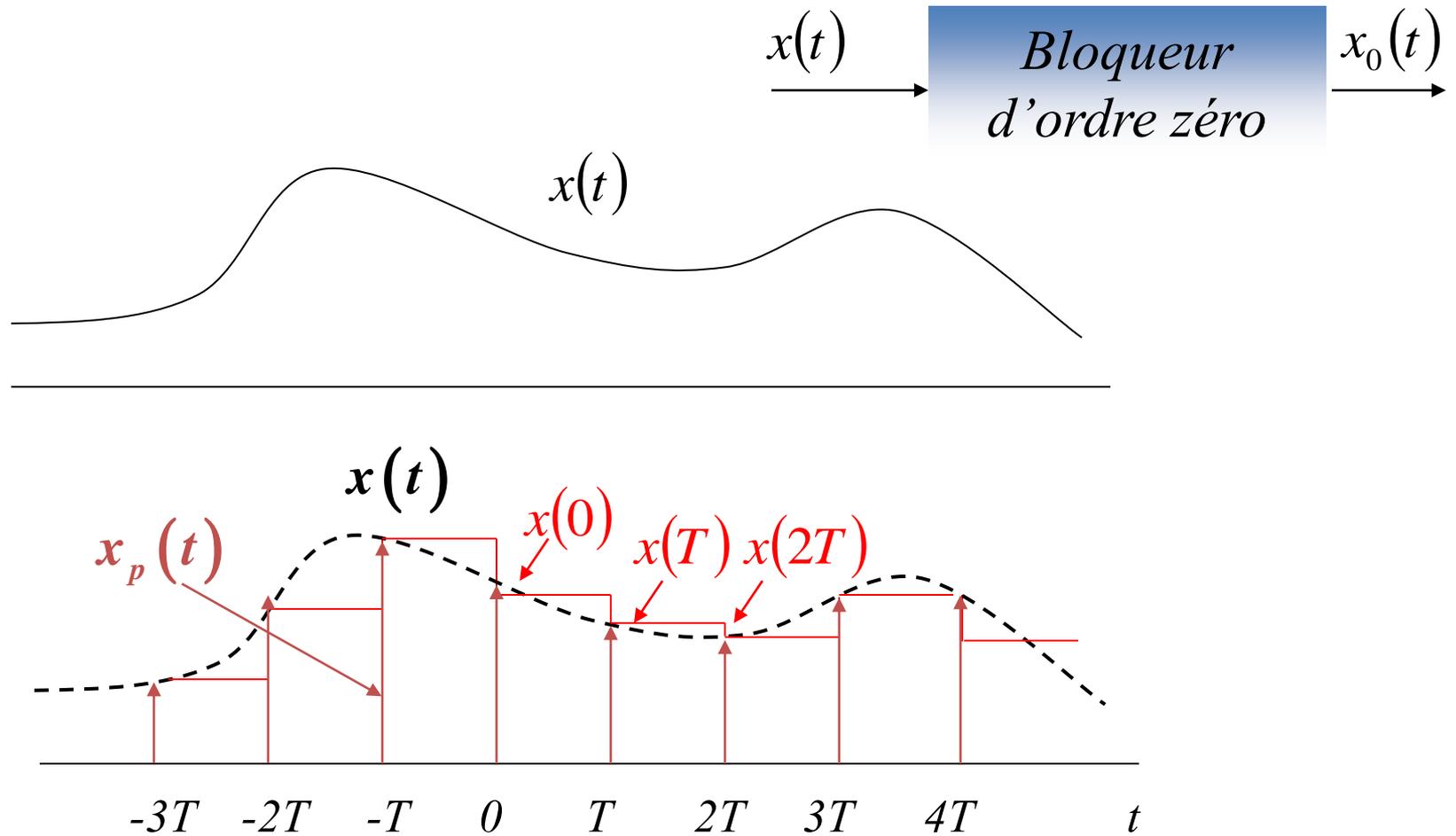


$$x_r(t) = \left\{ x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_{\tau}(t - nT) \right\} * h(t)$$

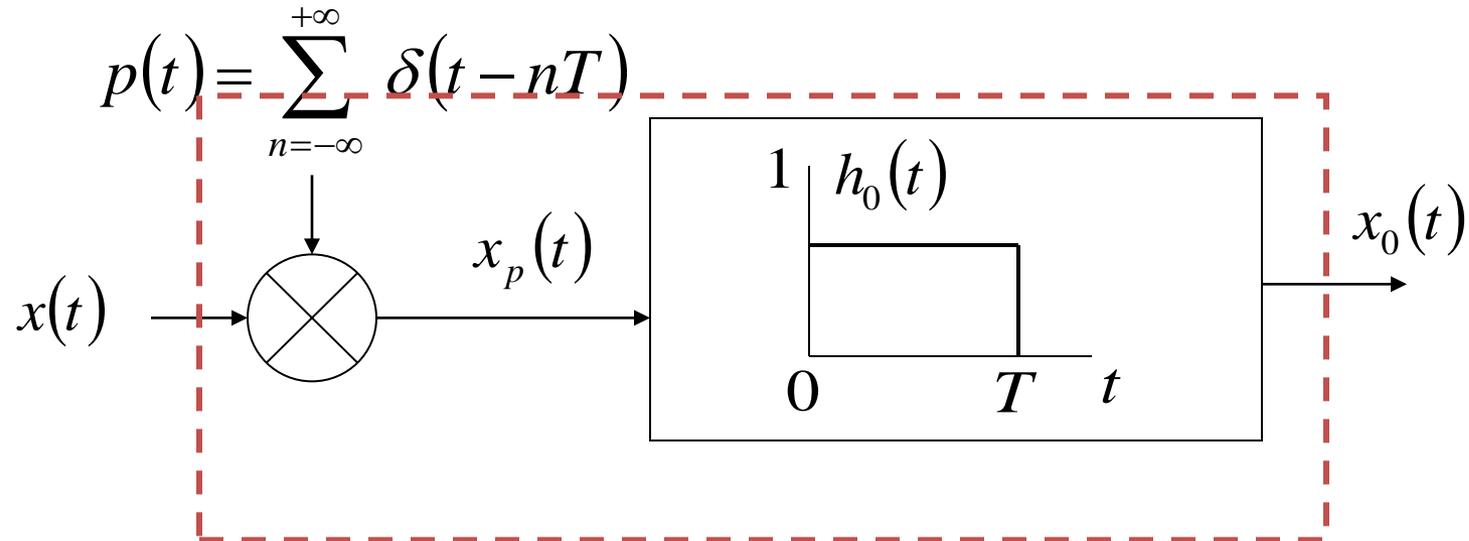
*Difficultés:*

- 1 Le filtrage passe-bas idéal est impossible;*
- 2 Les impulsions de faibles largeurs sont difficiles à générer.*

## ECHANTILLONNAGE AVEC BLOQUEUR



## ECHANTILLONNAGE AVEC BLOQUEUR



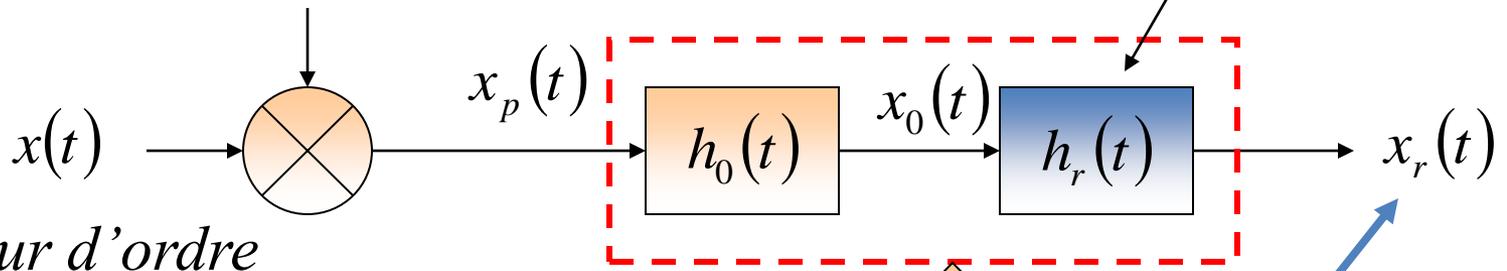
*Bloqueur d'ordre zéro*

$$x_0(t) = x_p(t) * h_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) h_0(t - nT)$$

$$H_o(f) = e^{-j2\pi f T/2} \left[ \frac{2 \sin(2\pi f T / 2)}{2\pi f} \right]$$

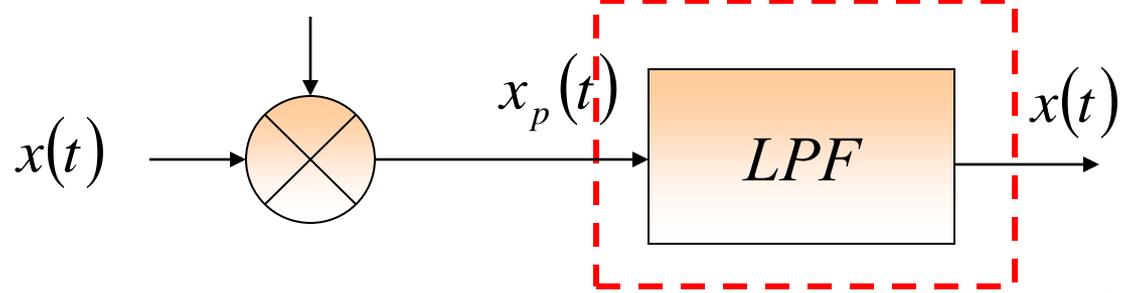
## ECHANTILLONNAGE AVEC BLOQUEUR

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$



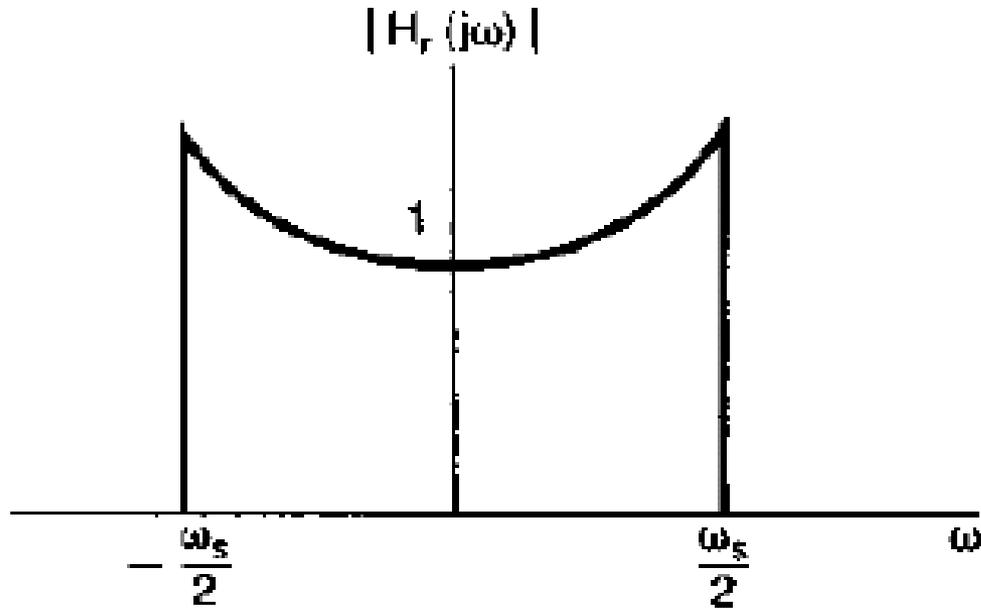
Bloqueur d'ordre zéro

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

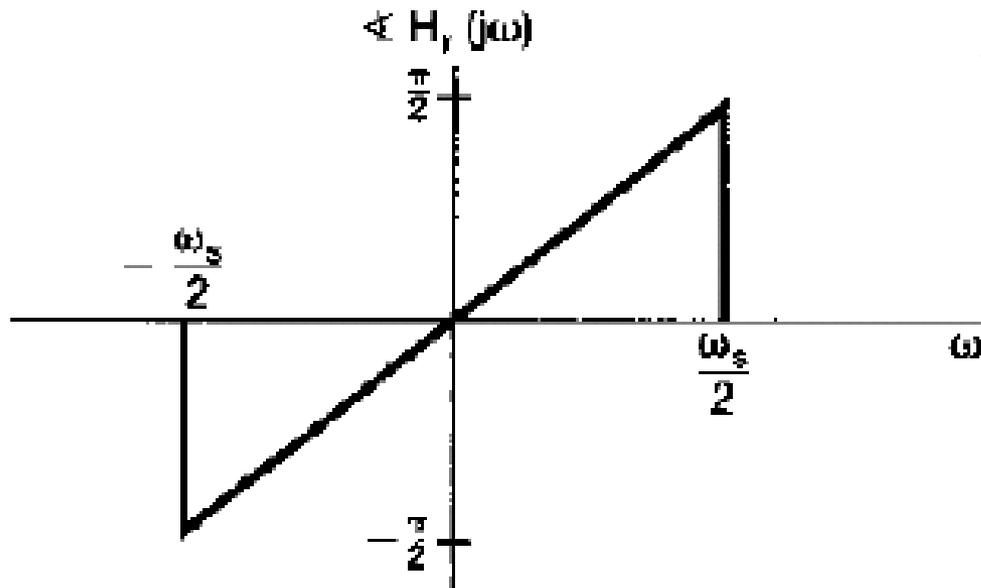


$$x_r(t) = x(t)$$

$$H_r(f) = \frac{e^{j2\pi f T/2} H(j2\pi f)}{2 \sin(2\pi f T / 2)} \quad f_M < f_e < f_f - f_M$$

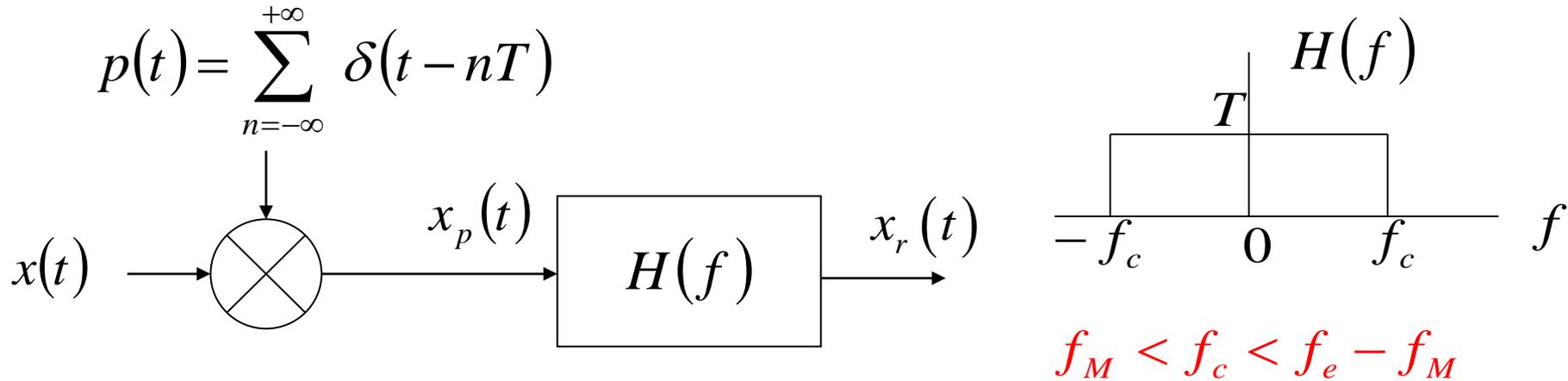


$$H_r(j\omega) = \frac{e^{j2\pi f T/2} H(f)}{2\pi f}$$



## § 7.2 Reconstruction

*Band-limited interpolation*



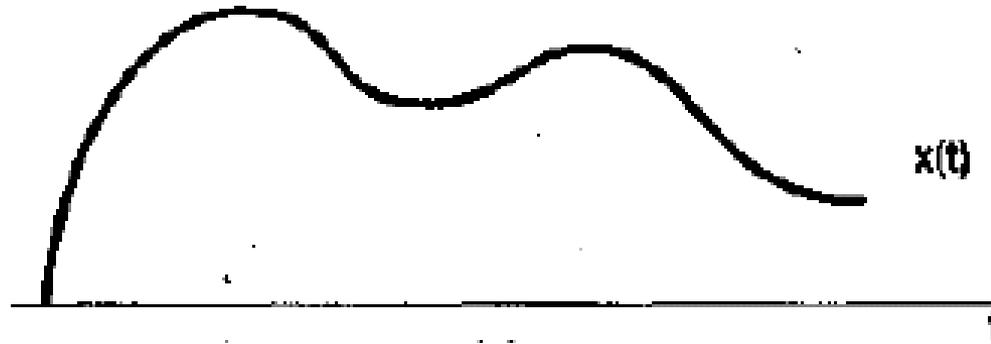
$$x_r(t) = x_p(t) * h(t) \quad h(t) = \frac{T \sin(2\pi f_c t)}{\pi t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x(nT) \delta(t - nT)) * h(t)$$

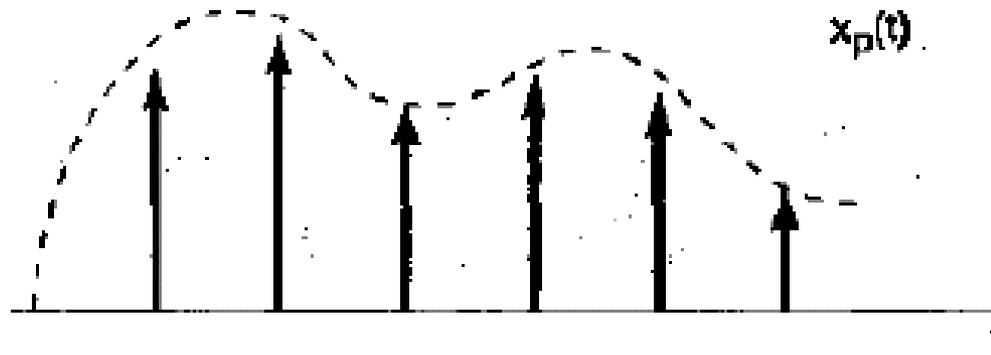
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{T \sin[2\pi f_c (t - nT)]}{\pi (t - nT)}$$

# ECHANTILLONNAGE

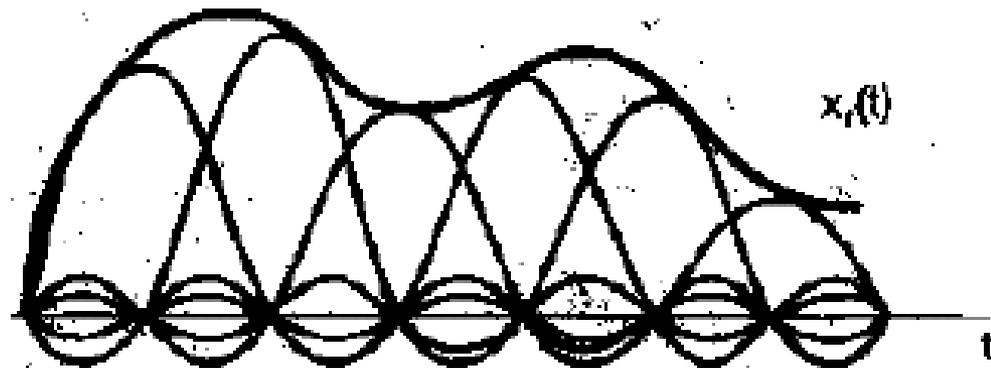
Signal analogique original



Après l'échantillonnage

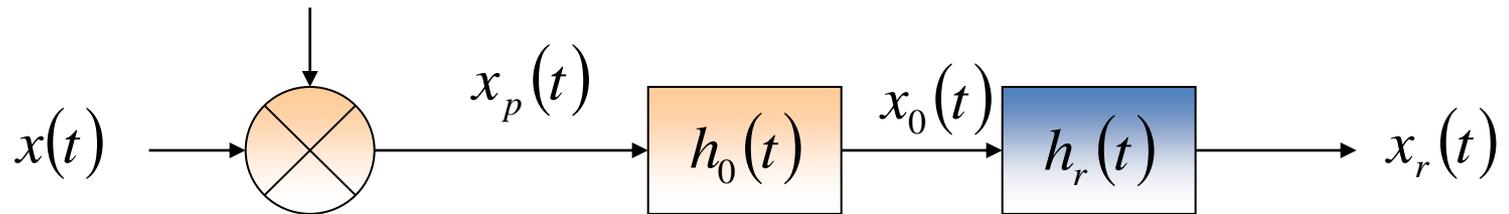


Après le filtrage  
De reconstruction

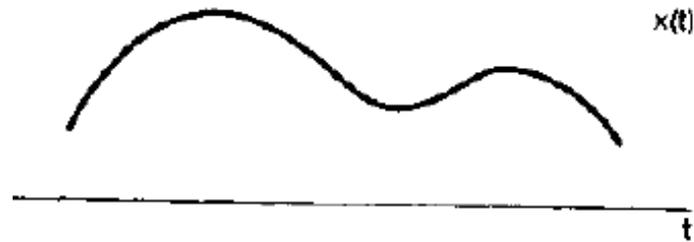


*The Filtre  
passe\_bas  
lisses les  
discontinuités  
et remplit les  
vides*

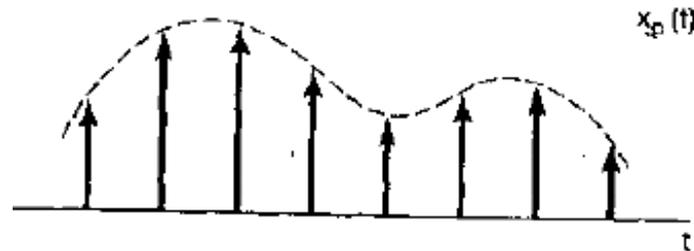
Zero-order hold  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$



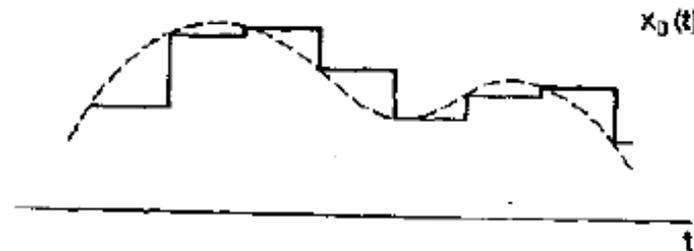
Signal analogique original



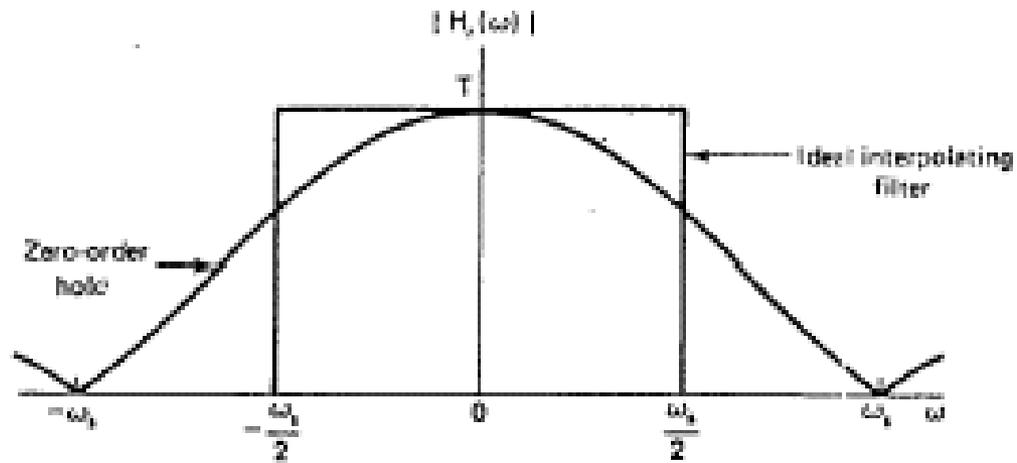
Après l'échantillonnage



Après le passage à travers un bloqueur D'ordre zéro



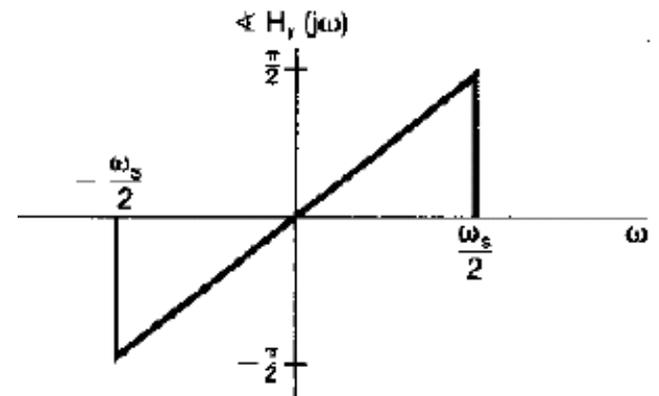
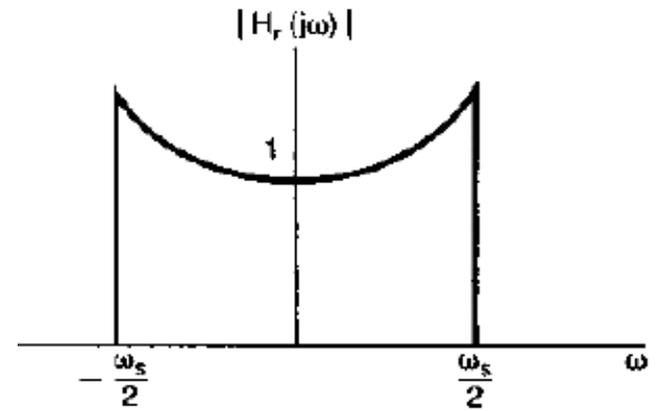
## ECHANTILLONNAGE AVEC BLOQUEUR



*Zero-Order Hold*

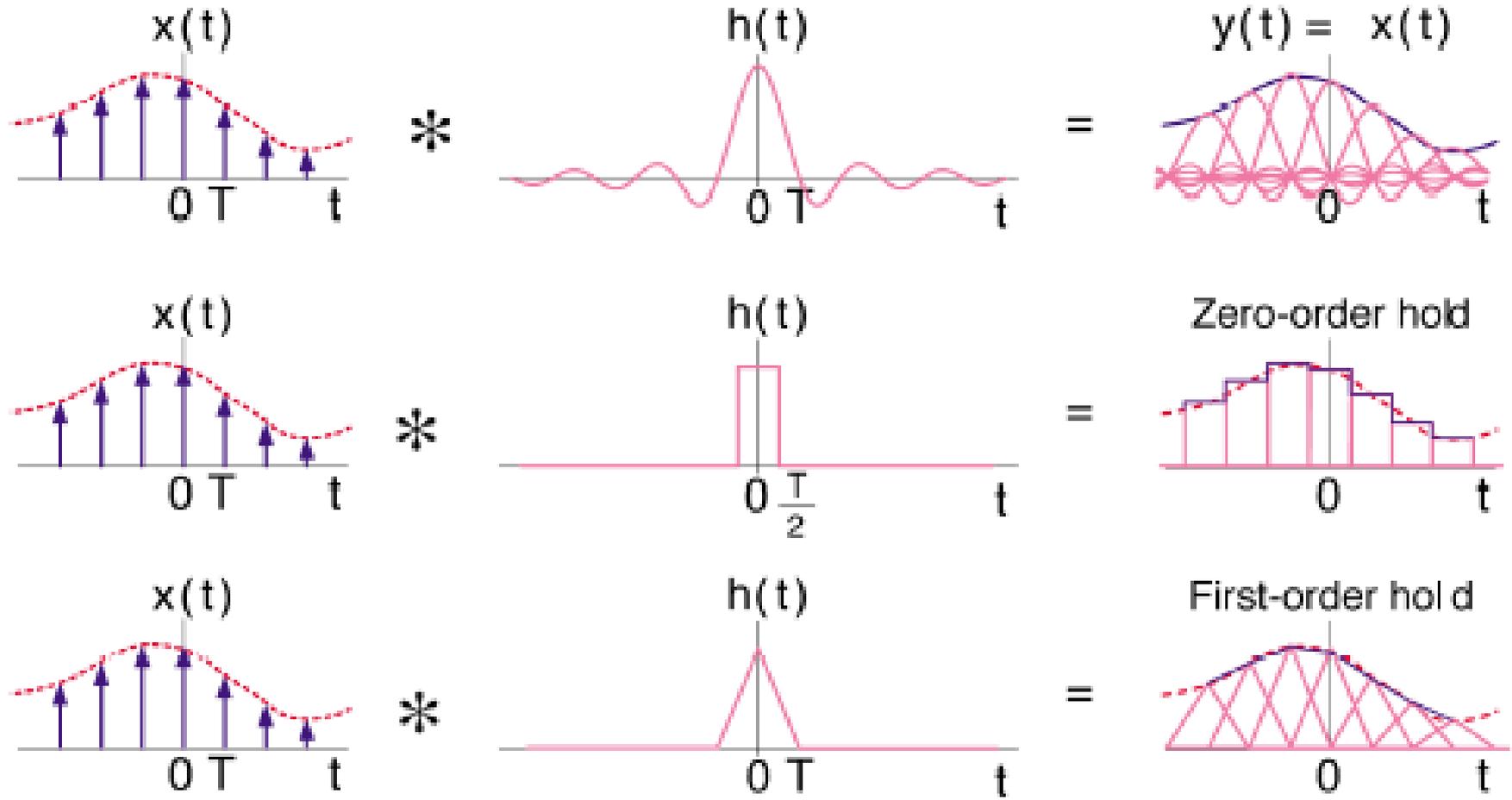
$$H_o(f) = e^{-j2\pi f T/2} \left[ \frac{2 \sin(2\pi f T/2)}{2\pi f} \right] H(f)$$

$$H_r(f) = \frac{e^{j2\pi f T/2} H(f)}{2 \sin(2\pi f T/2)} \\ 2\pi f$$



*Filtre bloqueur  
d'ordre zéro*

## ECHANTILLONNAGE AVEC BLOQUEUR



# **LA TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE**

## **TFD**

# TRANSFORMEES DISCRETES LINEAIRES

*Sous forme discrète ces transformations linéaires représentent un vecteur ou signal  $f(x)$  d'un domaine direct, dans un domaine dit transformé. Ceci en utilisant un noyau de transformation souvent sous forme d'une base de fonctions orthogonale  $\Phi(u,x)$*

## Transformée directe

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)\phi^*(u, x)$$
$$u = 0, 1, \dots, N-1$$

## Transformée Inverse

$$f(u) = \sum_{x=0}^{N-1} F(u)\phi(u, x)$$
$$x = 0, 1, \dots, N-1$$

□ Les transformées discrètes linéaires (orthogonales) nous donnent un spectre discret composé de N coefficients à partir d'un signal discret composé également de N échantillons.

□ La différence entre une transformée linéaire discrète et une autre est le noyau de la transformation que l'on note  $\phi(u,x)$  où x est la variable du domaine direct et u la variable du domaine transformée.

□ Plusieurs exemples de transformées linéaires discrètes sont utilisées à l'instar de la TFD (Transformée de Fourier Discrète) TCD (Transformée en Cosinus Discrète), DST (Transformée en Sinus Discrète), ...etc

# TRANSFORMEES DISCRETES LINEAIRES

## ■ TF 1D : Continue

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi jxu) \, dx$$

$x$  : variable continue du domaine direct

$u$  : variable continue du domaine transformé

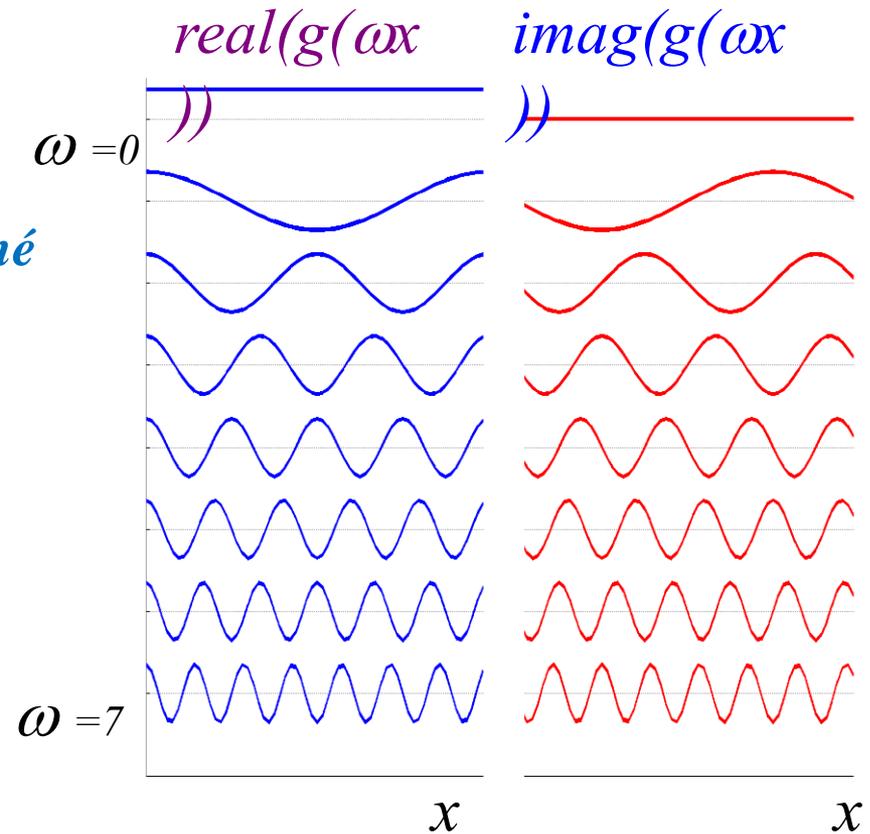
## ■ TFD 1D de longueur $N$ : Discrète

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp\left(-\frac{2\pi jxu}{N}\right)$$

$$u = 0, 1, \dots, N-1$$

$x$  : indice discret du domaine direct

$u$  : indice discret du domaine transformé



# TRANSFORMEES DISCRETES LINEAIRES

## Transformée de Fourier Discrète Directe

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp\left(-\frac{2\pi jxu}{N}\right)$$

$$u = 0, 1, \dots, N-1$$

*x : indice discret du domaine direct*

*u : indice discret du domaine transformé*

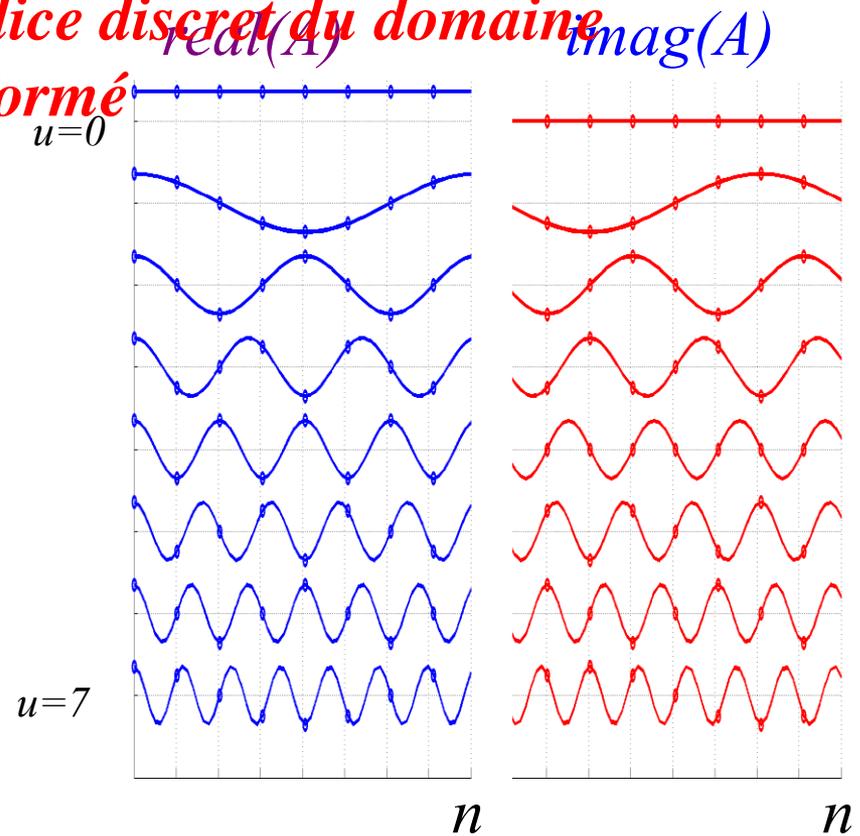
## Transformée de Fourier Discrète Inverse

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp\left(\frac{2\pi jxu}{N}\right)$$

$$x = 0, 1, \dots, N-1$$

*Base de fonctions ou noyau de la transformations: Exponentielles Complexes*

$$\phi(u, x) = \exp\left(\frac{2\pi jux}{N}\right)$$



# TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE (TFD)

- $\{ f(x) \} \Leftrightarrow \{ F(u) \}$

$$u, x = 0, 1, \dots, N-1$$

$$W_N = \exp\{ -j2\pi / N \}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot W_N^{ux} \\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \cdot W_N^{-ux} \end{array} \right.$$

# TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE (TFD)

## TFD 1 D sous forme matricielle

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp\left(-\frac{2\pi jxu}{N}\right)$$

$u = 0, 1, \dots, N-1$

*x* : indice discret du domaine direct  
*u* : indice discret du domaine transformé



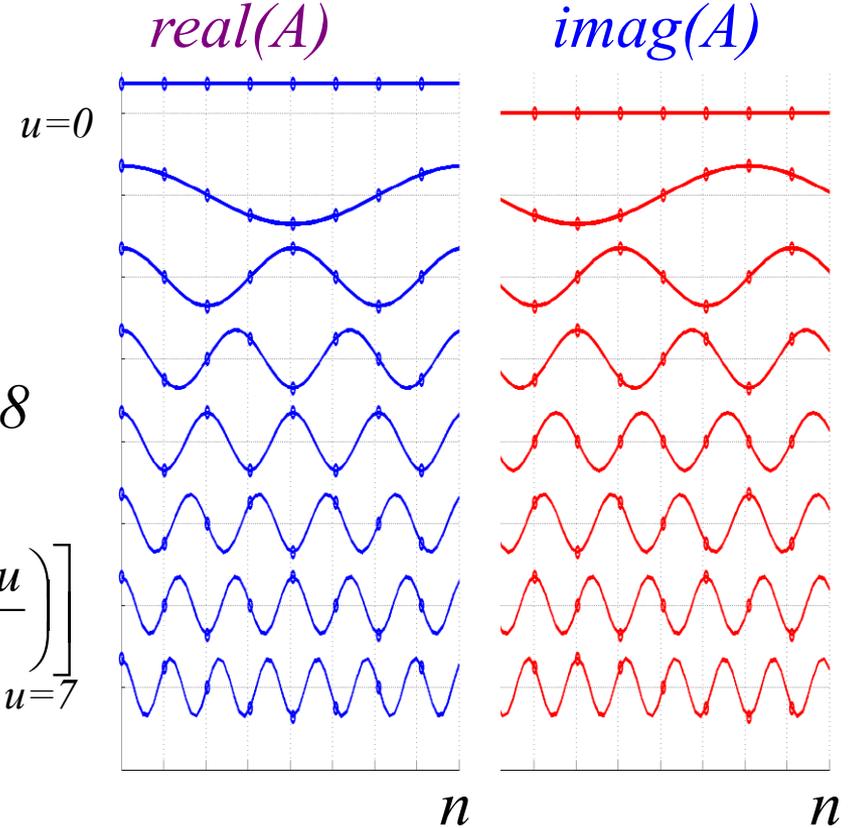
$$[F] = [W] \cdot [f]$$

$[W] \equiv$  *Matrice noyau N x N*

*Contient les valeurs de*

$$[W]_{u,x} = \left[ \exp\left(-\frac{2\pi jxu}{N}\right) \right]$$

$$[f] = [W]^{-1*} \cdot [F] \quad \text{TFD inverse matricielle}$$



# TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE (TFD)

## Propriétés de la TFD 1 D

$$[F] = [W] \cdot [f] \quad [W] \equiv \text{Matrice noyau } N \times N$$

$$[W]_{u,x} = \left[ \exp\left(-\frac{2\pi jxu}{N}\right) \right]$$

- Energy Conservation

$$- \|\underline{F}\|^2 = \|\underline{f}\|^2$$

- $\|\underline{F}\|^2 = \|\underline{Wf}\|^2 = (\underline{Wf})^{*T} (\underline{Wf}) = \underline{f}^{*T} \underline{W}^{*T} \underline{W} \underline{f} = \underline{f}^{*T} \underline{f} = \|\underline{f}\|^2$

- Rotation

- The angles entre les vecteurs sont préservés

- Une transformation unitaire est une rotation d'un vecteur dans un espace de dimension N, c'est-à-dire une rotation des coordonnées de base

# TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE (TFD)

## Propriétés de la TFD 1 D

- Compactage énergétique

De nombreuses transformées unitaires communes ont tendance à regrouper une grande partie de l'énergie du signal en seulement quelques coefficients de transformation.

- Décorrélation

Éléments d'entrée hautement corrélés vs coefficients de sortie très peu corrélés

Matrice de covariance  $E[(F - E(F))(F - E(F))^* T]$

une petite corrélation implique de petits termes hors diagonale

Question: Quelle transformation unitaire donne le meilleur compactage et la meilleure décorrélation?

# **LA TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE**

## **FFT**

- Quelques dates:
  - ~1880 – premier algorithme décrit by Gauss
  - 1965 – algorithme redécouvert par Cooley and Tukey
  
- En 1967 le calcul d'une TFD sur 8192 points avec un ordinateur de la deuxième génération IBM 7094
  - ~30 minutes en utilisant des techniques conventionnelles
  - ~5 seconds en utilisant FFTs

## Coût calculatoire d'une TFD

- Selon la formule de la TFD nous avons:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn / N}$$

- Le calcul d'un seul coefficient d'une TFD à  $N$  points nécessite  $N$  additions et  $N$  multiplications complexes
- Le calcul d'une TFD à  $N$  points nécessite donc  $2N^2$  opérations complexes

# Algorithme de Cooley-Tukey

- Soit la TFD pour un nombre de points  $N$ , puissance de 2,

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi nk/N}; \quad W_N = e^{-j2\pi/N}$$

- pour  $k=0, 1, \dots, N-1$
- En divisant cette somme en deux sommes selon les indices  $n$  pairs et impairs, on obtient:

$$X[k] = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r]W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)k}$$

pour  $k=0, 1, \dots, N-1$

# Algorithme de Cooley-Tukey

$$X[k] = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r]W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)k}$$

• pour  $k=0, 1, \dots, N-1$

• Mais  $W_N^2 = e^{-j2\pi 2/N} = e^{-j2\pi/(N/2)} = W_{N/2}$  et  $W_N^{2rk} W_N^k = W_N^k W_{N/2}^{rk}$

Alors ...

$$X[k] = \underbrace{\sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2r]W_{N/2}^{rk}}_{G[k]} + W_N^k \underbrace{\sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]W_{N/2}^{rk}}_{H[k]}$$

$G[k]$

$H[k]$

TFD à  $N/2$ -point de  $x[2r]$

TFD à  $N/2$ -point de  $x[2r+1]$

*Mais attention  $G(k)$  et  $H(k)$  sont deux TFD à  $N/2$  points seulement alors que  $X(k)$  est à  $N$  points ( $k=0, 1, \dots, N-1$ )*

# Algorithme de Cooley-Tukey

$$X[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2r] W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2r+1] W_{N/2}^{rk}$$

(k=0, 1, ..., N/2-1)

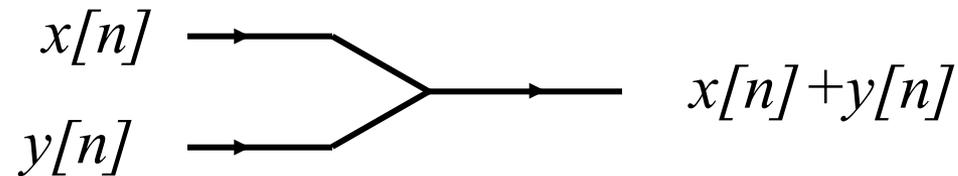
Pour obtenir les N/2 coefficients manquants :

$$X[k + N/2] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2r] W_{N/2}^{rk} - W_N^k \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2r+1] W_{N/2}^{rk}$$

# Notion d'organigramme

- En généralisant cette formulation, il est plus commode d'adopter une approche, soit:

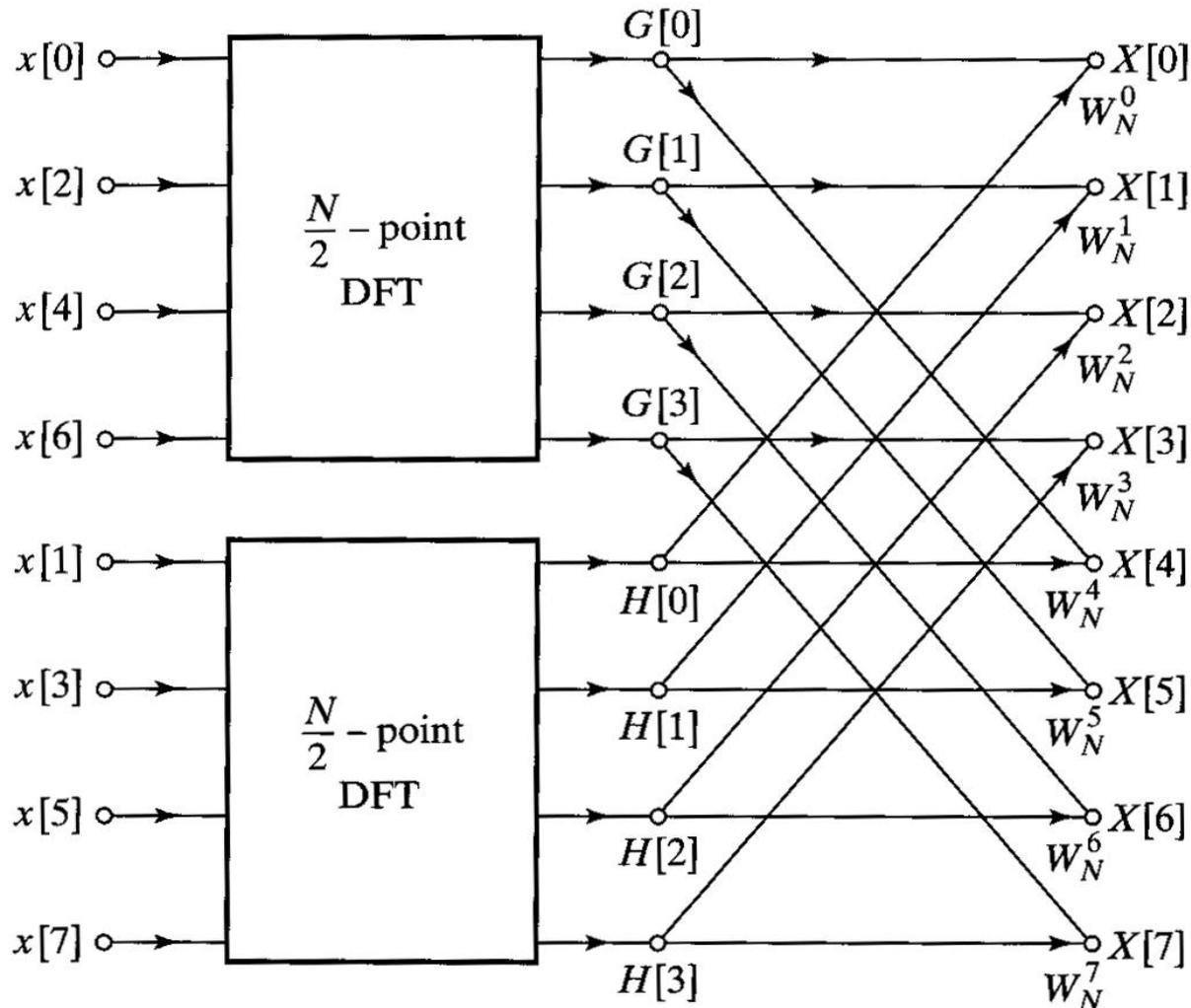
- Addition



- Multiplication par une constante  $x[n]$   $\xrightarrow{a}$   $ax[n]$

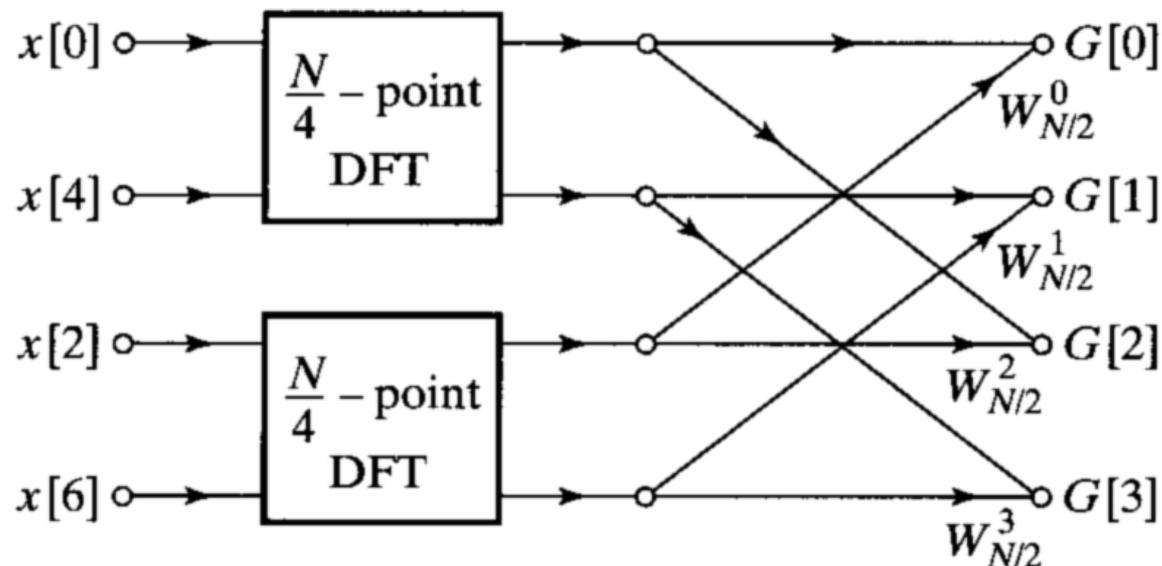
- Retard  $x[n]$   $\xrightarrow{z^{-1}}$   $x[n-1]$

# Représentation graphique d'une TFD à 8 points

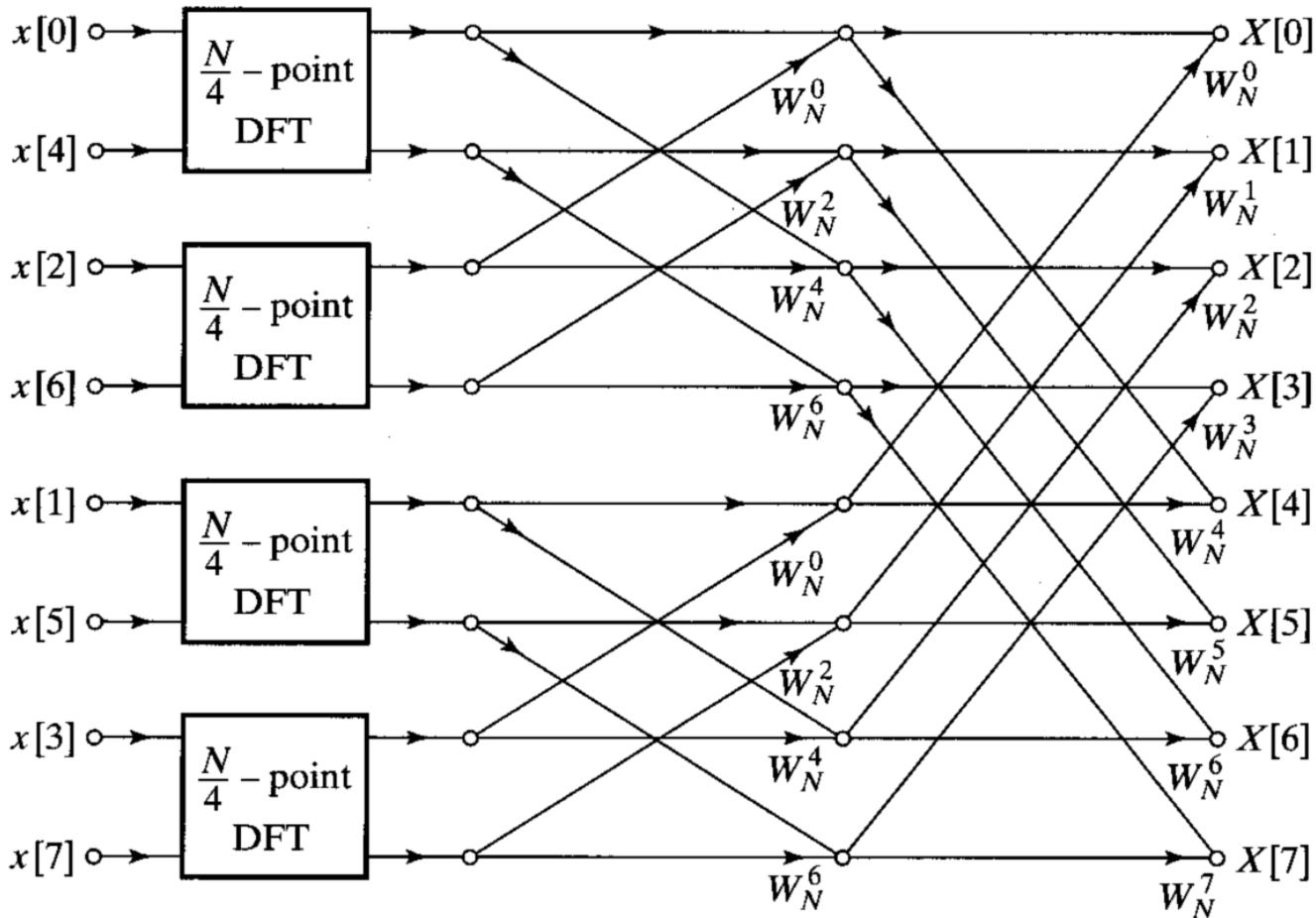


# Poursuivre la décomposition ...

- Alors pourquoi ne pas diviser en TFD supplémentaires? Prenons la TFD supérieure à 4 points et divisons-la en deux TFD à 2 points:



# La décomposition complète en TFD à 2 points



## Voyons maintenant de plus près le TFD à 2 points

- L'expression de la TFD à 2 points est:

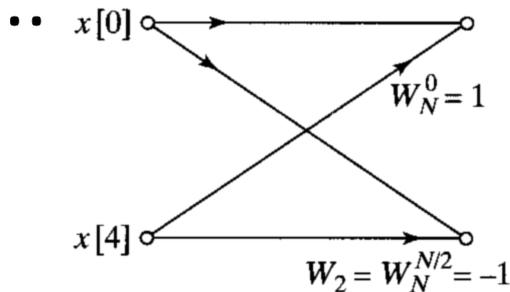
$$X[k] = \sum_{n=0}^1 x[n] W_2^{nk} = \sum_{n=0}^1 x[n] e^{-j2\pi nk/2}$$

- Evaluer pour  $k = 0, 1$  nous obtenons

$$X[0] = x[0] + x[1]$$

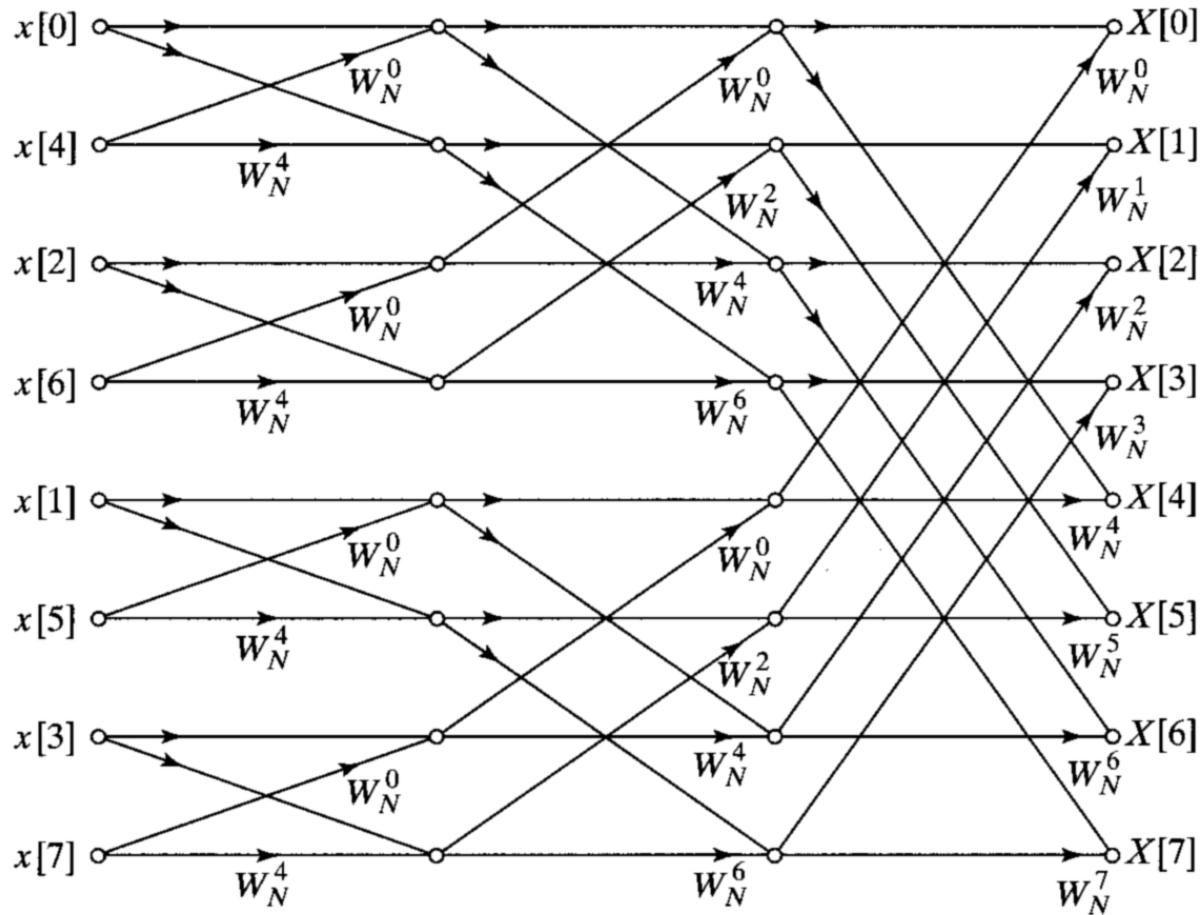
$$X[1] = x[0] + e^{-j2\pi 1/2} x[1] = x[0] - x[1]$$

qui en notation graphique de flux ressemble à

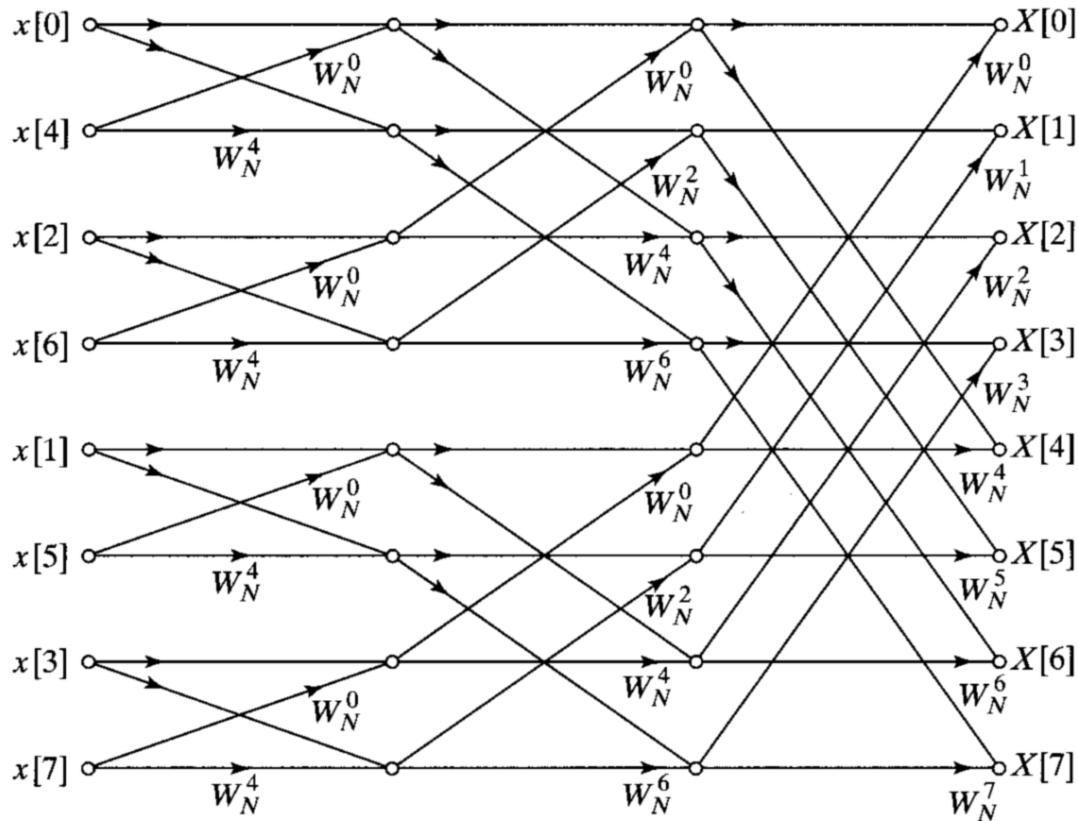


*Cette topologie est appelée papillon de base*

# La FFT de décimation dans le temps complète à 8 points



# Nombre de multiplications pour les FFT à N points



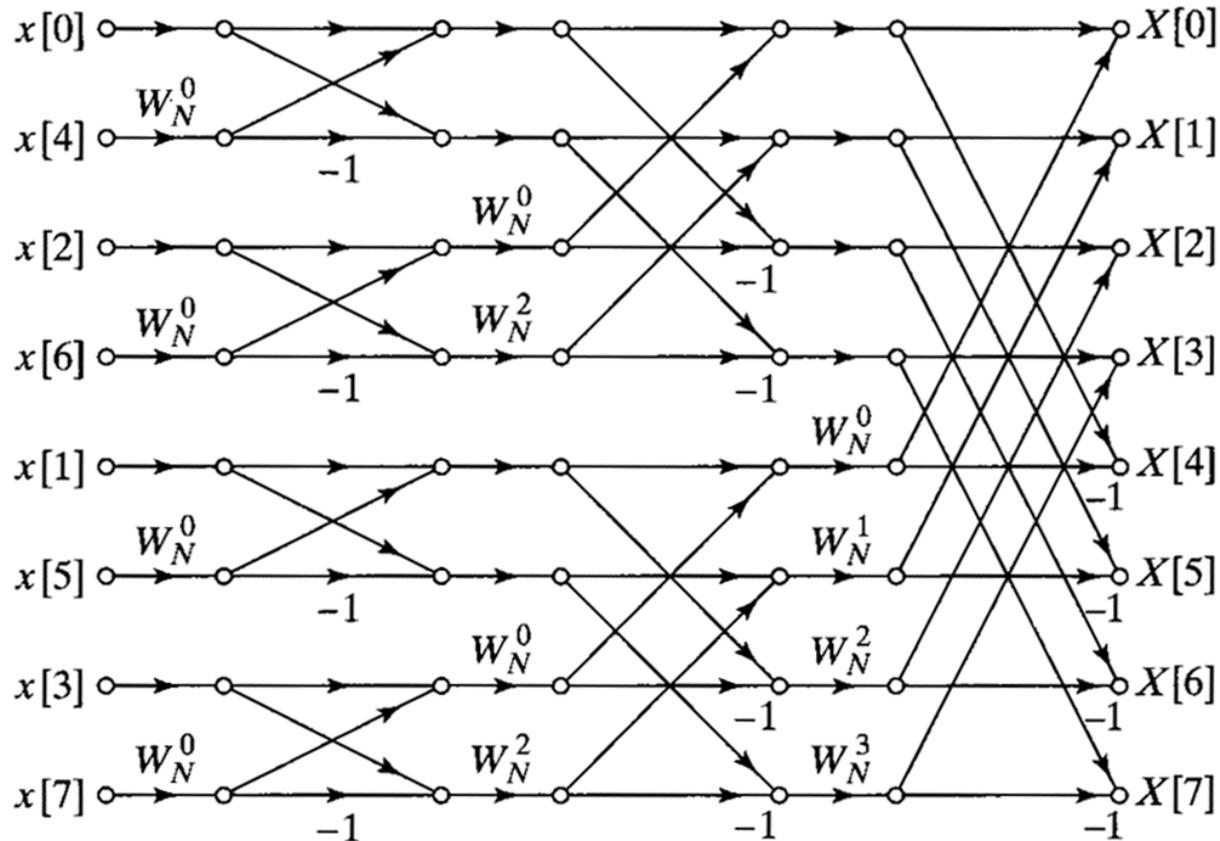
- Soit  $N = 2^L$  ou  $N = 2^L \cdot v$  ( $v$  impair)
- Nous aurons besoin  $N \log_2(N)$  multiplications

# Structures FFT alternatives

- Nous avons développé la structure de base de la FFT de décimation dans le temps (DIT), mais d'autres formes sont possibles simplement en réarrangeant les branches de l'organigramme

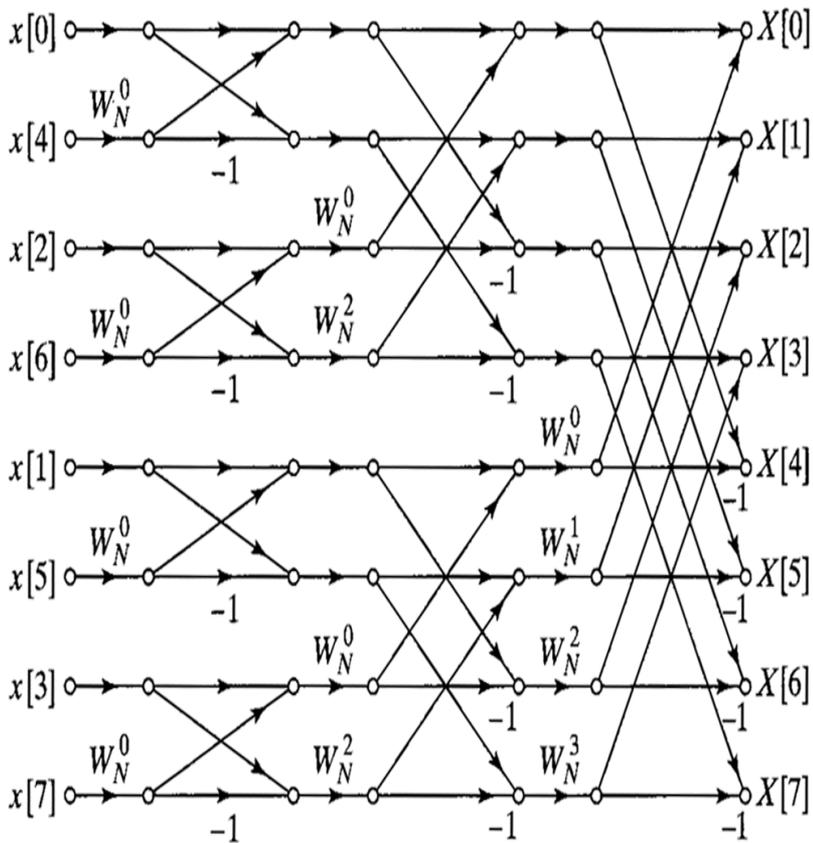
# Structures FFT alternatives

- Structure DIT avec entrée à bit inversé, sortie naturelle:

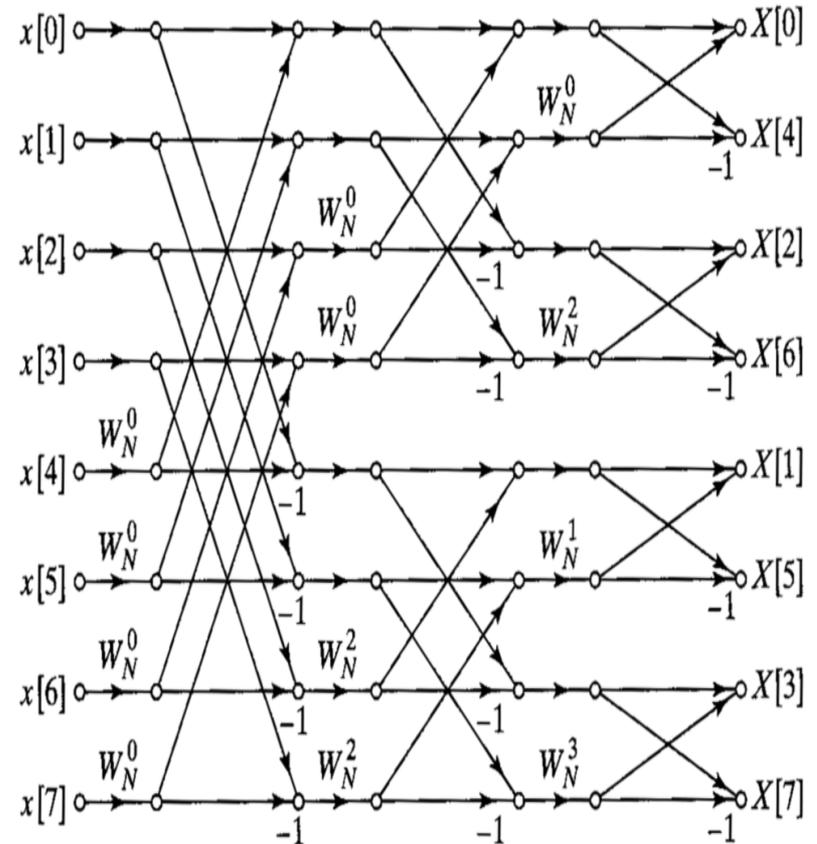


# Structures FFT alternatives

- La structure DIT d'origine:

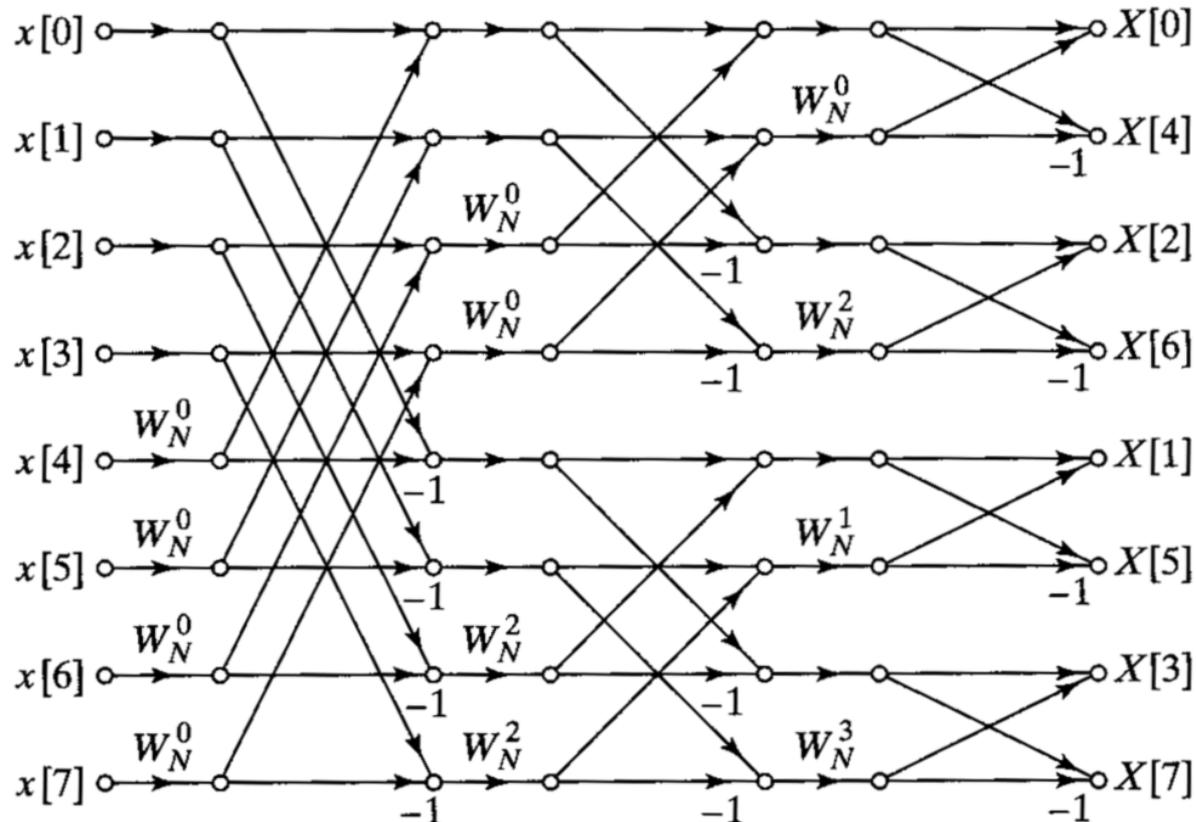


- Structure réarrangée:



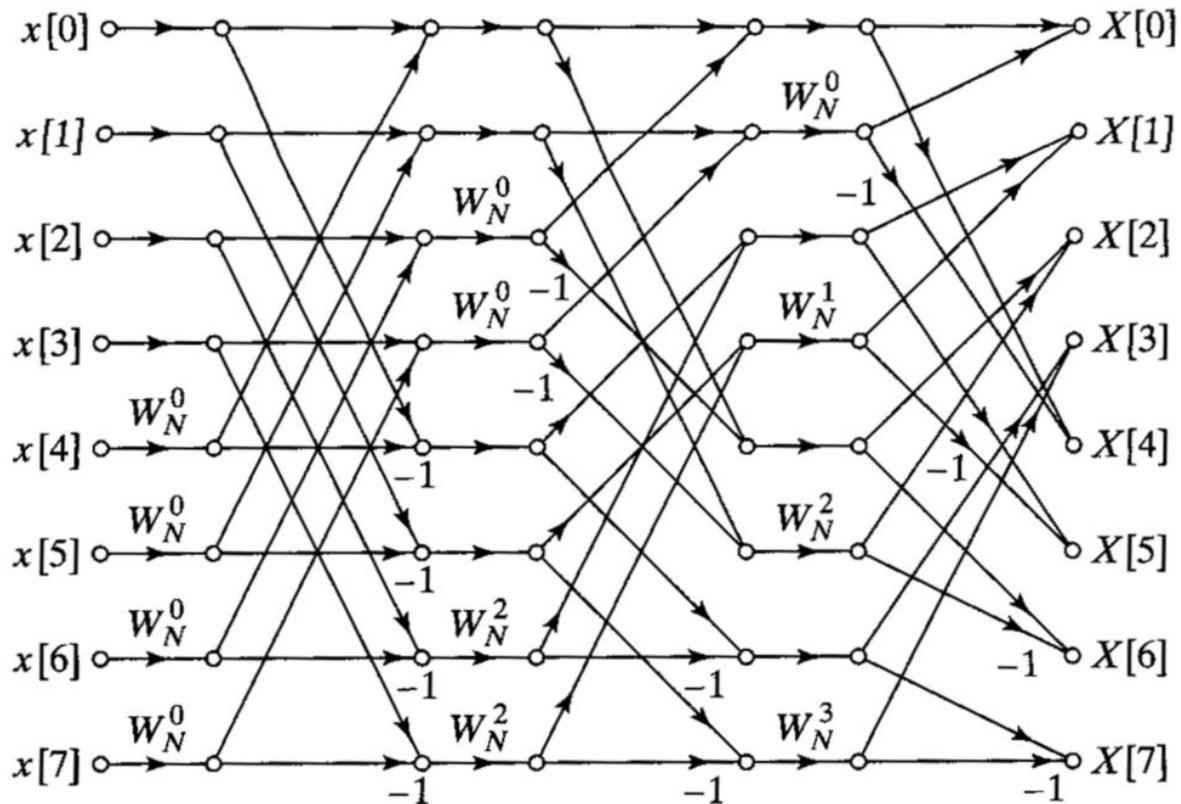
# Structures FFT alternatives

- Structure DIT avec entrée naturelle, sortie inversée en bits :



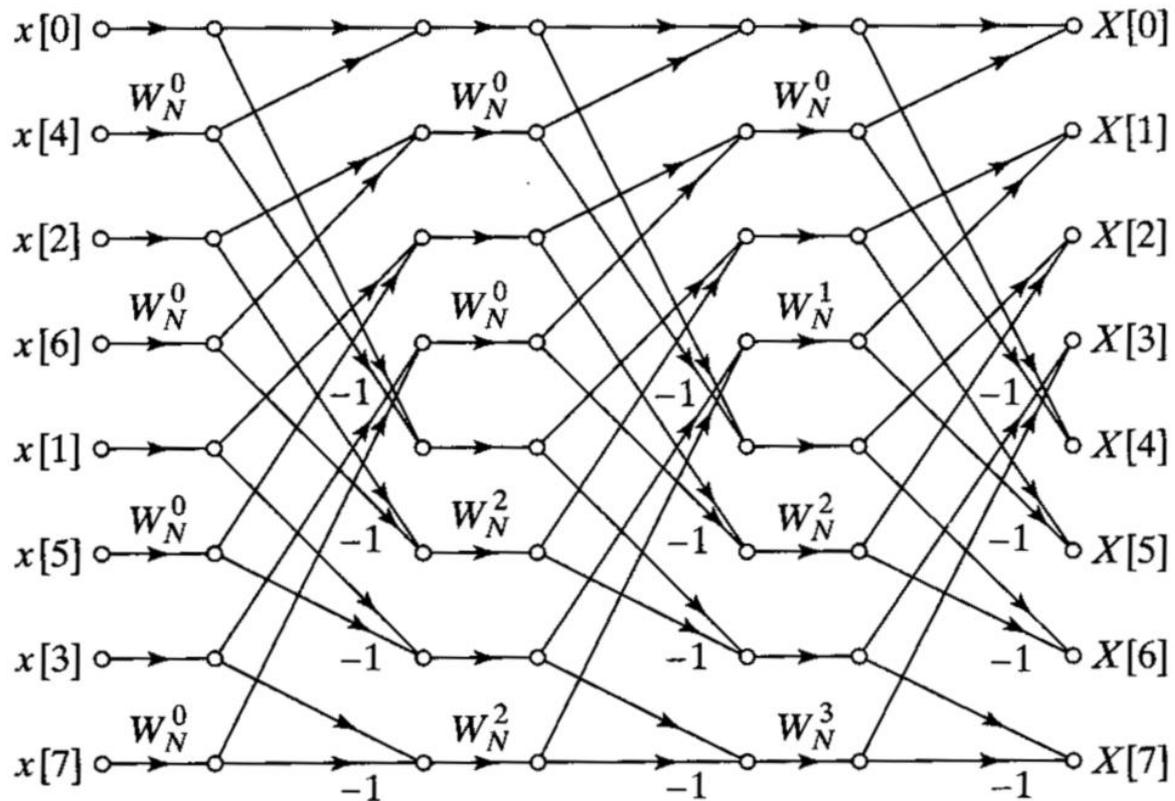
# Structures FFT alternatives

- Structure DIT avec entrée et sortie dans l'ordre naturel :



# Structures FFT alternatives

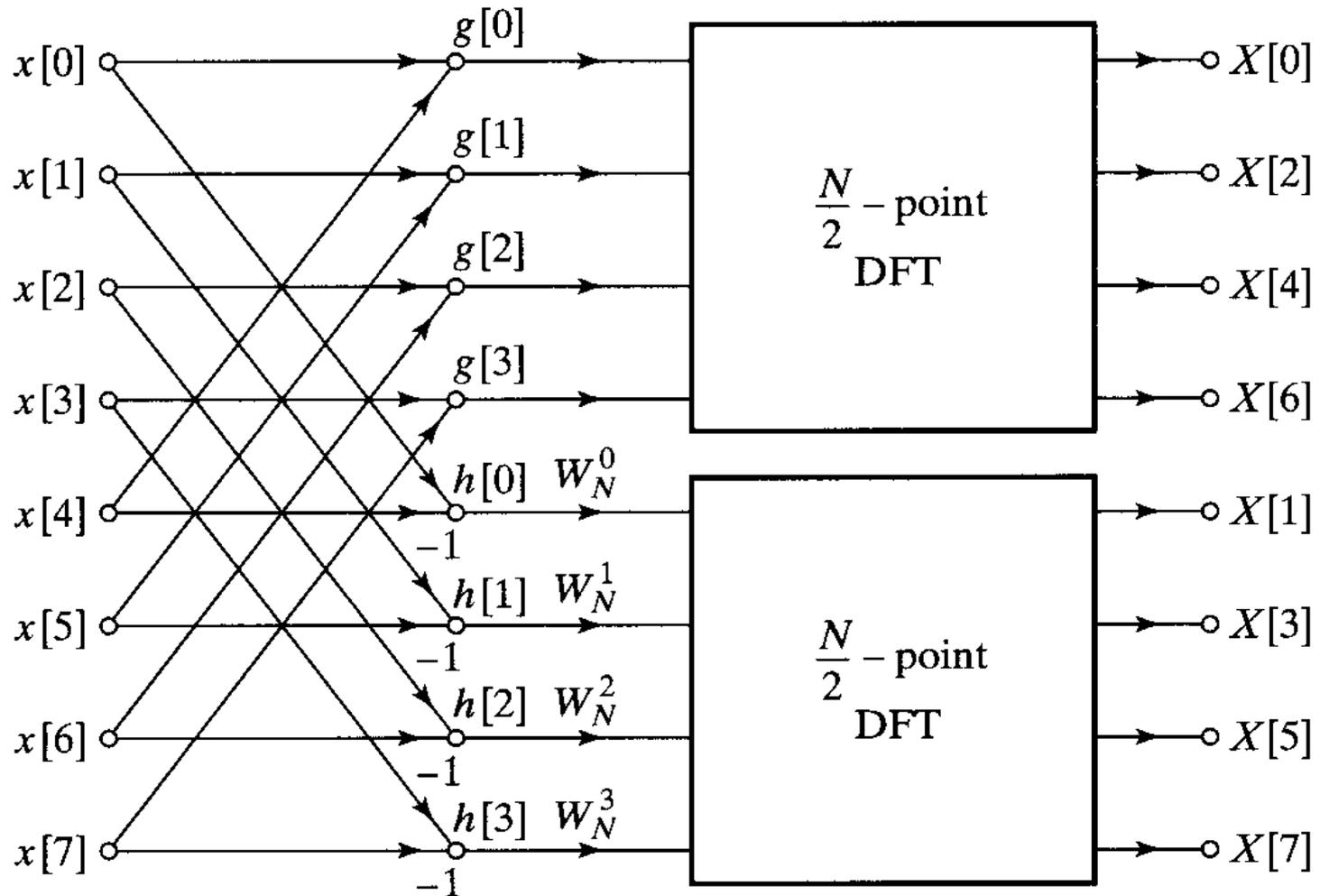
- Structure DIT avec la même structure pour chaque étape :



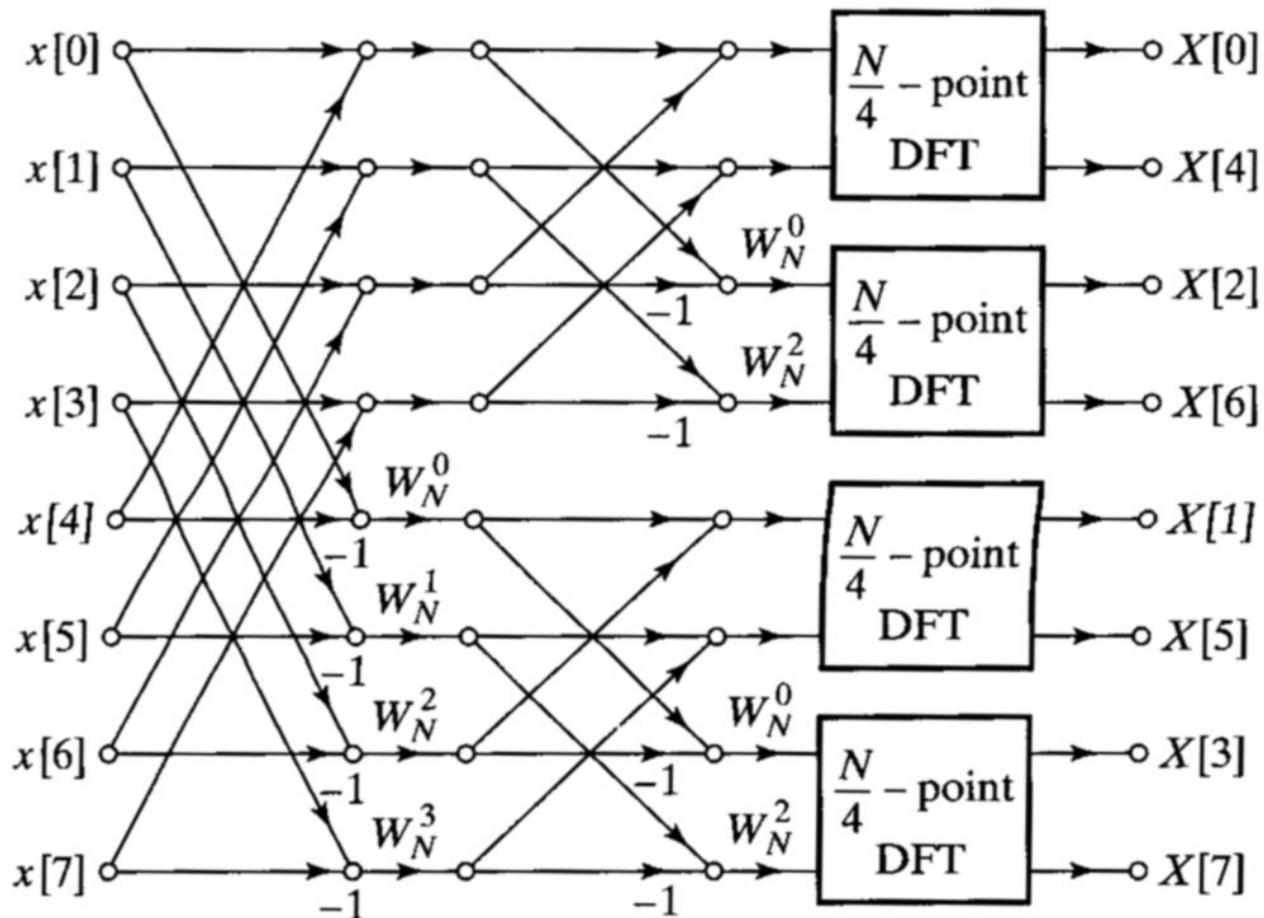
# L'algorithme FFT de décimation en fréquence (DIF)

- Introduction: la décimation en fréquence (DIF) est une autre manière de développer l'algorithme FFT  
Elle est différente de la décimation dans le temps (DIT) dans son développement, même si elle conduit à une structure très similaire

# L'algorithme FFT de décimation en fréquence (DIF)



Poursuivant en décomposant les points de sortie pairs et impairs que nous obtenons...



... Et en remplaçant les DFT à  $N / 4$  points par des papillons que nous obtenons

