الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2023

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كريات متماثلة ولا نفرّق بينها باللّمس، موزعة كما يلي:

3 كريات بيضاء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1 و 3 كريات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 2

و كريتين خضراوين مرقمتين بـ: 1 ، 2

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس ونعتبر الحوادث A ، B ، C الآتية:

A " الحصول على كريتين من نفس اللون " ، B " الحصول على كرية حمراء على الأقل "

C " الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما يساوي 3 "

1) أ) بيّن أنّ احتمال الحدث A يساوي $\frac{1}{4}$ وأنّ احتمال الحدث B يساوي $\frac{9}{14}$

ب) احسب الاحتمال $P(C)$

2) نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكلّ عملية سحب لكريتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما.

أ) برّر أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{1;2;3;4\}$

ب) عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$

1) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n < 3$

2) بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 3$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

ب) عيّن عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = -2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$

جـ) احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

4) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

احسب S_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $T_n = 3n - 3 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1444^{2023} على 7

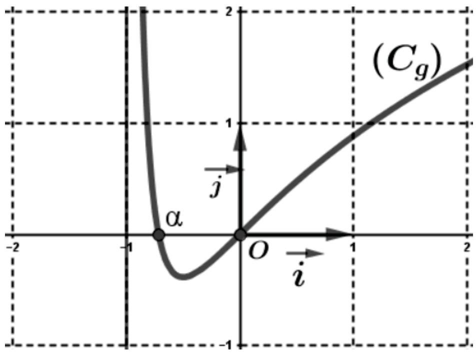
جـ) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $1962n+1444^{3n+1}\equiv 0[7]$

2) نعتبر المعادلة (E) ... $7x-6y=4$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

تحقّق أنّ الثنائية $(4;4)$ حلّ للمعادلة (E) ثمّ استنتج مجموعة حلولها.

3) عيّن الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (E) والتي تحقّق $2^{3x}+2^{y}\equiv 3[7]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I) g الدّالة المعرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=2\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$

(C_g) تمثيلها البياني، يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين اللتين فاصلتاهما α و 0 (لاحظ الشكل المقابل)

1) بقراءة بيانية ، حدّد حسب قيم x إشارة $g(x)$

2) تحقّق أنّ: $-0,72<\alpha<-0,71$

II) f الدّالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=(2x+3)\ln(x+1)-3x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب) تحقّق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي غير معدوم x من المجال $]-1;+\infty[$:

$f(x)=x\left[\left(2+\dfrac{3}{x}\right)\ln(x+1)-3\right]$ ثمّ استنتج أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=g(x)$

ب) استنتج أنّ f متناقصة تماما على $[\alpha;0]$ ومتزايدة تماما على كلّ من المجالين $]-1;\alpha]$ و $[0;+\infty[$

جـ) شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

3) أ) ارسم (C_f) في المجال $]-1;4]$ (نأخذ : $f(3)\simeq 3,5$ ، $f(4)\simeq 5,7$ و $f(\alpha)\simeq 0,2$)

ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=m$ ثلاثة حلول بالضبط.

4) F الدّالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $F(x)=\left(x^2+3x+2\right)\ln(x+1)-2x^2-2x$

أ) تحقّق أنّ F أصلية للدّالة f على المجال $]-1;+\infty[$

ب) استنتج بالسنتيمتر المربّع $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ، $x=\alpha$ و $x=0$

جـ) تحقّق أنّ $\mathcal{A}=\left(6\alpha^2+4\alpha\right)cm^2$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 11 كريّة متماثلة ولا نفرّق بينها باللّمس، موزعة كما يلي:

3 كريات تحمل الرقم 0 ، 3 كريات تحمل الرقم 1 و 5 كريات تحمل الرقم 2

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس ونعتبر الحوادث A ، B ، C الآتية:

A " الحصول على كريتين رقم كلّ منهما عدد أوّلي " ، B " الحصول على كريّة واحدة تحمل رقما فرديا "

C " الحصول على كريتين جُداء رقميهما معدوم "

1) أ) بيّن أنّ احتمال الحدث A يساوي $\frac{2}{11}$ وأنّ احتمال الحدث B يساوي $\frac{24}{55}$

ب) احسب الاحتمال $P(C)$

2) نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين جُداء الرقمين المسجلين عليهما.

أ) برّر أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{0;1;2;4\}$

ب) عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

جـ) احسب احتمال الحدث: " $e^{X+6} < 2023$ "

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.

1) حلّ المعادلة التفاضلية $y' = y - 2$ الذي يحقّق $y(0) = 1446$ هو الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

أ) $h(x) = 1444e^{x} - 2$ **ب)** $h(x) = 1444e^{x} + 2$ **جـ)** $h(x) = 1444e^{-x} + 2$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[-x + \ln x - \ln(x+1)\right]$ تساوي:

أ) 0 **ب)** $+\infty$ **جـ)** $-\infty$

3) العدد الحقيقي I حيث $I = \int_0^{\ln 2}\left(e^{-x}+1\right)dx$ يساوي:

أ) $\frac{1}{2} + \ln 2$ **ب)** $\frac{1}{2} - \ln 2$ **جـ)** $-\frac{1}{2} + \ln 2$

4) من أجل كلّ عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 ، $PGCD\left(2n^2+n \,;\, 3n^2+n\right)$ يساوي:

أ) 1 **ب)** n **جـ)** $2n$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{3u_n + 1}$

1) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n > \frac{2}{3}$

2) بيّن أنّ (u_n) متناقصة تماما.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3 - \dfrac{2}{u_n}$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{3}$ يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

ب) عيّن عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = \dfrac{2}{3-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$

جـ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = \dfrac{2}{u_0} + \dfrac{2}{u_1} + \cdots + \dfrac{2}{u_n}$

احسب S_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $T_n = 3n + \dfrac{1}{2}\left[3 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الجدول المقابل يُمثّل تغيّرات الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$g(x) = -1 + (2x-1)e^x$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	-1 ↘	$g\left(-\frac{1}{2}\right)$	↗ $+\infty$

1) أثبت أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$

2) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x + 4 + (2x-3)e^x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x + 4$ مقارب مائل لـ(C_f) عند $-\infty$

جـ) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

2) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x، $f'(x) = g(x)$

ب) استنتج أنّ f متناقصة تماما على $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) أثبت أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

ب) ارسم (Δ)، (T) و (C_f) (نأخذ : $f(2) \simeq 9,4$ و $f(\alpha) \simeq 0,1$)

جـ) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = -x + m$ حلّين بالضبط.

4) F الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x) = (-2x+5)e^x$

أ) تحقّق أنّ F أصلية للدّالة $x \mapsto (-2x+3)e^x$ على $\mathbb{R}$

ب) استنتج مساحة الحيّز المستوي المحدّد بـ(C_f) والمستقيمات التي معادلاتها

$y = -x + 4$ ، $x = -1$ و $x = 0$

انتهى الموضوع الثاني