

Chapitre 1: TFSD et TFD (DFT)

Les méthodes discrètes d'analyse et de traitement sont fondamentales dans l'étude des signaux numériques.

Série de Fourier d'un signal discret

Un signal discret $s(n)$ est périodique de période N s'il vérifie: $s(n) = s(n+N)$

Les fonctions: $\sin(2\pi \frac{1}{N} n)$ et $\cos(2\pi \frac{1}{N} n)$ sont périodiques de période N

- L'exponentielle:

$$e^{j2\pi \frac{k}{N} n} = \cos(2\pi \frac{k}{N} n) + j \sin(2\pi \frac{k}{N} n)$$

est aussi périodique

$$\text{On a: } \psi_k(n) = e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} = \cos(2\pi \frac{k}{N} n) - j \sin(2\pi \frac{k}{N} n)$$

$$\psi_0(n) = \psi_N(n)$$

$$\psi_1(n) = \psi_{N-1}(n)$$

$$\psi_p(n) = \psi_{N-p}(n)$$

$$\psi_{k+N}(n) = \psi_k(n)$$

$$\text{On généralise: } \psi_k(n) = \psi_{k+PN}(n) \quad p: \text{entier}$$

$$s(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k e^{j2\pi \frac{k}{N} n}, \text{ fréquence } \frac{1}{N}$$

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

Les coefficients S_k sont périodiques N

$$S_k = S_{k+N}$$

$$\text{D'une manière générale: } S_k = S_{k+PN}$$

Rania Dj

Exemple:

$$s(n) = \cos(2\pi \frac{1}{7} n)$$

calculer S_k .

$$s(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k e^{j2\pi \frac{k}{7} n}$$

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n) e^{-j2\pi \frac{k}{7} n}$$

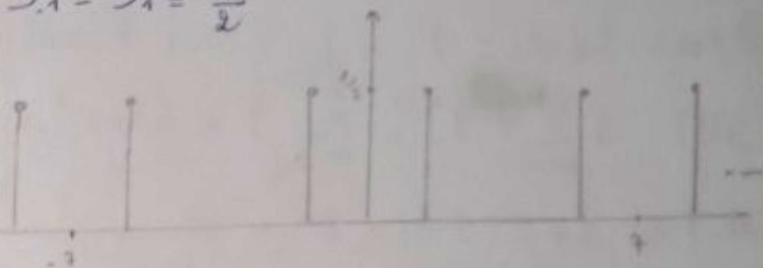
$|N=7|$ de période 7

Donc:

$$s(n) = \cos(2\pi \frac{1}{7} n) = \frac{1}{2} e^{j2\pi \frac{1}{7} n} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi \frac{1}{7} n}$$

$$s(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k e^{j2\pi \frac{k}{7} n}$$

$$S_{-1} = S_1 = \frac{1}{2}$$



$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{pour } k=1 & S_k = \frac{1}{2} \\ \text{pour } k=-1 & S_k = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Transformation de Fourier d'un signal aperiodique discret

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-j2\pi f n}$$

$$S(n) = \int_{-1/2}^{1/2} S(f) e^{j2\pi \frac{n}{T_e} f} df = \int_{-1/2}^{1/2} S(f) e^{j2\pi f n} df$$

$T_e = 1$

La TF des signaux continus est non périodique

La TF des signaux discrets sont périodiques de période unité $T_e = 1$

Exemple:

$$s(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

calculer $S(f)$.

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-j2\pi f n}$$

$$s(n) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f n} df$$

$$s(n) = \begin{cases} 1 & -N_1 \leq n \leq N_1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$S(f) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} (1) e^{-j2\pi f n}$$

on pose : $m = n + N_1$

$$S(f) = \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j2\pi f (m+N_1)} \quad \left. \begin{array}{l} n = N_1 \Rightarrow m = 0 \\ n = -N_1 \Rightarrow m = 2N_1 \end{array} \right\}$$

$$S(f) = e^{-j2\pi f N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} (e^{-j2\pi f})^m$$

① pour $f = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

$$S(f) = 1 \sum_{m=0}^{2N_1} (1)^m = \sum_{m=0}^{2N_1} 1 = 2N_1 + 1$$

② pour $f \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

$$S(f) = e^{-j2\pi f N_1} \left[\frac{1 - (e^{-j2\pi f})^{(2N_1+1)}}{1 - e^{-j2\pi f}} \right]$$

$$S(f) = \frac{\sin((2N_1+1)\pi f)}{\sin \pi f}$$

$$S(f) = \begin{cases} 2N_1+1 & \text{pour } f = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \frac{\sin((2N_1+1)\pi f)}{\sin \pi f} & \text{pour } f \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Exemple ①

(Série de Fourier discret)

DTFS

Periode $N = 8$

$$D(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{8} n\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{j\frac{2\pi}{8} n} + e^{-j\frac{2\pi}{8} n} \right]$$

$$D(n) = \sum_{k=-N}^{N} S_k e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \quad k=1$$

$$S_1 = \frac{1}{2}, \quad S_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$S_k = \begin{cases} k=1 & \frac{1}{2} \\ k=-1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \text{for other} \end{cases}$$

Exemple ②

$$D(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{10} n\right)$$

Periode $N = 10$

$$D(n) = \frac{1}{2j} \left[e^{j\frac{2\pi}{10} n} - e^{-j\frac{2\pi}{10} n} \right]$$

$$D(n) = \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{10} n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{10} n}$$

$$D(n) = \sum_{k=-N}^{N} S_k e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$S_1 = \frac{1}{2j}, \quad S_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

$$S_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & \text{for } k=1 \\ -\frac{1}{2j} & \text{for } k=-1 \\ 0 & \text{for other} \end{cases}$$

Rania Dj

8



$$d(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} d(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$S_k = \frac{1}{N} \left[d(0) e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 0} + d(2) e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2} + d(4) e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 4} + d(6) e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 6} \right]$$

$$S_k = \frac{1}{N} \left[1 e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 0} + 1 e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2} + 1 e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 4} + 1 e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 6} \right]$$

$$e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 0} = e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2} e^{j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2}$$

$$S_k = \frac{1}{N} \left[e^{j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2} e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2} + e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2} e^{j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2} - e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 4} - e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 6} \right]$$

$$\text{On a: } e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2} e^{j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2} + e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2} e^{j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2} = e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2} (e^{j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2} + e^{j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2}) = e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2} (2 \cos \frac{2\pi}{N})$$

et on a aussi:

$$-e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 4} - e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 6}$$

$$-e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 5} \left[e^{j2\pi \frac{k}{N} \cdot 1} + e^{j2\pi \frac{k}{N} \cdot 1} \right]$$

$$= -e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 5} (2 \cos \frac{2\pi}{N})$$

Donc:

$$S_k = \frac{1}{N} \left[2 \cos \frac{2\pi}{N} (e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2} - e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 5}) \right]$$

$$e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2} - e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 5} = e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 3} (e^{j2\pi \frac{k}{N} \cdot 1} - e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 2}) = e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot 3} (2j \sin \frac{4\pi}{N})$$

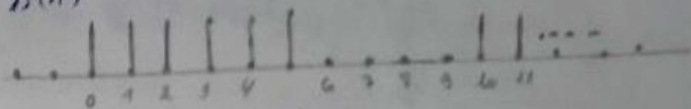
$$\text{Donc } S_k = \frac{1}{N} \left[(2 \cos \frac{2\pi}{N}) (2j \sin \frac{4\pi}{N}) \right]$$

Rania Dj

$$S_k = \frac{1}{N} \left[4 \cos \frac{2\pi}{N} \sin \frac{4\pi}{N} \right]$$

Example:

$d(n)$



$N = 10$
 $N_p = 6$

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} d(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} d(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

pour $k=0$: $S_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 1$

$$S_0 = \frac{5+0+1}{N} \Rightarrow \boxed{S_0 = 6/N}$$

Pour $k \neq 0$:

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j2\pi \frac{k}{N} n})$$

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n$$

$$S_k = \frac{1}{N} \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha}$$

$$S_k = \frac{1}{N} \left[\frac{1 - (e^{-j2\pi \frac{k}{N}})^N}{1 - e^{-j2\pi \frac{k}{N}}} \right]$$

$$1 - e^{-j2\pi \frac{k}{N}} = e^{-j2\pi \frac{k}{N}} \left[e^{j2\pi \frac{k}{N}} - 1 \right]$$

$$1 - e^{-j2\pi \frac{k}{N}} = e^{-j2\pi \frac{k}{N}} \frac{1}{2} \left[e^{j2\pi \frac{k}{N} \cdot \frac{1}{2}} - e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot \frac{1}{2}} \right]$$

$$1 - e^{-j2\pi \frac{k}{N}} = e^{-j2\pi \frac{k}{N}} \left[e^{j2\pi \frac{k}{N}} - 1 \right]$$

$$1 - e^{-j2\pi \frac{k}{N}} = e^{-j2\pi \frac{k}{N}} (2j \sin \frac{\pi}{N})$$

Donc:

$$S_k = \frac{1}{N} \left[(1 - e^{-j2\pi \frac{k}{N}})^{N_p} \right] = e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot \frac{N_p}{2}} \left[e^{j2\pi \frac{k}{N} \cdot \frac{N_p}{2}} - e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot \frac{N_p}{2}} \right]$$

$$1 \cdot (e^{j2\pi \frac{k}{N}})^{N_p} = e^{-j2\pi \frac{k}{N} \cdot \frac{N_p}{2}} (2j \sin \frac{N_p \pi}{N})$$

Donc:

$$S_k = \frac{1}{N} \left[\frac{(e^{j2\pi \frac{k}{N}})^{N_p} (2j \sin \frac{N_p \pi}{N})}{(e^{-j2\pi \frac{k}{N}})^{N_p} (2j \sin \frac{\pi}{N})} \right]$$

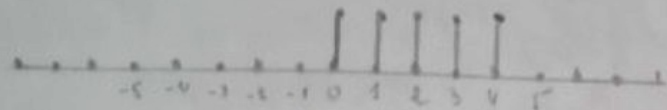
③

Deriv:

$$S_k = \frac{1}{N} \frac{e^{-j\pi k \frac{N+1}{N}} \sin k \frac{N+1}{N} \frac{\pi}{N}}{e^{-j\pi k \frac{1}{N}} \sin k \frac{\pi}{N}}$$

$$S_k = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin k \frac{N+1}{N} \frac{\pi}{N}}{\sin k \frac{\pi}{N}} \cdot e^{-j\pi k (N+1) \frac{1}{N}}$$

Example:



$$s(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$s(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k e^{j\pi k \frac{n}{N}}$$

$$s_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-j\pi k \frac{n}{N}}$$

$$s_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^4 (1 e^{-j\pi k \frac{n}{N}})$$

$$s_k = \frac{1}{N} \left[\frac{1 - (e^{-j\pi k \frac{N}{N}})^N}{1 - e^{-j\pi k \frac{1}{N}}} \right]$$

$$1 - e^{-j\pi k \frac{1}{N}} = e^{-j\pi k \frac{1}{2N}} (e^{j\pi k \frac{1}{2N}} - e^{-j\pi k \frac{1}{2N}})$$

$$1 - e^{-j\pi k \frac{1}{N}} = e^{-j\pi k \frac{1}{2N}} (e^{j\pi k \frac{1}{2N}} - e^{-j\pi k \frac{1}{2N}})$$

$$1 - (e^{-j\pi k \frac{1}{N}})^N = e^{-j\pi k \frac{N}{2}} (e^{j\pi k \frac{N}{2}} - e^{-j\pi k \frac{N}{2}})$$

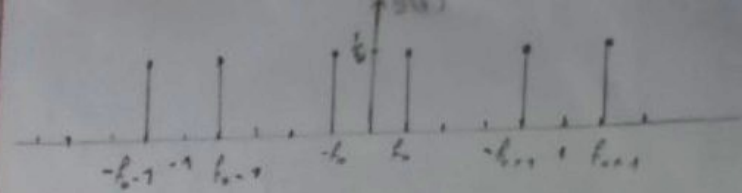
$$1 - (e^{-j\pi k \frac{1}{N}})^N = e^{-j\pi k} (e^{j\pi k} - e^{-j\pi k})$$

$$(1 - e^{-j\pi k \frac{1}{N}})^N = e^{-j\pi k} (2j \sin \pi k)$$

$$(1 - e^{-j\pi k \frac{1}{N}}) = e^{-j\pi k \frac{1}{N}} (2j \sin \pi k \frac{1}{N})$$

$$s_k = \frac{\sin \pi k}{\sin \pi k \frac{1}{N}} e^{-j\pi k (1 + \frac{1}{N})}$$

Condition d'existence de la TF des signaux discrets



La TF du signal discret est périodique.

La TF inverse possède des limites d'intégration finies

Transformée de Fourier des signaux périodiques discrets

La TF d'un signal périodique est donnée par :

$$S(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{N} - l)$$

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

Dans une seule période :

$$S(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k \delta(f - \frac{k}{N})$$

$\delta(f - \frac{k}{N})$: impulsion de Dirac centrée sur $f = \frac{k}{N}$

Exemple :

$$s(n) = \sin(2\pi \frac{1}{N} n)$$

Période : N

$$s(n) = \frac{1}{2j} e^{j2\pi \frac{1}{N} n} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi \frac{1}{N} n}$$

$$s(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$S_1 = \frac{1}{2j}, \quad S_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

Donc la TF dans une période :

$$S(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k \delta(f - \frac{k}{N})$$

$$S(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2j} \delta(f - \frac{1}{N}) - \frac{1}{2j} \delta(f + \frac{1}{N})$$

La TF globale :

$$S(f) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2j} \delta(f - \frac{1}{N} - l) - \frac{1}{2j} \delta(f + \frac{1}{N} - l)$$

Rania Dj

Dans le cas d'un signal discret non périodique, on remplace la variable continue 'f' par une variable discrète

$$f = kM_e, \quad M_e : \text{la période d'échantillonnage}$$

$$1 = NM_e, \quad M_e = \frac{1}{N}$$

Si $s(n)$ est définie pour : $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, alors la DFT et l'IDFT sont respectivement données par :

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

DFT est une version échantillonnée de la TF

Exemple :

$$s(n) = \cos(2\pi \frac{1}{N_1} n)$$

la DFT :

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}; \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi \frac{1}{N_1} n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{e^{j2\pi \frac{1}{N_1} n} + e^{-j2\pi \frac{1}{N_1} n}}{2} \right) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$S(k) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{1}{N} (\frac{N}{N_1} - k) n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{1}{N} (\frac{N}{N_1} + k) n}$$

$$S(k) = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{1}{N} (\frac{N}{N_1} - k) n}}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{1}{N} (\frac{N}{N_1} + k) n}}_{I_2}$$

Pour $k = \frac{N}{N_1}$

$$I_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} 1 = \frac{N}{2}$$

Pour $k \neq \frac{N}{N_1}$

$$I_1 = \left[\frac{1 - (e^{j2\pi \frac{1}{N} (\frac{N}{N_1} - K)})^N}{1 - e^{j2\pi \frac{1}{N} (\frac{N}{N_1} - K)}} \right]$$

Dans ce cas $I_1 = 0$

La même chose pour $I_2 = \frac{N}{2}$ pour $k = -\frac{N}{N_1} + N$

$$S_K = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{pour } K = \frac{N}{N_1} \\ \frac{N}{2} & \text{pour } K = -\frac{N}{N_1} + 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Relation DFT et Série de Fourier
TFSD

$$S_K = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{j2\pi \frac{K}{N} n} = \frac{1}{N} S(K)$$

$$S(K) = N S_K$$

Dans toutes les équations précédentes: $T_e = 1$

• Si $T_e \neq 1$

$$S(nT_e) = \sum_{K \in \mathbb{Z}} S_K e^{j2\pi \frac{K}{NT_e} nT_e} = \sum_{K \in \mathbb{Z}} S_K e^{j2\pi \frac{K}{N} n}$$

$$S_K = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} S(nT_e) e^{-j2\pi \frac{K}{N} n}$$

$$S\left(\frac{K}{NT_e}\right) = NT_e S_K$$

La transformée de Fourier continue:

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nT_e) e^{-j2\pi \frac{f}{f_e} n}$$

$$S(nT_e) = \int_{f_e} S(f) e^{-j2\pi \frac{f}{f_e} n} df, \quad f_e = \frac{1}{T_e}$$

• La DFT est donnée par:

$$S(KT_e) = \sum_{n=0}^{N-1} S(nT_e) e^{j2\pi \frac{K}{N} n}, \quad K = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

• Propriétés de la DFT:

- Périodicité: $S(n) = S(n + PN)$
 $S(K) = S(K + PN)$

- Linéarité: $S_1(n) \xrightarrow{\text{DFT}} S_1(K)$
 $\sum_{n=0}^{N-1} a_i S_i(n) \xrightarrow{\text{DFT}} \sum_{n=0}^{N-1} a_i S_i(K)$

- Décalage cyclique temporelle

$$S(n - n_0) \xrightarrow{\text{DFT}} S(K) e^{-j2\pi \frac{K}{N} n_0}$$

- Décalage cyclique fréquentiel

$$S(n) e^{j2\pi \frac{K_0}{N} n} \xrightarrow{\text{DFT}} S(K - K_0)$$

- Symétrie:

Si $S(n)$ est une suite réelle alors

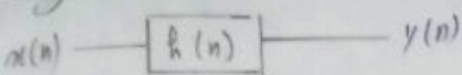
$$S(K) = S^*(N - K), \quad K = 0, 1, \dots, N-1$$

• Les échantillons de $S(K)$ sont symétriques par rapport à $\frac{N}{2}$. Cette propriété permet d'embarquer la moitié des calculs

Donc:

$$S\left(k + \frac{N}{2}\right) = S\left(k - \frac{N}{2}\right) = S^*\left(\frac{N}{2} - k\right)$$

Système SLIT



La réponse $y(n)$ de ce système, est de
réponse impulsionnelle $h(n)$. et l'entrée $x(n)$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

Le système est LIT si :

$$ax_1(n) + bx_2(n) \rightarrow h(n) \rightarrow ay_1(n) + by_2(n)$$

$$x(n-n_0) \rightarrow h(n) \rightarrow y(n-n_0) \dots$$

Si on connaît ~~sa sortie~~ la réponse
impulsionnelle d'un système, alors on
connaît sa sortie pour n'importe quelle entrée

2 - Le produit de convolution normal

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m)$$

Propriétés :

Commutativité : $a(n) * b(n) = b(n) * a(n)$

Distributivité : $a(n) * b(n) + a(n) * c(n) = a(n) * (b(n) + c(n))$

$x(n) * \delta(n) = x(n)$

$x(n) * \delta(n-N_0) = x(n-N_0)$

Exemple :

$$x(n) = \begin{cases} a^n & \text{pour } 0 \leq n \leq 7 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad a = 0,7$$

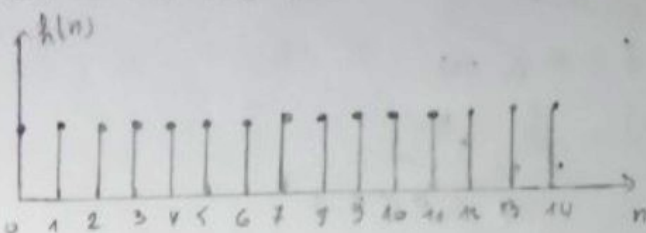
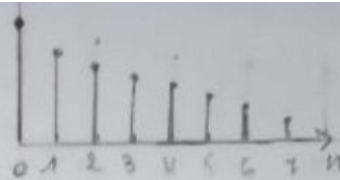
$$h(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq n \leq 14 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

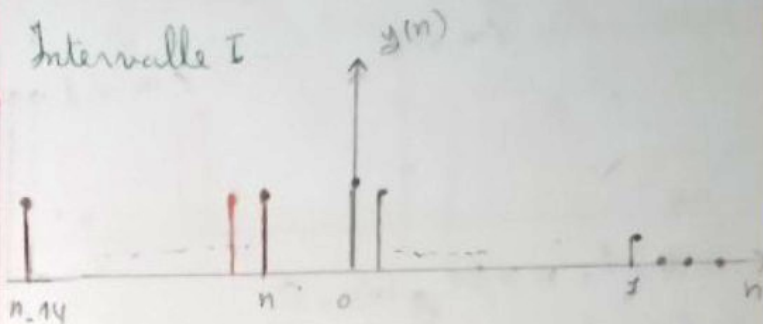
$$x(n) = \begin{cases} 0,7^n & \text{pour } 0 \leq n \leq 7 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m)$$

Rania Dj

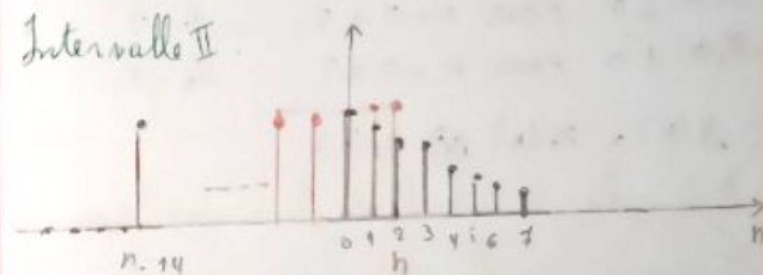


Intervalle I



$$0 > n, y(n) = 0$$

Intervalle II

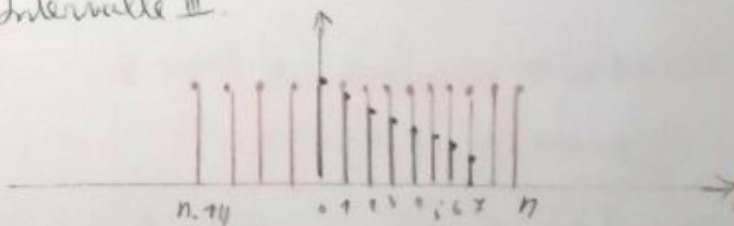


$$0 \leq n; \quad 0 > n-14; \quad 14 > n$$

$$0 \leq n \leq 7$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^n 1 \cdot a^k$$

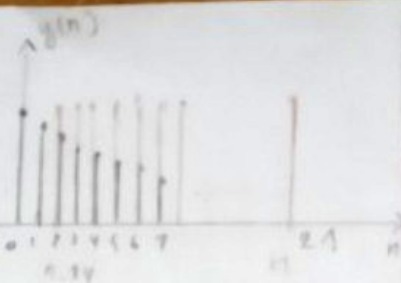
Intervalle III



$$n \geq 7; \quad 0 \geq n-14; \quad 7 \leq n \leq 14$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^7 a^k$$

Intervalle I



$$n > 1, n - 14 \geq 0$$

$$1 < n \leq 10$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n-14} a^k$$

$$14 < n \leq 21$$

Intervalle II



$$n > 1, n > 21, y(n) = 0$$

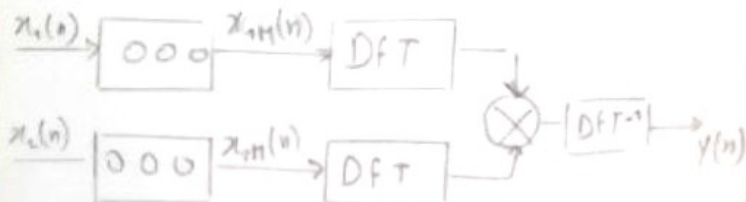
3. Convolution circulaire

$$x_1(n) \neq 0 \text{ pour } n = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1$$

$$x_2(n) \neq 0 \text{ pour } n = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1$$

$$y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$$

Exemple de calcul de la convolution linéaire par la convolution circulaire



Convolution circulaire $\Rightarrow$ Pour les Signaux Périodiques

Convolution linéaire $\Rightarrow$ Pour les Signaux aperiodiques

Rania Dj

Exemple. $Z(n) = x(n) \otimes x(n)$

$$x(n) = \cos\left(2\pi \frac{1}{10} n\right) \text{ pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

N : multiple de 10

DFT $x(n)$

$$S(k) = N S_k$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2} e^{j2\pi \frac{1}{10} n} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi \frac{1}{10} n}$$

$$\text{Donc } S_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pour } k = \frac{N}{10} \\ \frac{1}{2} & \text{pour } k = -\frac{N}{10} \end{cases}$$

$$S(k) = N S_k$$

$$S(k) = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{pour } k = \frac{N}{10} \\ \frac{N}{2} & \text{pour } k = -\frac{N}{10} \end{cases}$$

La convolution circulaire est donnée par :

$$y(n) = \text{IDFT}(\text{DFT}(x(n)) \cdot \text{DFT}(x(n)))$$

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N^2}{2} e^{j2\pi \frac{k}{N} n} = \frac{N}{2} \cos\left(2\pi \frac{1}{10} n\right)$$

Pour $n = 0, \dots, N-1$

$$y(n) = \frac{N}{2} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

Convolution périodique :

$x(n)$ et $x_{p2}(n)$.

$$y(n) = x_{p1}(n) * x_{p2}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_{p1}(k) \cdot x_{p2}(n-k).$$

$y(n)$ est périodique de période N

$$y_K = N X_{1K} \cdot X_{2K}.$$

$$Y(K) = X_1(K) \cdot X_2(K).$$

ec : X_{1K}, X_{2K} : Les coefficients de la série de Fourier de $x_{p1}(n)$.

$Y(K)$: Les coefficients de la série de Fourier de $y(n)$.

$X_1(K)$: DFT de $x_{p1}(n)$; $X_2(K)$: DFT de $x_{p2}(n)$.

$Y(K)$: DFT de $y(n)$.

5. Corrélation numérique :

$$r_{xh} = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(k-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n+k) h(k)$$

$x(n) * h(n)$ est différente de $h(n) * x(n)$

cependant nous avons : $r_{xh}(n) = r_{hx}(-n)$.

filtre numérique

Ramier D

Exo 1

$$y(n) = \frac{1}{3} [x(n+M) + x(n+M-1) + x(n+M-2)]$$

La TZ:

$$Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) Z^{-n}$$

$$Y(Z) = \frac{1}{3} [X(Z) Z^M + X(Z) Z^{M-1} + X(Z) Z^{M-2}]$$

$$Y(Z) = \frac{1}{3} X(Z) [Z^M + Z^{M-1} + Z^{M-2}]$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{3} [Z^M + Z^{M-1} + Z^{M-2}]$$

211: Le filtre est LIT:

1) Invariant dans le temps:

$$g(n) = \frac{1}{3} [x(n+M-n_0) + x(n+M-1-n_0) + x(n+M-2-n_0)]$$

$g(n) = y(n-n_0)$. Donc ce système est invariant dans le temps.

2) Système linéaire:

$$y(n) = a_0 y_1(n) + a_2 y_2(n)$$

$$g(n) = \frac{1}{3} [a_0 x_1(n+M-n_0) + a_2 x_2(n+M-n_0) + a_1 x_1(n+M-1-n_0) + a_2 x_2(n+M-1-n_0) + a_0 x_1(n+M-2-n_0) + a_2 x_2(n+M-2-n_0)]$$

$$y(n) = \frac{1}{3} a_0 [x_1(n+M) + x_1(n+M-1) + x_1(n+M-2)] + \frac{1}{3} a_2 [x_2(n+M) + x_2(n+M-1) + x_2(n+M-2)]$$

$$y(n) = a_0 y_1 + a_2 y_2$$

Donc ce système est LIT:

311: pour que ce filtre est réalisable.
 $M < 0$.

411: La réponse impulsionnelle:

$$h(n) = \text{TF}[H(f)]$$

$$h(n) = y(n) |_{x(n)=\delta(n)}$$

$$h(n) = \frac{1}{3} [\delta(n+M) + \delta(n+M-1) + \delta(n+M-2)]$$

Donc:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{pour } n = -M \\ \frac{1}{3} & \text{" } n = -M+1 \\ \frac{1}{3} & \text{" } n = -M+2 \end{cases}$$

511: Un filtre est réalisable s'il est causal

611: Pour $M=0$, et $M=1$ on calcule $H(Z)$ et $H(f)$.

711: $M=0$.

$$H(Z) = \frac{1}{3} [Z^0 + Z^{-1} + Z^{-2}] \Rightarrow \text{causal stable}$$

$$H(Z) = \frac{1}{3} [1 + Z^{-1} + Z^{-2}]$$

$$H(f) = H(Z) |_{Z=e^{j2\pi f}}$$

$$H(f) = \frac{1}{3} [1 + e^{j2\pi f} + e^{-j4\pi f}]$$

811: $M=1$

$$H(Z) = \frac{1}{3} [Z^1 + Z^0 + Z^{-1}]$$

$$H(Z) = \frac{1}{3} [1 + Z + Z^{-1}] \Rightarrow \text{pas causal}$$

$$H(f) = \frac{1}{3} [1 + e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f}]$$

911: La nature de filtre pour $M=0$ fir. (pas de dénominateur)

1011: Ce filtre est-il stable?

FIR: toujours stable.

IIR: ça dépend.

- La somme des coefficients inférieurs à l'infini donc stable.

Exo 2

(Rami D.)

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) - 2ax(n-1) + a^2x(n-2)$$

$$y(n) = 0, \quad n < 0$$

La TZ:

$$Y(z) = \mathcal{ZT}[y(n)]$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) z^{-n}$$

$$Y(z) - aY(z)z^{-1} = X(z) - 2aX(z)z^{-1} + a^2X(z)z^{-2}$$

$$Y(z)[1 - az^{-1}] = X(z)[1 - 2az^{-1} + a^2z^{-2}]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2az^{-1} + a^2z^{-2}}{1 - az^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{(1 - az^{-1})^2}{1 - az^{-1}}, \quad H(z) = 1 - az^{-1}$$

2) La nature de filtre: FIR

3) La réponse en fréquence:

$$H(f) = H(z)|_{z=e^{j2\pi f}} \Rightarrow H(f) = 1 - ae^{-j2\pi f}$$

3) La réponse impulsionnelle:

$$h(n) = \mathcal{ZT}^{-1}[H(z)]$$

$$h(n) = \mathcal{ZT}^{-1}[1 - az^{-1}]$$

$$H(z) = 1z^0 - az^{-1}$$

$$= (z^0)z^{-0} - a(z^{-1})(z^0)$$

$$h(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ -a & \text{si } n=-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Exo 3

$$ay(n) - by(n-1) = cx(n) - dx(n-1) + ex(n-2)$$

$$y(n) = 0, \quad n < 0$$

La TZ:

$$aY(z) - bY(z)z^{-1} = CX(z) - dX(z)z^{-1} + eX(z)z^{-2}$$

$$Y(z)[a - bz^{-1}] = X(z)[c - dz^{-1} + ez^{-2}]$$

$$H(z) = \frac{c - dz^{-1} + ez^{-2}}{a - bz^{-1}}$$

1) La nature de filtre selon les valeurs des coefficients 'a, b, c, d, e'

- La réponse impulsionnelle:

$$h(n) = y(n)|_{x(n)=\delta(n)}$$

$$ah(n) - bh(n-1) = x\delta(n) - d\delta(n-1) + e\delta(n-2)$$

Pour $n=0$

$$ah(0) - bh(-1) = x\delta(0) - d\delta(-1) + e\delta(-2)$$

$$ah(0) = x\delta(0)$$

$$h(0) = \frac{c\delta(0)}{a}, \quad \boxed{h(0) = \frac{c}{a}}$$

Pour $n=1$

$$ah(1) - bh(0) = c\delta(1) - d\delta(0) + e\delta(-1)$$

$$ah(1) - b\left[\frac{c}{a}\right] = -d\delta(0)$$

$$ah(1) = b\left[\frac{c}{a}\right] - d\delta(0)$$

$$h(1) = \frac{b}{a}\left[\frac{c}{a}\right] - \frac{d}{a}\delta(0)$$

$$h(1) = \frac{bc}{a^2} - \frac{d}{a}; \quad \boxed{h(1) = \frac{1}{a}\left[\frac{bc}{a} - d\right]}$$

Pour $n=2$:

$$ah(2) - bh(1) = c\delta(2) - d\delta(1) + e\delta(0)$$

$$ah(2) - b\left[\frac{1}{a}\left(\frac{bc}{a} - d\right)\right] = e\delta(0)$$

$$h(2) = \frac{e\delta(0)}{a} + \frac{b}{a}\left[\frac{1}{a}\left(\frac{bc}{a} - d\right)\right]$$

$$\boxed{h(2) = \frac{e}{a} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{bd}{a^2}}$$

Pour $n=3$:

$$ah(3) - bh(2) = c\delta(3) - d\delta(2) + e\delta(1)$$

$$h(3) = \frac{b}{a}h(2)$$

$$h(3) = \frac{b}{a}\left[\frac{e}{a} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{bd}{a^2}\right]$$

Pour $n=4$:

$$ah(4) - bh(3) = c\delta(4) - d\delta(3) + e\delta(2)$$

$$h(4) = \frac{b}{a}h(3)$$

$n=5$

$$h(s) - b(h(y)) = c\delta(s) - d\delta(y) + e\delta(z)$$

$$h(s) = \frac{b}{a} h(y) \quad h(s),$$

$$h(n) = \begin{cases} \frac{c}{a} & \text{pour } n=0 \\ \frac{bc}{a^2} - \frac{d}{a} & \text{pour } n=1 \\ \frac{b^{n-2}}{a^{n-2}} \left[\frac{bc}{a^2} - \frac{bd}{a^2} \right] + \frac{e}{a} & \text{pour } n \geq 2 \end{cases}$$

Exemple:

Filtre type I:

$$N = 2M, \quad h(n) = h(N-n)$$

$$h(M-n) = h(M+n)$$

$$H_z(f) = \sum_{n=0}^{2M} h(n) e^{-j2\pi f n}$$

Démontrons qu'on peut s'écrire:

$$H_z(f) = e^{-j2\pi f M} \left[h(M) + 2 \sum_{n=1}^M h(M-n) \cos(2\pi f n) \right]$$

$$\textcircled{1} \quad H_z(f) = e^{-j2\pi f M} \left[\sum_{n=0}^{2M} h(n) e^{-j2\pi f n} e^{j2\pi f M} \right]$$

$$H_z(f) = e^{-j2\pi f M} \left[\sum_{n=0}^{2M} h(n) e^{-j2\pi f (n-M)} \right]$$

on pose: $k = n - M, \quad n = k + M$

$$\rightarrow \text{Pour } n=0 \Rightarrow k = -M$$

$$\rightarrow \text{Pour } n=2M \Rightarrow k = M$$

$$H_z(f) = e^{-j2\pi f M} \left[\sum_{k=-M}^M h(k+M) e^{-j2\pi f k} \right]$$

$$H_z(f) = e^{-j2\pi f M} \left[\sum_{k=-M}^0 h(k+M) e^{-j2\pi f k} + \sum_{k=1}^M h(k+M) e^{-j2\pi f k} \right]$$

$$H_z(f) = e^{-j2\pi f M} \left[h(M) + 2 \sum_{k=1}^M h(k+M) e^{-j2\pi f k} \right]$$

$$H_z(f) = e^{-j2\pi f M} \left[h(M) + 2 \sum_{k=1}^M h(k+M) \cos(2\pi f k) \right]$$

on pose $k = n$

$$H_z(f) = e^{-j2\pi f M} \left[h(M) + 2 \sum_{n=1}^M h(M-n) \cos(2\pi f n) \right]$$

② Filtre de type II:

$$N = 2M+1, \quad h(n) = h(N-n)$$

$$H_z(f) = \sum_{n=0}^{2M+1} h(n) e^{-j2\pi f n}$$

Démontrons qu'on peut s'écrire:

$$H_z(f) = e^{-j2\pi f (M+\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{2M+1} h(n) e^{j2\pi f (n-M-\frac{1}{2})} \cos(2\pi f (n-\frac{1}{2}))$$

$$\textcircled{1} \quad H_z(f) = e^{-j2\pi f (M+\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{2M+1} h(n) e^{j2\pi f (n-M-\frac{1}{2})} e^{j2\pi f (M+\frac{1}{2})}$$

$$H_z(f) = e^{-j2\pi f (M+\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{2M+1} h(n) e^{j2\pi f (n-M-\frac{1}{2})}$$

on pose: $m = N-n, \quad N = 2M+1$

$\rightarrow$ pour $n=0$,
pour $n=2M+1$,

$$H_z(f) = e^{-j2\pi f (M+\frac{1}{2})} \left[\sum_{n=0}^M h(n) e^{j2\pi f (n-M-\frac{1}{2})} + \sum_{n=M+1}^{2M+1} h(n) e^{j2\pi f (n-M-\frac{1}{2})} \right]$$

$$H_z(f) = e^{-j2\pi f (M+\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{2M+1} h(n) e^{-j2\pi f (n-M-\frac{1}{2})}$$

on pose: $m = N-n, \quad n = N-m$

$$N = 2M+1, \quad n = M+1; \quad m = 2M+1 - n - 1, \quad m = M$$

$$d_1 = \sum_{n=0}^M h(N-m) e^{-j2\pi f (2M+1-M-\frac{1}{2})}$$

$$d_2 = \sum_{n=0}^M h(N-m) e^{-j2\pi f (M+\frac{1}{2})}$$

$$d_2 = \sum_{n=0}^M h(N-m) e^{-j2\pi f (M+\frac{1}{2})}$$

$$d_1 = \sum_{n=0}^M h(N-m) e^{-j2\pi f (M+\frac{1}{2})}$$

$$H_z(f) = e^{-j2\pi f (M+\frac{1}{2})} \left[\sum_{n=0}^M 2h(M-n) \cos(2\pi f (n-\frac{1}{2})) \right]$$

filtre de type III :

Karna Dj

$$N = 2M, \quad h(n) = -h(N-n)$$

$$h(n+M) = -h(M-n)$$

$$h(M) = 0$$

$$H_{II}(\omega) = \sum_{n=0}^{2M} h(n) e^{-j\omega \frac{P}{f_c} n}$$

écrit :

$$H_{II}(\omega) = e^{j(\frac{\pi}{2} - \omega \frac{P}{f_c} M)} \sum_{n=1}^M 2h(M-k) \sin(2\pi \frac{P}{f_c} k)$$

$$\textcircled{1} H_{II}(\omega) = e^{-j\omega \frac{P}{f_c} M} \sum_{n=0}^{2M} h(n) e^{-j\omega \frac{P}{f_c} (n-M)}$$

Posons : $K = n - M \quad n = K + M$

$$-n = 0 \Rightarrow K = -M$$

$$-n = 2M \Rightarrow K = M$$

$$H_{II}(\omega) = e^{-j\omega \frac{P}{f_c} M} \sum_{K=-M}^M h(K+M) e^{-j\omega \frac{P}{f_c} K}$$

$$H_{II}(\omega) = e^{-j\omega \frac{P}{f_c} M} \left[\sum_{K=-M}^0 h(K+M) e^{-j\omega \frac{P}{f_c} K} + \sum_{K=1}^M h(K+M) e^{-j\omega \frac{P}{f_c} K} \right]$$

$$H_{II}(\omega) = e^{-j\omega \frac{P}{f_c} M} \left[\sum_{K=0}^M h(M-K) e^{-j\omega \frac{P}{f_c} K} + \sum_{K=1}^M h(K+M) e^{-j\omega \frac{P}{f_c} K} \right]$$

$$H_{II}(\omega) = e^{-j\omega \frac{P}{f_c} M} \left[\frac{h(M)}{2} + \sum_{K=1}^M h(M-K) e^{-j\omega \frac{P}{f_c} K} + \sum_{K=1}^M h(M+K) e^{-j\omega \frac{P}{f_c} K} \right]$$

$$H_{II}(\omega) = e^{-j\omega \frac{P}{f_c} M} \left[\sum_{K=1}^M 2h(M-K) (e^{-j\omega \frac{P}{f_c} K} - e^{-j\omega \frac{P}{f_c} K}) \right]$$

$$H_{II}(\omega) = e^{-j\omega \frac{P}{f_c} M} \left[\sum_{K=1}^M 2j h(M-K) \sin(2\pi \frac{P}{f_c} K) \right]$$

$$H_{II}(\omega) = e^{j(\frac{\pi}{2} - \omega \frac{P}{f_c} M)} \left[\sum_{K=1}^M 2h(M-K) \sin(2\pi \frac{P}{f_c} K) \right]$$