Exercice 1 :

Déterminer la région de convergence des séquences numériques suivantes :

$x(n) = 1 \quad n \in [0, +\infty[$

$x(n) = a^n \quad n \in [0, +\infty[.$

$x(n) = a^n \quad n \in]-\infty, +\infty[.$

Solution :

① $x(n) = 1 \; ; \; n \in [0, +\infty[.$

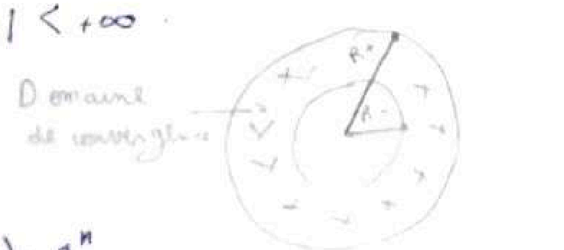
$R^- = \lim_{n \to +\infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}}$

$R^- = \lim_{n \to +\infty} |1|^{\frac{1}{n}} = 1.$

$R^+ = \dfrac{1}{\lim_{n \to +\infty} |x(-n)|^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{0} \Rightarrow \boxed{R^+ = +\infty}$

Le DC :

$1 < |Z| < +\infty$



② $x(n) = a^n$

$n \in [0, +\infty[.$

$R^- = \lim_{n \to +\infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}}$

$R^- = \lim_{n \to +\infty} |a^n|^{\frac{1}{n}} \; ; \; R^- = \lim_{n \to +\infty} |a^n|^{\frac{1}{n}} = a.$

$R^- = \lim_{n \to +\infty} (a^{\frac{n}{n}}) = |a|$

$R^+ = \dfrac{1}{\lim_{n \to +\infty} |x(-n)|^{\frac{1}{n}}} = \cancel{\dfrac{1}{\lim_{n \to +\infty} |a^{(-n)}|^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{|a^{-1}|} = |a|}$

$= \dfrac{1}{0} = +\infty$

Le DC : $a < |Z| < +\infty$

③ $x(n) = a^n, \quad n \in]-\infty, +\infty[.$

$R^- = \lim |x(n)|^{\frac{1}{n}} = \lim |a^n|^{\frac{1}{n}} = |a|$

$R^+ = \dfrac{1}{\lim_{n \to +\infty} |x(-n)|^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\lim_{n \to +\infty} |a^{-n}|^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{a^{-1}} = |a|$

$R^+ = R^- \Rightarrow$ pas de DC $\Rightarrow$ La TZ n'existe pas.

Exercice :

" " " "

" ...

$x(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0. \\ -b^n & n < 0 \\ \text{avec } |a| < |b| \end{cases}$

$R^- = \lim_{n \to +\infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} |a^n|^{\frac{1}{n}} = |a|.$

$R^+ = \dfrac{1}{\lim |x(-n)|^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\lim |-b^{-n}|^{\frac{1}{n}}} = |b|.$

Le DC : $|a| < |Z| < |b|$

Exercice 2 :

Déterminer la TZ :

$x(n) = \begin{cases} n+1 & 0 \leq n \leq 2 \\ 5-n & 2 < n \leq 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$X(Z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) Z^{-n}$

$= \sum_{0}^{2} (n+1) Z^{-n} + \sum_{3}^{4} (5-n) Z^{-n}$

$= Z^0 + 2Z^{-1} + 3Z^{-2} + 2Z^{-3} + Z^{-4}$

$X(Z) = 1 + 2Z^{-1} + 3Z^{-2} + 2Z^{-3} + Z^{-4}.$

* $x(n) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2^n} & n > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) Z^{-n}$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{-1}{2^n} Z^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} Z^{-n}$

$X(Z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} (2Z)^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2Z}\right)^n$

$$= 1 - 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n$$

$$X(z) = 1 - \frac{1 - \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n}{1 - \frac{1}{2z}}$$

$$X(z) = 1 - \frac{1 - \cancel{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(2z)^n}}^{\,0}}{1 - \frac{1}{2z}}$$

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}}$$

$R^+ = +\infty$

$R^- = 1/2 \qquad |z| > \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \leq |z| < +\infty$$

$$R^- = \lim_{n \to +\infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} = \lim \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$R^+ = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\lim |x(-n)|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n \to +\infty} |2^{-n}|^{\frac{1}{n}}}$$

$$R^+ = \frac{1}{2^{-1}} = 2 \qquad \frac{1}{2} < |z| < 2.$$

$$X(z) = \sum_{1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2^n}\right) \cdot z^{-n} + \sum_{-\infty}^{0} 2^n z^{-n}$$

$$I_2 = \sum_{-\infty}^{0} \left(\frac{2}{z}\right)^n$$

on pose $m = -n \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \Rightarrow m = 0. \\ n = -\infty \Rightarrow m = +\infty \end{cases}$

$$I_2 = \sum_{0}^{+\infty} 2^{-m} z^m = \sum_{0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^m$$

$$I_2 = \frac{1 - \lim_{n \to +\infty} \cancel{\left(\frac{z}{2}\right)^m}^{\,0}}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{z}{2}}$$

$$I_2 = \frac{2}{2 - z}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2z} + \frac{2}{2 - z}$$

$$X(z) = \frac{2 - z - 4z + 2}{(1 - 2z)(2 - z)}$$

$$X(z) = \frac{4 - 5z}{(1 - 2z)(2 - z)}$$

suite exo 2

Déterminer la TZ des séquences suivantes :

$x_1(n) = a^n \qquad n \in [0, +\infty[$

$x_2(n) = 2^n \qquad n \in [0, +\infty[$

[illegible] $n \in]-\infty, +\infty[$

1) TZ

[illegible]

convergence [illegible]

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

si $|a| < 1$, $-1 < a < 1$

$$X_1(z) = \frac{1 - \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n}{1 - (a/z)}$$

$$X_1(z) = \frac{1 - \lim \left(\frac{a}{z}\right)^n}{1 - (a/z)}$$

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{z}\right)} = \frac{z}{z - a}$$

$X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_3(n) z^{-n}$

Elle n'a pas une domaine de convergence (TZ existe pas)

$x(n)$ n'as pas DC ⇒ La TZ n'existe pas

- $X_4(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_4(n) z^{-n}$

$X_4(z) = \sum_{-\infty}^{-1} -b^n z^{-n} + \sum_{0}^{+\infty} a^n z^{-n}$

$X_4(z) = \frac{1 - \lim_{n \to \infty} \left(\frac{-b}{z}\right)^n}{1 - (-b/z)} + \frac{1 - \lim \left(\frac{a}{z}\right)^n}{1 - (a/z)}$

$= \frac{1}{1 - (-b/z)} + \frac{1}{1 - (a/z)}$

$= \frac{z}{z + b} + \frac{z}{z - a}$

$\begin{cases} |b| < 1 \\ |a| < 1 \end{cases}$

Exo 3 :

$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1$

1) Determiner $x(n)$ par la méthode des residus

$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz$

$= \sum Res(X(z) z^{n-1})$

$X(z) z^{n-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \cdot z^{n-1}$

$= \frac{z^1 z^{n-1}}{z - 1} = \frac{z^n}{z - 1}$

① si $n \geq 0$, $X(z) z^{n-1}$ Possede un seul pole simple

$P = 1$

$Res_a^1 = \lim_{z \to a} (z - a) X(z) z^{n-1}$ a : pol, q : ordre

$x(n) = \sum Res$

$Res_1^1 = \lim_{z \to 1} (z - 1) \frac{z^n}{(z - 1)} = 1$

② si $n < 0$

$n = -1$

$X(z) z^{n-1} = \frac{1}{z^1 (z - 1)}$

Possède deux poles simple

$Res_0^1 = \lim_{z \to 0} (z - a) X(z) z^{n-1}$

$Res_0^1 = \lim_{z \to 0} z \cdot \frac{1}{z(z-1)} = \boxed{-1}$

$Res_1^1 = \lim_{z \to 1} (z - 1) \frac{1}{z(z - 1)} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{z} = 1$

$x(n) = \sum Res (X(z) z^{n-1})$

$= 1 - 1 = 0$

$x(n) = 0$ pour $n = -1$ et $n < 0$

- Pour $n < 0$ et $n \neq -1$

$X(z) \cdot z^{n-1} = \frac{1}{z^n (z - 1)}$

Possède deux poles, un pole simple $P = 1$, et un pole multiple P

$Res_1^1 = \lim_{z \to 1} (z - 1) \cdot \frac{1}{z^n (z - 1)} = \lim \frac{1}{z^n} = \boxed{1}$

- Pour un pole multiple

$Res_a^q = \lim_{z \to a} \frac{1}{(q - 1)!} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} \left[X(z) z^{n-1} (z - a)^q\right]$

$Res_0^n = \lim_{z \to 0} \frac{1}{(n - 1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{1}{z^n (z - 1)} (z - 0)^n\right]$

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{1}{(z-1)}\right)$$

$$Res_0^n = \frac{1}{(n-1)!} \lim (-1)^n \frac{(n-1)!}{(z-1)^{n-1}}$$

$$Res_0^n = \lim_{z\to 0} \frac{(-1)^n}{(z^{-1})^{n-1}} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(-1)^n(-1)^{-1}} = -1$$

$$\sum Res = -1 + 1 = \boxed{0}$$

$x(n) = 0$ pour $n < -1$

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Exo 04 :

$$X(Z) = \frac{Z^{-1}}{1-\sqrt{2}Z^{-1}+Z^{-2}} \quad |Z|>1$$

- Les pôles
- Les 1er échantillon de $x(n)$ par la méthode de la division

Les pôles :

$$1-\sqrt{2}Z^{-1}+Z^{-2} = 0$$

$$\frac{Z^2-\sqrt{2}Z+1}{Z^2} = 0 \Rightarrow Z^2-\sqrt{2}Z+1=0$$

$$\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4(1)(1) = 2-4 = -2 = 2j^2$$

$$Z_1 = \frac{+\sqrt{2}-\sqrt{2}j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j$$

$$Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j$$

Serie 2 TD :

$Z_c = 50\,\Omega$, $\Gamma_R = 0.54\,e^{j128°}$

$\Gamma_R = 0.54\,e^{j128°}$

$(Z_R)_N = 0.36 + j0.43$.

$Z_R = (Z_R)_N \times 50 =$

$0.36 \times 50 + j\,0.43 \times 50$

$Z_R = (18 + j\,21.5)\,\Omega$

$S = 3.3$.

$(Y_{RN}) = 1.15 - j\,1.35$

$$Y_R = \frac{(Y_R)_N}{50} = \frac{1.15}{50} + j\,\frac{1.35}{50}$$

$Y_R = 0.023 - j\,0.027$

1- $\Gamma_R = 0.4\,e^{-j162°}$

$(Z_R)_N = 0.44 - j\,0.13$

$Z_R = 0.44 \times 50 - j\,0.13 \times 50$

$Z_R = 22 - j\,6.5$

$\boxed{S = 2.3}$

$(Y_R)_N = 2.3 + j0.65$

$$Y_R = \frac{2.5}{50} + j\,\frac{0.65}{50}$$

$Y_R = (0.046 + j0.013)\,S$

Exo 4 :

Soit le signal $x(n)$, dont la TZ est donnée par :

$$X(Z) = \frac{Z}{1-\sqrt{2}Z^{-1}+Z^{-2}}$$

- Déterminer et retrouver les 1er échantillons de $x(n)$ par la méthode de la division

Les pôles

on $X(Z) = \dfrac{Z^{-1}}{1-\sqrt{2}Z^{-1}+Z^{-2}}$

$1-\sqrt{2}Z^{-1}+Z^{-2}=0$

$\Delta=(\sqrt{2})^2-4(-1)(1)$

$\Delta=-2=2i^2$

$P_1=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$P_2=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

②

Z^{-1} | $1-\sqrt{2}Z^{-1}+Z^{-2}$

$Z^{-1}-\sqrt{2}Z^{-2}+Z^{-3}$ | $Z^{-1}+\sqrt{2}Z^{-2}-Z^{-3}-Z^{-5}-\sqrt{2}Z^{-6}-Z^{-7}$

$\sqrt{2}Z^{-2}-Z^{-3}$

$\sqrt{2}Z^{-2}-2Z^{-3}+\sqrt{2}Z^{-4}$

$Z^{-3}-\sqrt{2}Z^{-4}$

$Z^{-3}-\sqrt{2}Z^{-4}+Z^{-5}$

$-Z^{-5}$

$-Z^{-5}+\sqrt{2}Z^{-6}-Z^{-7}$

$-\sqrt{2}Z^{-6}+Z^{-7}$

$-\sqrt{2}Z^{-6}+2Z^{-7}-\sqrt{2}Z^{-8}$

$-Z^{-7}+\sqrt{2}Z^{-8}$

$x(1)=1$

$x(2)=\sqrt{2}$

$x(3)=-1$

$x(4)=0$

$x(5)=-1$

$x(6)=-\sqrt{2}$

$x(7)=-1$

Exo 06:

Calculer la TZ de la séquence numérique suivante: $x(n)=(0.8)^n u(n)$

$X(Z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)Z^{-n}$

$\sum_{0}^{+\infty}(0,8)^n Z^{-n}=\sum_{0}^{+\infty}\left(\dfrac{0,8}{Z}\right)^n$

$X(Z)=\dfrac{1-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{0,8}{Z}\right)^n}{1-\left(\frac{0,8}{Z}\right)}=\dfrac{1}{1-\left(\frac{0,8}{Z}\right)}$

$X(Z)=\dfrac{1}{\frac{Z-0,8}{Z}}=\boxed{\dfrac{Z}{Z-0,8}}$

2) Vérifier le théorème de la valeur initiale

$x(0)=\lim_{Z\to+\infty}X(Z)$

$x(0)=0,8^0=1$

$\lim_{Z\to+\infty}X(Z)=\lim_{Z\to+\infty}\dfrac{Z}{Z-0,8}=1$

$\lim_{Z\to+\infty}X(Z)=\lim_{Z\to+\infty}\dfrac{Z}{Z\left(1-\frac{0,8}{Z}\right)}=1$

Exo 07

Déterminer la TZ^{-1} par la décomposition en fonctions rationnelles. $\frac{x}{y}$, $\frac{ay+b}{y}$

$X(Z)=\dfrac{Z^3-Z^2-Z+2}{Z^2-3Z+2}$ $\quad \frac{x}{b}\big|\frac{y}{a}$

$X(Z)=(Z+1)+\dfrac{Z^2}{Z^2-3Z+2}$

$X(Z)=(Z+1)+Z^2\left(\dfrac{1}{Z^2-3Z+2}\right)$ $X_1(Z)$

$Z^2-3Z+2=0$

$\Delta=(-3)^2-(4)(1)(2)$

$\boxed{\Delta=1}$

$a_1=\dfrac{3-1}{2}=\boxed{1}$, $a_2=\dfrac{3+1}{2}=\boxed{2}$

$X(Z)=(Z+1)+Z^2\left(\dfrac{\alpha_1}{Z-1}+\dfrac{\alpha_2}{Z-2}\right)$

$\alpha_1=(Z-1)X_1(Z)\big|_{Z=1}$

$\alpha_1=(Z-1)\cdot\dfrac{1}{(Z-1)(Z-2)}\Big|_{Z=1}=-1$

$\alpha_2=(Z-2)X(Z)\big|_{Z=2}$

$\alpha_2=(Z-2)\dfrac{1}{(Z-1)(Z-2)}\Big|_{Z=2}=1$

Donc

$X(Z) = Z + 1 - Z^{\bullet}\left(\frac{Z}{Z-1} - \frac{Z}{Z-2}\right)$

$x(n) = 1^n$, $X(Z) = \sum 1^n Z^{-n}$

$x_1(n) = 2^n$, $X(Z) = \sum 2^n Z^{-n}$

$$\boxed{X(Z) = Z + 1 - Z^{\bullet}\left(\sum\left(\frac{1}{Z}\right)^n - \sum\left(\frac{2}{Z}\right)^n\right)}$$

$X(Z) = Z + 1 - Z\left(\sum Z^{-n} \cdot 1^n - \sum 2^n Z^{-n}\right)$

$X(Z) = Z + 1 - Z\left(\sum Z^{-n}(1 - 2^n)\right)$

$X(Z) = Z + 1 + Z\left(\sum Z^{-n}(2^n - 1)\right)$

$$\boxed{X(Z) = Z + 1 + Z\left(\sum (2^n - 1) Z^{-n}\right)}$$

$X(Z) = Z + 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (2^n - 1) Z^{-n+1}$

$X(Z) = Z + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2^{n+1} - 1) Z^{-n}$

$X(Z) = (Z^{-1})^{-1} + (Z^{-1})^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2^{n+1} - 1) Z^{-n}$

$X(Z) = (Z^{-1})^{-1} + (Z^{-1})^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2^{n+1} - 1)(Z^{-1})^n$

$x(n) = 1$ si $n = -1$

$x(n) = 1$ si $n = 0$

$x(n) = 2^{n+1} - 1$ si $n \geq 1$

$x(n) = 0$ si $n < -1$
ailleurs

Exercice : Filtre numérique

Soit le filtre de fonction de transfert

$H(Z) = Z^3 + 4Z^2 + Z - 1$

Exercice :

On considère le filtre régi par l'équation aux différences suivante

$y(n) = \frac{1}{3}[x(n+M) + \ldots$

$M \in \mathbb{N}$

Calculer la TZ de la RI

$Y(Z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} y(n) Z^{-n}$

$TZ\{y(n)\} = TZ\left[\frac{1}{3} x(n+M) + x(n+M-1) + x(n+M-2)\right]$

$Y(Z) = \frac{1}{3}\left[X(Z)Z^M + X(Z)Z^{(M-1)} + X(Z)Z^{(M-2)}\right]$

$Y(Z) = \frac{1}{3}\left[X(Z)Z^M + X(Z)Z^M \cdot X(Z)Z^{-1} + X(Z)Z^M + X(Z)Z^{-2}\right]$

$Y(Z) = \frac{1}{3} X(Z)\left[Z^M + Z^{M-1} + Z^{M-2}\right]$

$$\boxed{H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{3}\left[Z^M + Z^{M-1} + Z^{M-2}\right]}$$

2) Montrer que ce filtre est LIT

Invariance dans le temps

$x(n)$ —[ ]— $y(n)$

$x(n-n_0)$ —[ ]— $g(n) = y(n-n_0)$

$g(n) = \frac{1}{3}\left[x(n+M-n_0) + x(n+M-1-n_0) + x(n+M-2-n_0)\right]$

$= y(n-n_0)$

La linéarité :

$x_1(n)$ —[ ]→ $y_1(n)$

$x_2(n)$ —[ ]→ $y_2(n)$

$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)$ —[ ]→ $g(n) \overset{?}{=} a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$

~~$y(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$~~

$g(n) = \frac{1}{3}\left[a_1 x_1(n+M) + a_2 x_2(n+M) + a_1 x_1(n+M-1)\right.$
$\left. + a_2 x_2(n+M-1) + a_1 x_1(n+M-2) + a_2 x_2(n+M-2)\right]$

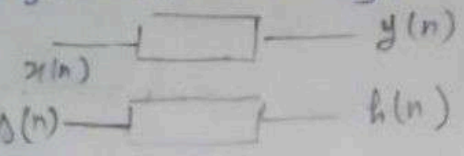
$g(n) = \frac{a_1}{3}\left[x_1(n+M) + x_1(n+M-1) + x_1(n+M-2)\right]$
$+ \frac{a_2}{3}\left[x_2(n+M) + x_2(n+M-1) + x_2(n+M-2)\right]$

④ Quelle est la valeur de M pour laquelle le filtre est réalisable

③ Déduire sa réponse impulsionnelle.

$h(n) = TZ^{-1}[H(Z)]$

$h(n) = TZ^{-1}\left[\frac{1}{3}(Z^{M} + Z^{M-1} + Z^{M-2})\right]$



$h(n) = y(n)|_{x(n)=\delta(n)}$

$= \frac{1}{3}[(\delta(n+M) + \delta(n+M-1) + \delta(n+M-2)]$

• Les coefficients du filtre :

$h = [\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} , 1/3]$

ou $h = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$

ou $h(n) = \begin{cases} 1/3 & \text{pour } n = -M \\ 1/3 & \text{pour } n = -M+1 \\ 1/3 & \text{pour } n = -M+2 \end{cases}$

④ Un filtre est réalisable si il est causal.

* Pour M = 1 et M = 0, calculer H(Z) et H(f)

• Pour M = 1 — partie la lin. manche causal

$H(Z) = \frac{1}{3}[Z^{1} + Z^{0} + Z^{-1}]$

$H(Z) = 1/3[Z + 1 + Z^{-1}]$

• Pour $H(f)|_{Z=e^{j2\pi f}} = \frac{1}{3}[e^{j2\pi f} + 1\, e^{-j2\pi f} + 1]$

$= \frac{1}{3}[1+2\cos 2\pi f]$

• Pour M = 0 — causal. ← négatif

⑤ $H(Z) = \frac{1}{3}[Z^{0} + Z^{-1} + Z^{-2}] = \frac{1}{3}[1 + Z^{-1} + Z^{-2}]$

$H(f) = H(Z)|_{Z=e^{j2\pi f}} = \frac{1}{3}[1 + e^{-j2\pi f} + e^{-j4\pi f}]$

⑤ La nature du filtre pour M = 0

Pas de dénominateur ⟹ filtre FIR

⑥ Ce filtre est-il stable ?

La somme les coefficients inférieur à l'infini.

FIR toujours stable.

IIR ça dépend

Exercice 2 :

Soit le filtre définit par l'équation aux différences suivante :

$y(n) - ay(n-1) = x(n) - 2a\,x(n-1) + a^2x(n-2)$

avec $y(n) = 0 \quad n < 0$

• Déterminer la TZ de ce filtre

$Y(Z) - aY(Z)Z^{-1} = X(Z) - 2a X(Z)Z^{-1} + a^2X(Z)Z^{-2}$

$Y(Z)[1 - aZ^{-1}] = X(Z) - 2aX(Z)Z^{-1} + a^2X(Z)Z^{-2}$

$Y(Z)[1 - aZ^{-1}] = X(Z)[1 - 2aZ^{-1} + a^2Z^{-2}]$.

$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)}$

$H(Z) = \frac{1 - 2aZ^{-1} + a^2Z^{-2}}{1 - aZ^{-1}}$

$H(Z) = \frac{(1 - aZ^{-1})^{2}}{1 - aZ^{-1}} = \boxed{1 - aZ^{-1}}$

FIR

② La nature de ce filtre :

FIR.

③ La réponse en fréquence.

$H(f) = H(Z)|_{Z=e^{j2\pi f}}$ $\quad H(f) = |H(Z)|_{Z=e^{j2\pi f}}$

$\boxed{H(f) = 1 - a e^{-j2\pi f}}$

- La réponse impulsionnelle.

$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n} = 1 - a z^{-1}$

$= 1z^{0} - a z^{-1}$

$h(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n=0 \\ -a & \text{pour } n=1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$h(0) = 1$

$h(1) = -a$

$H(z) = \sum_{0}^{2} h(n) z^{-n}$

$= h(0) z^{0} + h(z) z^{-n}$

$= 1 - z^{-n}$.

$h(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = a \\ -a & \text{pour } n = 1. \end{cases}$

Exo 3

Soit le filtre définit par l'equation aux différences suivantes :

$ay(n) - by(n-1) = cx(n) - dx(n-1) ex(n-2)$

avec : $y(n) = 0 \quad n < 0$.

Déterminer la TZ .. ..

Solution.

$aY(z) - bY(z)z^{-1} = aX(z) - dX(z)z^{-1} + eX(z)z^{-2}$

$Y(z)[a - bz^{-1}] = X(z)[a - dz^{-1} + ez^{-2}]$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a - dz^{-1} + ez^{-2}}{a - bz^{-1}}$

La nature du filtre :

il s'agit d'un filtre FIR, IIR.

selon ~~les coefficients~~ valeurs des coefficients a, b, c, d, e

$H(z) = \sum_{0}^{1} h(n) z^{-n}$ réalisable.

$H(z) = \sum_{-M}^{-M+1} h(n) z^{-n}$

Si $M < 0$ réalisable (stable)

si $M > 0$ ≠ réalisable ≠ stable

La réponse impulsionnelle :

~~Pour n=0~~

$x(n) = \delta(n)$

$y(n) = h(n)$.

Pour $n = 0$.

$a h(0) - b h(-1) = c\delta(0) - d\delta(-1) + e\delta(-2)$

$\begin{cases} \delta & t = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$a h(0) = \frac{c\delta(0)}{a}$, $\boxed{a h(0) = \frac{c\delta(0)}{a}}$

② Pour $n = 1$

$a h(1) - b h(0) = c\delta(1) - d\delta(0) + e\delta(-1)$

$a h(1) = b\left[\frac{c}{a}\delta(0)\right] - d\delta(0)$.

$a h(1) = \delta(0)\left[b\frac{c}{a} - d\right]$

$h(1) = \delta(0)\left[b\frac{c}{a^2} - \frac{d}{a}\right]$

Pour $n = 2$

$ah(2) - b(1) = c\delta(2) - d\delta(1) + e\delta(0)$

$a h(2) = b\left[\delta(0)\left[\frac{bc}{a^2} - \frac{d}{a}\right] + e\delta(0)\right]$.

$a h(2) = \delta(0)\left[\left[\frac{b^2c}{a^2} - \frac{bd}{a}\right] + e\right]$

$h(2) = \delta(0)\left[\left[\frac{b^2c}{a^3} - \frac{bd}{a^2}\right] + \frac{e}{a}\right]$

Pour $n=3$

$$h(3) = \delta(0)\left[\left[\frac{b^2c}{a^4} - \frac{b^2d}{a^3}\right] + \frac{e}{a^2}\right]$$

$$h(3) = \frac{b}{a}\left[\underbrace{\delta(0)\left[\frac{b^2c}{a^3} - \frac{bd}{a^2}\right] + \frac{e}{a}}_{h(2)}\right]$$

$$h(3) = \frac{b}{a}\, h(2)$$

Pour $n=4$.

$$a\,h(4) - b\,h(3) = c\cancel{\delta(4)} - d\cancel{\delta(3)} + e\cancel{\delta(2)}$$

$$a\,h(4) = b\,h(3)$$

$$\boxed{h(4) = \frac{b}{a}\, h(3)}$$

Pour $n=5$.

$$h(5) = \frac{b}{a}\, h(4) = \frac{b^3}{a^3}\, h(2)$$

$$\vdots$$

$$h(n) = \frac{b^{n-2}}{a^{n-2}}\, h(2).$$

$$h(n) = \begin{cases} \frac{c}{a} & \text{Pour } n=0. \\ \frac{bc}{a^2} - \frac{d}{a} & \text{pour } n=1 \\ \frac{b^{n-2}}{a^{n-2}}\left[\left[\frac{b^2c}{a^3} - \frac{bd}{a^2}\right] + \frac{e}{a}\right] & \text{pour } n \geq 2 \end{cases}$$

si $b=0$

$H(Z)$ est FIR si $b=0$.

Exo :

Filtre de type I.

Les filtres de ce type ont un ordre $N=2M$. Ils représentent une RI symétrique rapport à $N/2$

Ainsi $h(n)$ vérifie

$$h(n) = h(N-n).$$

$$h(n+M) = h(M-n) \quad \forall\ 1 \leq n \leq M$$

- Montrez que la RF peut s'écrire :

$$H_1(f) = \sum_{n=0}^{2M} h(n)\, e^{-j2\pi \frac{f}{fe} n}$$

Peut s'écrire :

$$H_1(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{fe}M}\left[h(M) + 2\sum_{n=1}^{M} h(M-n)\cos 2\pi n \frac{f}{fe}\right]$$

solution :

$$H_1(f) = \sum_{n=0}^{2M} h(n)\, e^{-j2\pi\frac{f}{fe}n}$$

$$H_1(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{fe}M}\left[\sum_{n=0}^{2M} h(n)\, e^{-j2\pi\frac{f}{fe}n} \cdot e^{j2\pi\frac{f}{fe}M}\right]$$

$$H_1(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{fe}M}\left[\sum_{n=0}^{2M} h(n)\, e^{-j2\pi\frac{f}{fe}n} \cdot e^{j2\pi\frac{f}{fe}M}\right]$$

Posons : $n - M = K \Rightarrow n = K + M$.

$K =$

Pour $n=0 \Rightarrow K = -M$.

Pour $n = 2M \Rightarrow K = M$.

$$H_1(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{fe}M}\left[\sum_{K=-M}^{M} h(K+M)\, e^{-j2\pi\frac{f}{fe}(n-M)}\right]$$

$$H_1(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{fe}M} \cdot \left[\sum_{K=-M}^{M} h(K+M)\, e^{-j2\pi\frac{f}{fe}K}\right]$$

$$H_1(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{fe}M}\left[\underbrace{\sum_{K=-M}^{-1} h(K+M)\, e^{-j2\pi\frac{f}{fe}K}}_{\alpha_1} + \underbrace{\sum_{K=0}^{M} h(K+M)\, e^{-j2\pi\frac{f}{fe}K}}_{\alpha_2}\right]$$

$$H_1(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{fe}M}\left[\alpha_1 + \alpha_2\right]$$

$$H_1(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{fe}M}\left[\alpha_1 + \alpha_2\right].$$

$$\alpha_1 = \sum_{K=-M}^{-1} h(K+M)\, e^{-j2\pi\frac{f}{fe}K}$$

$K = -K$

$$\alpha_1 = \sum_{K=1}^{M} h(M-K)\, e^{j2\pi\frac{f}{fe}K} = \sum_{K=1}^{M} h(K+M)\, e^{j2\pi\frac{f}{fe}K}$$

$$\boxed{\alpha_1 = \sum_{K=1}^{M} h(K+M)\, e^{j2\pi\frac{f}{fe}K}}$$

$$\boxed{\alpha_2 = \sum_{K=0}^{M} h(K+M)\, e^{-j2\pi\frac{f}{fe}K}}$$

$\alpha_2 = \sum_{K=0}^{M} h(K+M) e^{-j2\pi \frac{f}{Fe} K}$

Pour $K = 0$ $= \alpha_2 = h(M)$

$\alpha_2 = \alpha_2|_{K=0} + \sum_{K=1}^{M} h(M+K) e^{-j2\pi\frac{f}{Fe} K}$

$H_I(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}M} [\alpha_1 + \alpha_2]$

$\cancel{H_I(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}M}\left[\sum_{K=1}^{M} h(K+M) + h(M) + \sum_{1}\right.}$

$H(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}M}\left[\sum_{K=1}^{M} h(K+M) e^{j2\pi\frac{f}{Fe}K} + h(M) + \sum_{K=0}^{M} h(K+M) e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}K}\right]$

$H_I(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}M}\left[h(M) + \cancel{2\cos}\sum_{K=1}^{M} h(K+M)\underbrace{\left[e^{j2\pi\frac{f}{Fe}K} + e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}K}\right]}_{(2\cos 2\pi \frac{f}{Fe} K)}\right]$

$$\boxed{H_I(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}M}\left[h(M) + 2\sum_{K=1}^{M} h(K+M)\cos 2\pi\frac{f}{Fe}K\right]}$$

Exo

Filtres de ce type ont un ordre impair ($N = 2M+1$) et présente une R.I. symétrique par rapport à $N/2$. ainsi $h(n)$ vérifie :

$h(n) = h(N-n)$.

Montrons que :

$H_{II}(f) = \sum_{n=0}^{2M+1} h(n) e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}n}$

réécrit :

$H_{II}(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2})} \sum_{n=1}^{M+1} 2\, h(M+1-n)\cos\left(2\pi\frac{f}{Fe}(n-\frac{1}{2})\right)$

Solution

$H_{II}(f) = \sum_{n=0}^{2M+1} h(n) e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}n}$

$H_{II}(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{2M+1} h(n) e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}n} e^{j2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2})}$

$H_{II}(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2})} \cdot \sum_{n=0}^{2M+1} h(n) e^{j2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2}-n)}$

$= e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2})}\left[\underbrace{\sum_{n=0}^{M} h(n) e^{j2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2}-n)}}_{\alpha_1} + \underbrace{\sum_{n=M+1}^{2M+1} h(n) e^{j2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2}-n)}}_{\alpha_2}\right]$

On pose :

$m = N - n \Rightarrow m = 2M+1-n$.

$\boxed{n = 2M+1-m}$

Pour $n = M+1$

$m = 2M+1 - M - 1$.

$\boxed{m = M}$

Pour $n = 2M+1$.

$m = 2M+1-2M-1$.

$\boxed{m = 0}$

$\alpha_2 = \sum_{0}^{M} h(N-m) e^{j2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2}-2M-1+m)}$

$\alpha_2 = \sum_{0}^{M} h(N-m) e^{j2\pi\frac{f}{Fe}(-M-\frac{1}{2}+m)}$

$\alpha_2 = \sum_{0}^{M} h(N-m) e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2}-m)}$

$h(n) = h(N-n)$

$h(m) = h(N-m)$

$\alpha_2 = \sum_{0}^{M} h(m) e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2}-m)}$

Posons $n = m$

$\alpha_1 = \sum_{m=0}^{M} h(m) e^{+j2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2}-m)}$

$\Rightarrow H_{II}(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2})}[\alpha_1 + \alpha_2]$

$H_{II}(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2})} \cdot \left[\sum_{n=0}^{M} h(m)\, 2\cos\left(\frac{2\pi f}{Fe}(M+\frac{1}{2}-m)\right)\right]$

$H_{II}(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2})}\left[\sum_{n=0}^{M} h(n) . 2\cos\left(2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2}-m)\right)\right]$

Posons : $m = M+1-n$.

Pour $m = 0 \Rightarrow n = M+1$.

Pour $m = M \Rightarrow n = 1$

$H_{II}(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2})} \cdot \sum_{n=1}^{M+1} 2h(M+1-n)\cos\left(2\pi\frac{f}{Fe}(n-\frac{1}{2})\right)$

$H_{II}(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}(M+\frac{1}{2})} \sum_{n=1}^{M+1} 2h(M+1-n)\cos\left(2\pi\frac{f}{Fe}(n-\frac{1}{2})\right)$

ur les filtres de ce type, l'ordre N est pair ($N = 2M$) et la RI est anti-symétrique :

$h(n) = -h(N-n)$.

$\begin{cases} h(n+M) = -h(M-n) \\ h(M) = 0 \end{cases}$

montrer que :

$$H_{III}(f) = \sum_{n=0}^{2M} h(n) e^{-j2\pi \frac{f}{Fe} n}.$$

réécrit :

$$H_{III}(f) = e^{j(\frac{\pi}{2} - 2\pi\frac{f}{Fe} M)} \cdot \sum_{n=1}^{M} 2h(M-k) \sin\left(2\pi \frac{f}{Fe} k\right)$$

Solution :

$$H_{III}(f) = \sum_{n=0}^{2M+1} h(n) e^{-j2\pi\frac{f}{Fe} n}$$

$e^{j\pi/2} = j$

$j = \cos(\pi/2) + j\sin(\pi/2) = j$

$\cancel{H_{III}(f) = e^{j(\frac{\pi}{2} - 2\pi\frac{f}{Fe}M)} \sum_{n=0}^{2M} h(n) e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}(n-M)}}$

$$= e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}M} \sum_{n=0}^{2M} h(n) e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}(n-M)}$$

On pose : $k = n - M$.

Pour $n = 0 \Rightarrow k = -M$.

Pour $n = 2M - M \Rightarrow k = M$.

$$H_{III}(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}M} \sum_{k=-M}^{M} h(k+M) e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}k}.$$

$$\sum_{k=-M}^{-1} h(k) = \sum_{k=1}^{M} h(-k)$$

$$H(f)_{III} = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}M} \sum_{k=-M}^{M} h(k+M) e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}k}.$$

$$H(f)_{III} = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}M}\Big[h(M) + \sum_{k=1}^{M} h(k+M) e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}k} + \sum_{k=1}^{M} h(-k+M) e^{j2\pi\frac{f}{Fe}k}\Big]$$

$$H_{III}(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}M}\Big[h(M) + \Big(\sum_{k=1}^{M} -h(M-k) e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}k} + h(M-k) e^{j2\pi\frac{f}{Fe}k}\Big)\Big]$$

$$= e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}M}\Big[\sum_{k=1}^{M}\Big(-h(M-k) e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}k} + h(M-k) e^{j2\pi\frac{f}{Fe}k}\Big)\Big]$$

$$H_{III}(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}M}\Big[\sum_{k=1}^{M} h(M-k) \cdot \Big(e^{j2\pi\frac{f}{Fe}k} - e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}k}\Big)\Big]$$

$$H_{III}(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}M}\Big[\sum_{k=1}^{M} 2j\, h(M-k) \sin\big(2\pi\frac{f}{Fe}k\big)\Big]$$

$\cancel{H_{III}(f) = e^{-j2\pi\frac{f}{Fe}M}}$

$$H_{III}(f) = e^{j(\frac{\pi}{2} - 2\pi\frac{f}{Fe}M)} \Big[\sum_{k=1}^{M} 2\, h(M-k) \sin 2\pi\big(\frac{f}{Fe}k\big)\Big]$$

Exercice :

Soit le sur échantillonneur de la figure ci dessous :

$x(n) \rightarrow \boxed{\uparrow 2} \rightarrow y(n)$.

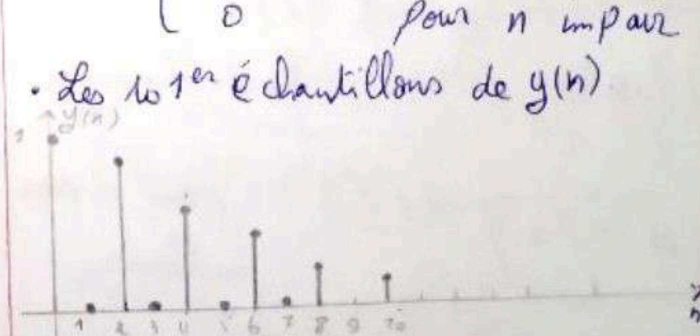
Soit $x(n)$ une séquence donnée par :

$x(n) = a^n u(n)$ $\quad u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

① Représentez graphiquement les 10 échantillons de $y(n)$ $(a = 0,7)$.

$$y(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{2}) & \text{pour } n \text{ pair} \\ 0 & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$$

· Les 10 1er échantillons de $y(n)$



② Donnez la TZ de $y(n)$ en déduire la transformée de Fourier. TF

$Y(Z) = X(Z^2) = X(Z^2)$

sur échantillonneur { domaine temporelle diviser sur '2' → { TZ pour '2'

$x(n)$ est convergente

$X(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n Z^{-n}$

$X(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{Z}\right)^n$

$X(Z) = \frac{1 - \lim_{q \to +\infty} \left(\frac{a}{Z}\right)^q}{1 - (a/Z)}$

$\boxed{X(Z) = \frac{Z}{Z-a}}$

$\boxed{Y(Z) = X(Z^2) = \frac{Z^2}{Z^2 - a}}$

La TF : $Y(f)$.

$Y(f) = Y(Z)\big|_{Z = e^{j2\pi f}}$

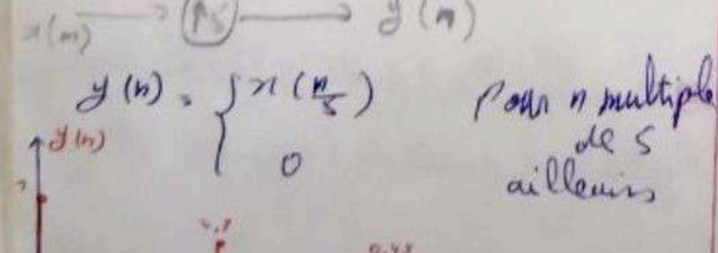
$\boxed{Y(f) = \frac{e^{j4\pi f}}{e^{j4\pi f} - a}}$

② Répétez ① et ② pour un facteur de sur échantillonnage $L = 5$

$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{5}\right) & \text{pour } n \text{ pair (multiple de 5)} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$x(n) \longrightarrow \boxed{\uparrow 5} \longrightarrow y(n)$

$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{5}\right) & \text{pour } n \text{ multiple de } 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$



La TZ :

$Y(Z) = X(Z^5)$.

$Y(Z) = \frac{Z^5}{Z^5 - a}$

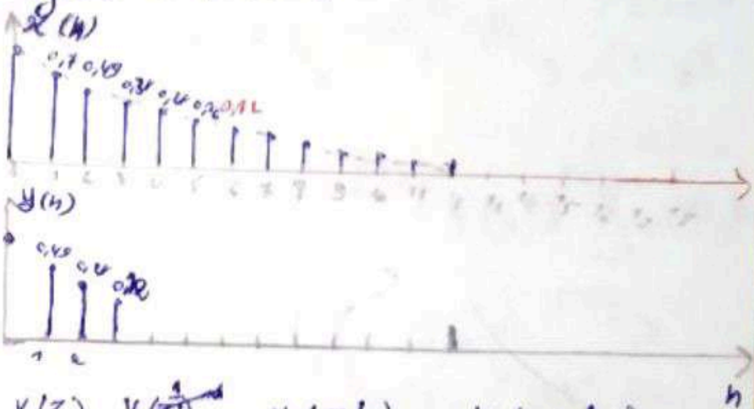
$\boxed{Y(f) = \frac{e^{j10\pi f}}{e^{j10\pi f} - a}}$

Exo 2

Répéter les question de l'exo 1 pour le cas d'un sous échantillonneur.

$x(n) \longrightarrow (\downarrow 2) \longrightarrow y(n)$.

$y(n) = x(2n)$



$Y(Z) = \cancel{X(Z^{1/2})} = \frac{X(Z^{\frac{1}{2}}) + X(-Z^{\frac{1}{2}})}{2}$

$X(Z) = \frac{Z}{Z - a}$

$Y(Z) = \frac{\left(\frac{Z^{\frac{1}{2}}}{Z^{\frac{1}{2}} - a}\right) + \left(\frac{-Z^{\frac{1}{2}}}{-Z^{\frac{1}{2}} - a}\right)}{2}$

$= \frac{\frac{Z^2 - \frac{1}{a} + Z^2 + \frac{1}{a}}{Z^2}}{2} = \frac{\frac{2Z^2}{Z^2}}{2} = 1$

...rcice:

Soient l'equation aux diff et la condition initiale suivantes

$$\begin{cases} ay(n)+by(n-1) = cx(n)+dx(n-1)+ex(n-2) \\ y(n)=0 \quad \forall n<0 \end{cases}$$

où : a, b, c, d, e de nonnulles.

1) Déterminer l'expression

2) Trouver les condition necessaire $\&$ sur les ctes a, b, c, d et e pour que l'eq caractérise un filtre RIF.

3) Dans le cas, où cette condition n'est pas respectée, trouver les conditions sur a et b qui permette d'assurer la stabilité du filtre

4) En déduire la stabilité et le type du filtre :

$$y(n)+\frac{1}{2}y(n-1) = x(n)-x(n-1)-\frac{3}{4}x(n-2)$$

$$y(n)+\frac{3}{2}y(n-1) = x(n)+2x(n-1)+\frac{3}{2}x(n-2)$$

$$y(n)+\frac{3}{4}y(n-1) = \frac{3}{4}x(n)+x(n-1)-x(n-2)$$

$$y(n)=0 \quad \forall x<0.$$

①

$$h(n) = \begin{cases} \frac{c}{a} & n=0. \\ \frac{d}{a}-\frac{bc}{a^2} & n=1 \\ (-1)^n \frac{b^{n-2}}{a^{n-1}}\left[e-\frac{b}{a}\left(d-\frac{bc}{a}\right)\right] & n \geq 2 \end{cases}$$

2) h(n) ... RIF filtre ...

récurrent ...

$$\boxed{(-1)^n \frac{b^{n-2}}{a^{n-1}}\left[e-\frac{b}{a}\left(d-\frac{bc}{a}\right)\right] \quad n \geq 2}$$

récurrent h(n) ...

filtre FIR $\Rightarrow$ h(n) non récursive.

$$(-1)^n \frac{b^{n-2}}{a^{n-1}}\left[e-\frac{b}{a}\left(d-\frac{bc}{a}\right)\right] \quad n \geq 2.$$

$n \geq 2$

$$(-1)^n \frac{b^{n-2}}{a^{n-1}}\left[e-\frac{b}{a}\left(d-\frac{bc}{a}\right)\right] = 0.$$

$\neq 0$ $\quad \neq 0$

$$\boxed{e-\frac{b}{a}\left(d-\frac{bc}{a}\right)=0}$$

La somme ... stable ...

le h(n)

est sommable ...

infinie

stable $\rightarrow$ ... finie

3) Lorsque le filtre est IIR la stabilité est assurée si :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

$$= \frac{c}{a}+\frac{d}{a}-\frac{dc}{a^2}+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{b^{n-2}}{a^{n-1}}\left[e-\frac{b}{a}\left(d-\frac{bc}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{c}{a}+\left(\frac{d}{a}-\frac{dc}{a^2}\right)+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{b^{n-2}}{a^{n-1}}\left[e-\frac{b}{a}\left(d-\frac{bc}{a}\right)\right] < \infty$$

$$= \frac{c}{a}+\left(\frac{d}{a}-\frac{dc}{a^2}\right)+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{b^{n-2}}{a^{n-1}}\left[e-\frac{b}{a}\left(d-\frac{bc}{a}\right)\right] < \infty$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{b^{n-2}}{a^{n-1}}\left[e-\frac{b}{a}\left(d-\frac{bc}{a}\right)\right] < \infty$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{b^{n-2}}{a^{n-1}} < \infty$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{b^{n-2}}{a^{n-1}}$$

La stabilité est assurée si :
$|b| < |a|$.

4|

• $y(n) + \frac{1}{2} y(n-1) = x(n) - x(n-1) - \frac{3}{4} x(n-2)$

réalisable ⟶ causale, stable.

FIR si :

$e - \frac{b}{a}\left(d - \frac{bc}{a}\right) = 0$.

$\frac{-3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \left(-1 - \frac{(\frac{1}{2})(1)}{1}\right) = \frac{-3}{4} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{-3}{2}\right)$

$\frac{-3}{4} + \frac{3}{4} = 0$.

Donc ⟹ filtre FIR.

stabilité : $|\frac{1}{2}| < |1|$

• $y(n) + \frac{3}{2} y(n-1) = x(n) + 2x(n-1) + \frac{3}{2} x(n-2)$

FIR si

$e - \frac{b}{a}\left(d - \frac{bc}{a}\right) = 0$

$\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(2 - \frac{(\frac{3}{2})(1)}{1}\right) = 0$

$\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$

$\frac{3}{4} \neq 0$.

Donc filtre IIR

Stabilité : $|b| < |a|$.

$|\frac{3}{2}| > (1)$. non stable.

• $y(n) + \frac{3}{4} y(n-1) = \frac{3}{4} x(n) + x(n-1) - x(n-2)$

FIR :

$= (-1) - \left(\frac{3}{4}\right)\left(1 - \frac{(\frac{3}{4})(\frac{3}{4})}{1}\right)$

$= ~~-1 - 24~~ - 1 \cdot \frac{-3}{4}\left(\frac{7}{16}\right)$

$= -1 - \frac{21}{64} = \frac{-85}{64}$

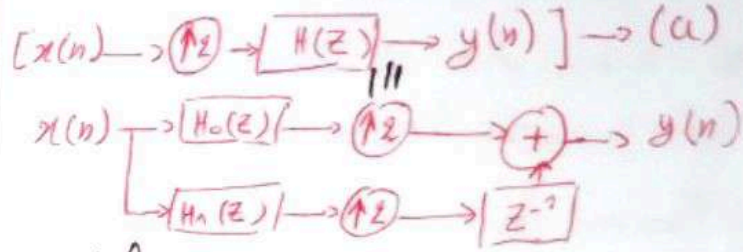
filtre IIR.

Stable si $|b| < |a|$.

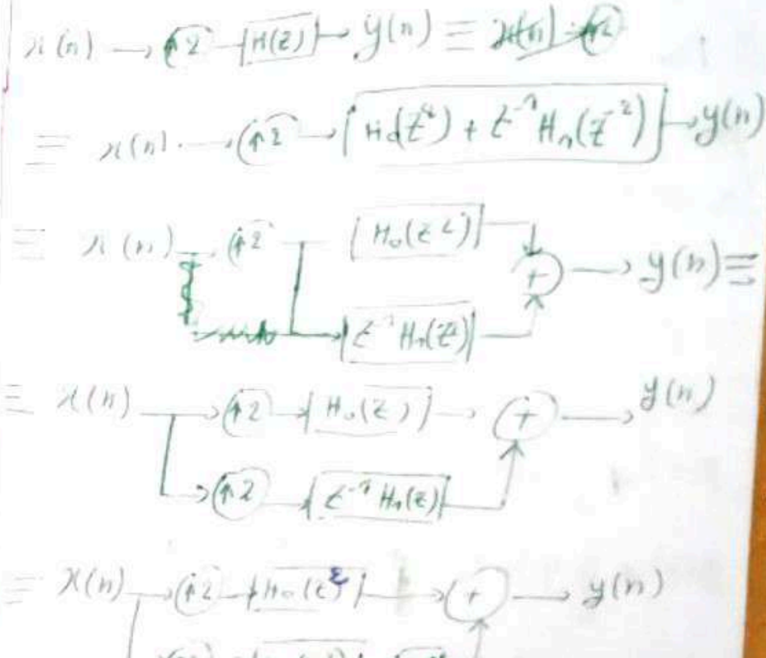
$|\frac{3}{4}| < 1$ ⟹ stable.

Exercice :

Démontrez en utilisant la décomposition polyphasé et l'identité à Noble, que les deux systèmes suivants sont équivalents



En utilisant la décomposition polyphasé (a) donne.



Décomposition polyphasé.

$x(n) = \{\overset{x_0}{3}, 1, 5, 6, 2, 4, -3, 7\}$

$x_0(n) = \{3, 5, 2, 3\}$. paire

$x_1(n) = \{1, 6, 4, 7\}$. impaire

$X(z) = X_0(z^2) + z^{-1} X_1(z^2)$

Identité noble :

$$\equiv \; x(n) \to \boxed{H_0(z)} \to (\uparrow 2) \to (+) \to y(n)$$
$$\quad\; \boxed{H_1(z)} \to (\uparrow 2) \to \boxed{z^{-1}} \to (+)$$

Exercice

Démontrez que les systèmes suivants sont équivalents :

$[x(n) \to \boxed{H(z)} \to (\uparrow L) \to y(n)]$ (a)

$x(n) \to (\uparrow L) \to \boxed{H(z^L)}$. $x(n) \to (\uparrow L) \to \boxed{H(z^L)} \to y(n)$

On démarre par :

$[x(n) \to \boxed{H(z)} \xrightarrow{V(n)} (\uparrow L) \to y(n)]$ (a)

$V(z) = X(z) \cdot H(z)$

$Y(z) = V(z^L)$

$Y(z) = X(z^L) \cdot H(z^L)$ --- ①

(b). $x(n) \to (\uparrow L) \xrightarrow{g(n)} \boxed{H(z^L)} \to y(n)$ (b)

$G(z) = X(z^L) = X(z^L)$

$\cancel{y(n)} = Y(z) = G(z) \cdot H(z^L)$

$Y(z) = X(z^L) \cdot H(z^L)$ — ②

Puisque ① = ② $\Leftrightarrow$ (a) $\equiv$ (b).

Exercice :

Démontrez que les deux systèmes sont équivalents :

$[x(n) \to \boxed{H(z^2)} \to (\downarrow 2) \to y(n)]$ (a)

$\equiv$

$[x(n) \to (\downarrow 2) \to \boxed{H(z)} \to y(n)]$ (b)

(a) donne :

$V(z) = X(z) \cdot H(z^2)$.

$$Y(z) = \frac{V(z^{1/2}) + V(-z^{1/2})}{2}$$

$$Y(z) = \frac{X(z^{1/2}) \cdot H(z) + X(z^{1/2}) H(z)}{2}$$

$$Y(z) = \frac{1}{2} X(z^{1/2}) H(z) + \frac{1}{2} X(-z^{1/2}) H(-z) \text{ — (c)}$$

(b) donne :

$$G(z) = \frac{X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2})}{2}$$

$Y(z) = G(z) \cdot H(z)$.

$$Y(z) = \frac{X(z^{1/2}) H(z) + X(-z^{1/2}) H(-z)}{2}$$

$$Y(z) = \frac{1}{2} X(z^{1/2}) H(z) + \frac{1}{2} X(-z^{1/2}) H(-z) \text{ (d)}$$

(c) $\equiv$ (d) donc (a) $\equiv$ (b)

Exo 2

Soit l'équ aux diff :

$$\begin{cases} a y(n) + b y(n-c) = d x(n) + e x(n-2) \\ y(n) = 0 \quad \forall n < 0 \end{cases}$$

- Déterminer l'expression de $h(n)$ de toutes valeurs prises par l'entier 'n'

où a, b, c, d, e et sont des entiers avec $c > 2$.

Solution :

$$\left.\begin{matrix} x(n) = \delta(n) \\ y(n) = h(n) \end{matrix}\right\} \; h(n) = y(n)\big|_{x(n) = \delta(n)}$$

1. Pour $n=0$.

$a h(0) + b \cancel{h(-c)} = d\delta(0) + e \cancel{\delta(-2)}$

$\boxed{h(0) = \frac{d}{a}}$

Pour $n=1$.

$\boxed{h(1) = 0.}$

$\boxed{h(2) = \frac{e}{a}}$. $h(3) = 0$

⋮

pour $n = k$.

$h(k) = 0$ si

$3 \leq k < c$.

Pour $n = c$

$c > 2$

$a h(c) + b h(0) = d \cancel{x(c)} + e \cancel{x(c-2)}$

$a h(c) = -b\, h(h(0)$

$\boxed{h(c) = \frac{-b}{a} h(0) = -\frac{bd}{a^2}}$

Pour $n = c+1$

$a h(c+1) + b \cancel{h(1)} = d\delta(\cancel{c+1}) + e\delta(\cancel{c-1})$

$\boxed{h(c+1) = 0}$

Pour $n = c+2$.

$a h(c+2) + b\, h(c+2-c) = d\delta(\cancel{c+2}) + e\cancel{\delta(c)}$

$a h(c \times 2) = -b\, h(2)$.

$\boxed{h(c+2) = \frac{-b}{a} h(2) = \frac{-b}{a^2} e}$

Pour $n = c+3$.

$a h(c+3) + b h(c+3-c) = d\delta(\cancel{c+3}) + \delta(\cancel{c+1})$

$a\, h(c+3) = 0$.

Pour $n = k$.

$h(k) = 0 \quad c+3 \leq k < 2c$

Pour $n = 2c$

$a h(2c) + b h(c) = d\delta(\cancel{2c}) + e\delta(\cancel{...}$

$h(2c) = \frac{-b}{a} h(c)$

$\boxed{= +\frac{b^2 d}{a^3}}$

Pour. $n = 2c+1$.

$a h(2c+1) + b\, h(c+1) = d\delta(\cancel{2c+1}) + e\delta(\cancel{2c-1})$

$\boxed{h(2c+1) = -\frac{b}{a} h(c+1)}$

$\boxed{h(2c+1) = 0}$

Pour $\boxed{n = 2c+2}$.

$a\, h(2c+2) + b h(c+2) = d\delta(\cancel{2c+2}) + e\delta(\cancel{2c}$

$a h(2c+2) = -b\, h(c+2)$

$h(2c+2) = \frac{-b}{a}\, h(c+2) = +\frac{b^2 e}{a^3}$.

Pour $\boxed{n = 2c+3}$

$a h(2c+3) + b h(c+3) = d\delta(2c+3) + e\delta(2c...$

$h(2c+3) = 0$

$h(2) = \frac{e}{a}$, $h(c+2) = \frac{-be}{a^2}$

$h(2c+2) = \frac{b^2 e}{a^3}$; $h(3c+2) = \frac{-b^3 e}{a^4}$

$\boxed{h(nc+2) = (-1)^n \frac{b^n e}{a^{n+1}}}$

$$h(n) = \begin{cases} (-1)^n \dfrac{b^n d}{a^{n+1}} & \text{si } n = kC. \\ (-1)^n \cdot \dfrac{b^n e}{a^{n+1}} & \text{si } n = kC+2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2) - La condition pour que le filtre soit FIR.

كي نكون عند H(z) لي نقولو
كي يكون FIR ماعندوش pole
كي يكون عندنا h(n) زوج مرات
يكون FIR مايكونش recursif.

$h(n) \Rightarrow$ filtre FIR.

$$(-1)^n \frac{b^n d}{a^{n+1}} = 0$$

$$\frac{b^n}{a^{n+1}} = 0 \Rightarrow b^n = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

3) Dans le cas cette condition n'est pas réspéctée. quelle est la condition pour ce filtre être stable.

- Stabilité dans le cas IIR.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

$$(-1)^n \frac{b^n d}{a^{n+1}} < \infty.$$

$$\frac{b^n}{a^{n+1}} < \infty \Rightarrow |b| < |a|.$$