UQÀM | Département de mathématiques
FACULTÉ DES SCIENCES
Université du Québec à Montréal

MAT8780 - Principes de simulation

Série 2

Q1. *La loi géométrique.* Soit la variable aléatoire $X \sim \text{Geom}(p)$, avec fonction de masse $g(x \mid p) = p(1-p)^{x-1}, x = 1, 2, \ldots$, pour un certain $0 < p < 1$. Utiliser $\lfloor x \rfloor$ pour le plus grand entier inférieur ou égal à x et $\lceil x \rceil$ pour le plus petit entier supérieur ou égal à x.

(a) Montrer comment générer une observation $X = x$, $X \sim \text{Geom}(p)$, par la méthode d'inversion.

(b) Montrer comment générer une observation $X = x$, $X \sim \text{Geom}(p)$, par la méthode de troncation et expliquer pourquoi l'expression en (a), bien que différente de la présente, donne la même loi.

(c) Considérer à présent la loi Géométrique tronquée $X \sim \text{Geom}(n, p)$, dont la fonction de masse est $f(x \mid n, p) \propto p(1-p)^{x-1}, x = 1, \ldots, n$. Trouver la borne

$$c = \sup_x \frac{f(x \mid n, p)}{g(x \mid p)},$$

de la méthode d'acceptation-rejet pour générer des observations de cette loi.

(d) Une variable aléatoire Y suit la loi binomiale négative $\text{BN}(r, p)$, $r > 0$ entier, si sa fonction de masse est

$$p_Y(y) = \binom{y-1}{r-1} p^r (1-p)^{y-r}, \quad y = r, r+1, \ldots$$

Montrer que $Y \sim \sum_{i=1}^r X_i$, où $X_1, \ldots, X_r$ sont iid $\text{Geom}(p)$.

(e) Utiliser votre méthode en (a) ou (b) pour générer une observation $Y = y \sim \text{BN}(r, p)$, avec $r = 10^6$ et $p = 1/4$ et afficher votre temps de calcul.

(f) Montrer comment la loi binomiale $\text{Bin}(n, p)$ peut être générée en se servant du temps d'arrêt

$$N = \min \left\{ m \geqslant 0 : \sum_{k=1}^{m+1} X_k > n \right\}, \quad X_1, X_2, \ldots, \text{ iid } \text{Geom}(p).$$

(g) Tracer le graphe à barres et comparer à la fonction de masse théorique en juxtaposant les deux les deux graphes. Utiliser $n = 10$, $p = 1/3$ dans votre simulation.