Université Paris 5 / UFR de Mathématiques et Informatique
L3 MIA

Systèmes Numériques de Communication

Epreuve de contrôle continu (1h30) - 20 mars 2006

Documents et téléphones interdits. Calculatrices inutiles

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. *Les trois parties peuvent être abordées dans l'ordre qui vous conviendra, mais les réponses à chaque partie ne devront pas être dispersées dans la copie. Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.*

1 Questions de cours (7 points)

1) Expliquez le principe du code biphase (Manchester). En le comparant au code NRZ, donnez deux avantages et un inconvénient du code biphase. (2 pt)

2) Ci-dessous sont représentés des signaux d'émissions de diverses modulations, les symboles étant séparés par des traits en pointillés. Pour chacune des modulations suivantes, indiquer, sans explication, à quelle figure elle correspond : (1,5 pt)

- Modulation d'amplitude à 2 états (MDA-2)
- Modulation d'amplitude à 4 états (MDA-4)
- Modulation de phase à 4 états (MDP-4)

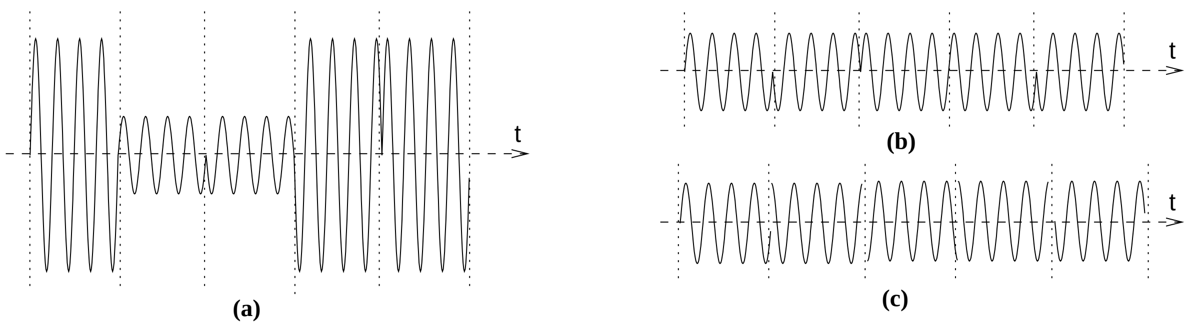

FIG. 1 – Modulations.

3) Qu'appelle-t-on l'interférence entre symboles (IES) ? D'où provient-elle ? (1 pt)

4) Pourquoi serait-ce une très mauvaise idée de concevoir un système de radiodiffusion terrestre longue distance à la fréquence 22 GHz dans une zone où le temps alterne entre pluie et brouillard dense ? (3 raisons, 1,5 pt)

5) Quel est l'intérêt de la modulation de deux porteuses en quadrature à 4 états (MAQ-4) par rapport à la modulation d'amplitude simple à 4 états (MDA-4) ? (1 pt)

2 Exercices

2.1 Interférence entre symboles, débit et probabilité d'erreur (6 points)

On considère une transmission M-aire en bande de base sur un canal bruité de bande passante $\mathcal{B} = 300$ kHz. Le bruit de canal a une densité spectrale de puissance constante $N_0/2$. La puissance d'émission étant fixée, le rapport $(E_b/N_0)_{\mathrm{dB}}$ (énergie par élément binaire sur N_0) est fonction du débit binaire D comme indiqué sur la figure 2. On utilise des impulsions en cosinus surélevé avec un facteur de retombée $\alpha = 0.2$.

Le débit est fixé à $D = 600$ kbit/s. Quelle valeur de M choisir pour transmettre sans interférence entre symboles avec la probabilité d'erreur **binaire** minimale ?

Il est naturellement demandé une réponse argumentée, en français, faisant apparaître clairement les étapes de votre raisonnement.

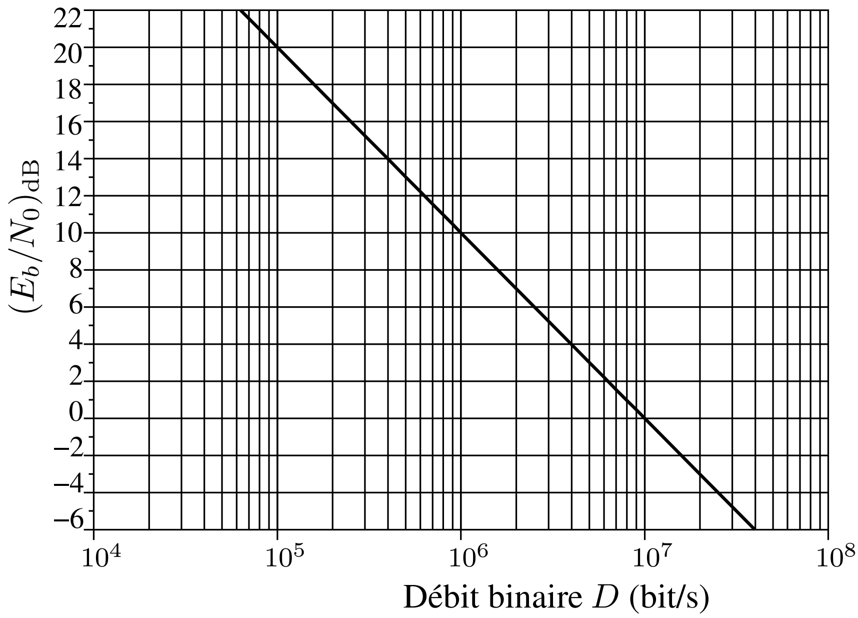

FIG. 2 – Rapport $(E_b/N_0)_{\mathrm{dB}}$ en fonction du débit D.

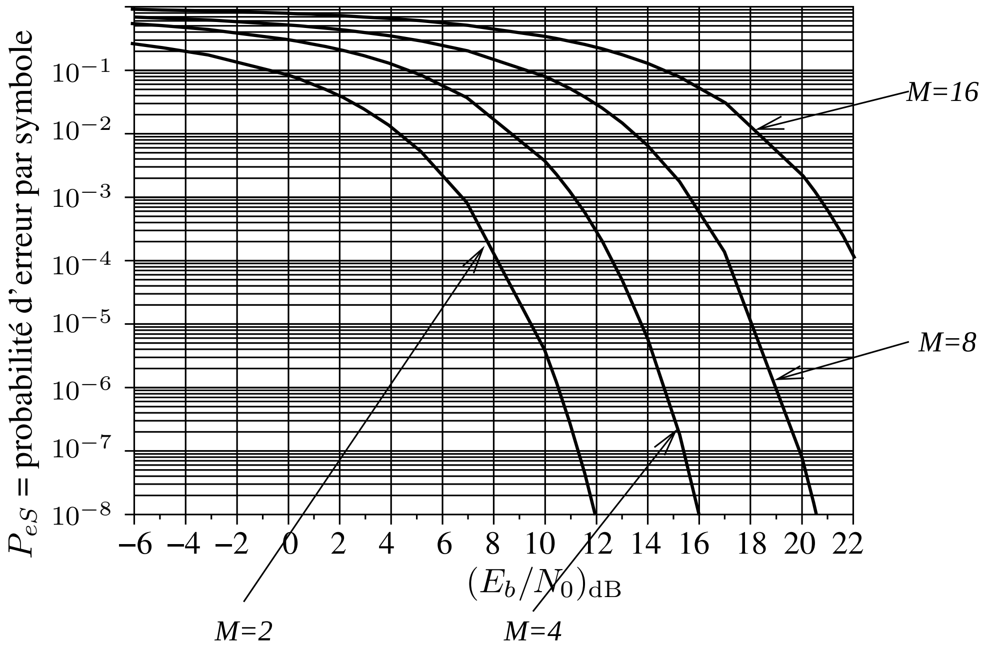

FIG. 3 – Probabilité d'erreur par symbole pour un code NRZ à symboles M-aires.

2.2 Diversité spatiale (8 points)

Une des nouveautés introduites par l'UMTS (*Universal Mobile Telecommunications Service*) dans les communications mobiles est la possibilité de *soft handover*. Il s'agit pour un mobile d'utiliser pour une même communication deux stations de base correspondant à des cellules différentes, moyennant une puissance réduite sur chaque liaison. L'avantage est de s'affranchir de la dégradation éventuelle d'une des liaisons, selon l'adage *"ne pas mettre tous ses œufs dans le même panier"*.

On s'intéresse ici à la liaison descendante, du réseau vers le mobile. Celle-ci est modélisée selon le schéma de la figure 4. Le message binaire est codé en NRZ binaire avant d'être modulé et transmis. Pour avoir la même puissance totale d'émission que dans le cas mono-canal, le bit 0 se traduit par $a_0 = -1/\sqrt{2}$ (au lieu de -1) et le bit 1 par $a_1 = 1/\sqrt{2}$ (au lieu de 1). Chaque canal introduit un bruit, modélisé lors de l'échantillonnage par une variable aléatoire b_x (pour le 1er canal) ou b_y (pour le 2e), gaussienne centrée de variance σ^2. Après démodulation, filtrage adapté et échantillonnage, on dispose donc pour chaque bit transmis de deux valeurs :

$$x = a_i + b_x$$
$$y = a_i + b_y$$

à partir desquelles doit être détecté le bit émis.

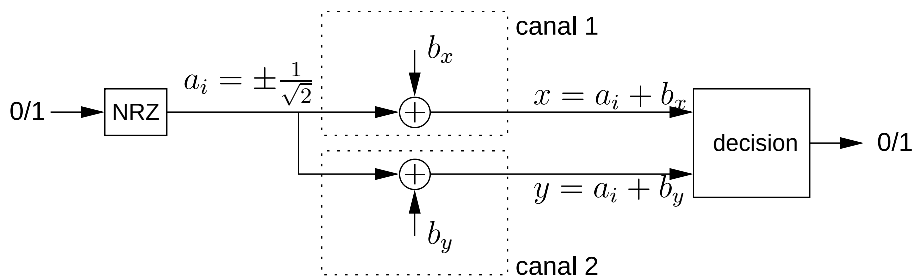

FIG. 4 – Transmission *via* deux canaux.

La décision est fondée sur la position du point M de coordonnées $(x; y)$ dans le plan de la figure 5. Les points A_0 et A_1 correspondent à la transmission des bits 0 et 1 (respectivement) en l'absence de bruit de canal.

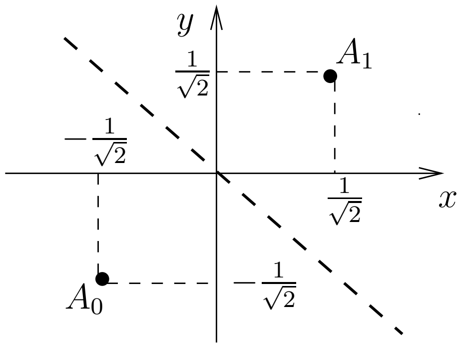

FIG. 5 – Plan d'observation des échantillons reçus.

1) La règle de décision est celle du maximum *a posteriori* :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(s_0|M) > \mathrm{P}(s_1|M) &\Rightarrow r_0 \\ \mathrm{P}(s_1|M) > \mathrm{P}(s_0|M) &\Rightarrow r_1 \end{aligned}$$

où s_i désigne l'émission du bit i et r_i la détection du bit i.

La densité de probabilité conditionnelle d'un point M sachant s_i est définie par :

$$\mathrm{p}(M|s_i) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(\frac{-A_i M^2}{2\sigma^2}\right)$$

Les bits d'émission sont équiprobables. Montrer que les zones de décision sont les demi-plans de part et d'autre de la médiatrice de $[A_0 A_1]$ (diagonale en pointillés sur la figure), en précisant à quel valeur du bit correspond chacune.

2) Exprimer $\mathrm{P}(r_1|s_0)$ et $\mathrm{P}(r_0|s_1)$ à l'aide de la fonction Q définie en annexe.

Indications :

– L'équation de la médiatrice de $[A_0 A_1]$ est $y = -x$.

– $b = b_x + b_y$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $2\sigma^2$.

3) En déduire la probabilité d'erreur P_e. Comparer à celle qu'on obtiendrait en utilisant uniquement le 1er canal (avec la même puissance totale d'émission) : $Q(1/\sigma)$.

4) Supposons que le bruit augmente momentanément sur le 1er canal, portant la variance de b_x à $3\sigma^2$. Dans ce cas, le taux d'erreur en utilisant ce canal seul est de $Q(\frac{1}{\sigma\sqrt{3}})$. Quel est celui obtenu en utilisant les deux canaux, sachant que la variance de b vaut alors $4\sigma^2$? Conclure.

3 Annexes

FIG. 6 – Densité spectrale de puissance des codes NRZ binaire (à gauche) et biphase (à droite) pour une durée symbole T.

FIG. 7 – Absorption linéïque par les molécules d'eau et d'oxygène de l'atmosphère.

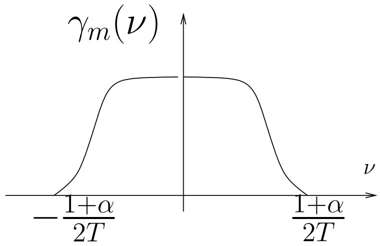

FIG. 8 – Densité spectrale de puissance d'un signal de communication NRZ M-aire à impulsions en cosinus surélevé de facteur de retombée α.

Probabilités

Règle de Bayes :
Soient A un événement et X une variable aléatoire de densité de probabilité p. Alors :

$$\mathrm{P}(A|x)\mathrm{p}(x) = \mathrm{p}(x|A)\mathrm{P}(A)$$

Soient une variable aléatoire Z et deux réels a et b :

$$\mathrm{P}(a < Z < b) = \int_a^b \mathrm{p}(z)\mathrm{d}z$$

Densité de probabilité p d'une variable aléatoire gaussienne centrée Z de variance σ^2 :

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(- \frac{z^2}{2\sigma^2}\Big)$$

Fonction d'erreur complémentaire Q :

$$Q : x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \mathrm{e}^{-z^2/2}\mathrm{d}z$$