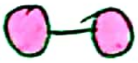
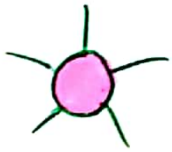
Info ③ "Graph theory"

1.1 Un graphe est un composé de sommets et arrêtes

(S) : Sommet

— : Arête

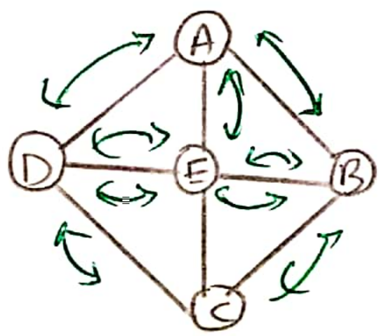
 : Sommets adjacents

 : degré d'un sommet

1.2 Un graphe Complet

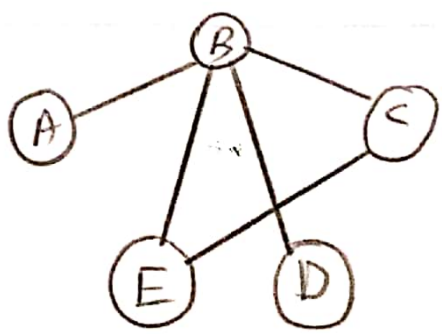
C'est un graphe dont tous les sommets sont adjacents

Exemple



1.3 Le tableau de degré de sommets

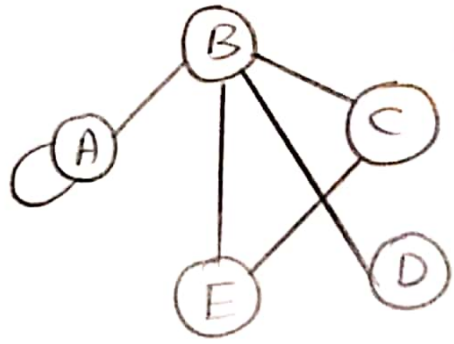
sommet	A	B	C	D	E
degré	1	4	2	1	2



Théorème La somme des degrés de sommets d'un graph est égale à 2 fois le nombre d'arrêtes.

1.4 Les matrices associés

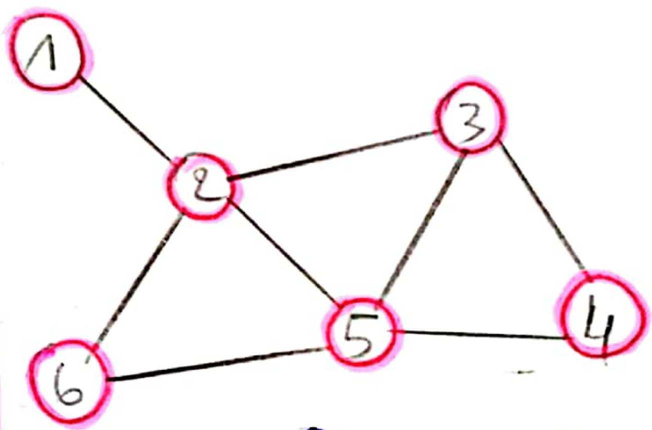
	A	B	C	D	E
A	1	1	0	0	0
B	1	0	1	1	1
C	0	1	0	0	1
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0



1.5 Les chaînes

c'est une liste ordonnée des sommets (adjacents)

exemple



Le degré d'une chaîne c'est le nombre d'arrêtes

1 — 2 — 3 — 4 — 5

une chaîne

6 — 2 — 3 — 5 — 6

- **La distance entre deux sommets** c'est la longueur du chaîne **la plus courte** entre eux.

- **Le diamètre d'un graphe** la plus grande distance entre deux sommets.

- **Une chaîne fermé** est une chaîne dont le premier sommet est le dernier sommet.

- **Un cycle** c'est une chaîne fermé dont toutes **les arêtes sont distinctes**. (ميتعاودوش)

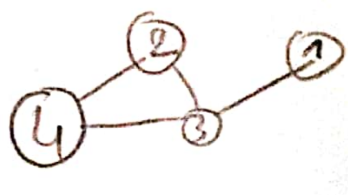
- **Un cycle eulérien** cycle formé de toutes les arêtes du graphe et n'apparaissent qu'une fois (tous les sommets de degré pair)

- **Une chaîne eulérienne** toutes les arêtes du graphes n'apparaissent qu'une fois, et il faut qu'il existe de sommets de degrés impairs.

  Si il y a une chaîne eulérien $\not\Rightarrow$ un cycle eulerien

  l'opposé est vrai

- **Une chaîne connexe** Pour tout couple de sommets, il existe une chaîne entre ces deux sommets, **exemple**

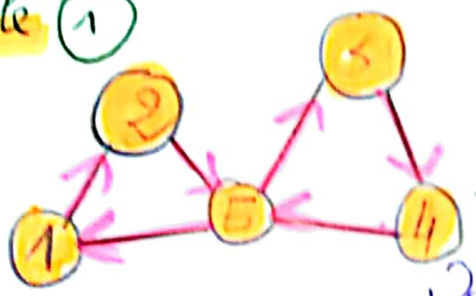


La méthode pour savoir est ce qu'il un chemin, cycle eulérien

① Tous les sommets de G sont de degré **Pair!!!**	⟺	G admet un cycle eulérien.

② Deux sommets seulement sont **impairs!!!**	⟺	G admet une chaine eulérienne d'extrémités A-B

Exemple ①

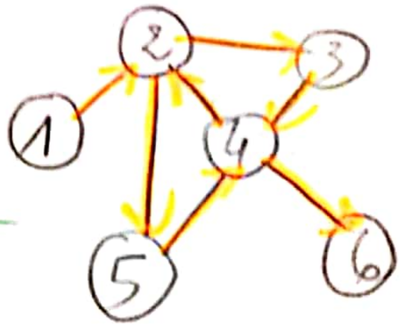


	1	2	3	4	5
Degré	2	2	2	2	4

il n'y a pas une chaîne eulérienne, mais on a un cycle eulérien

Exemple ②

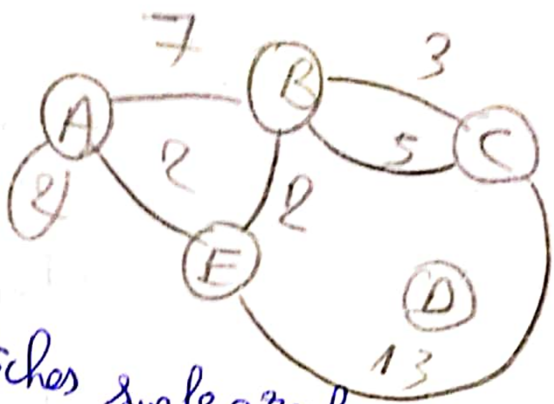
	1	2	3	4	5	6
Degré	1	4	2	4	2	1



Pas de cycle eulérien, mais il y a une chaine eulérienne

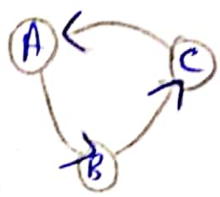
Les graphes Pondérés

a des coefficients (distances, temps...etc)



Les graphes orientés

a des flèches sur le graphe



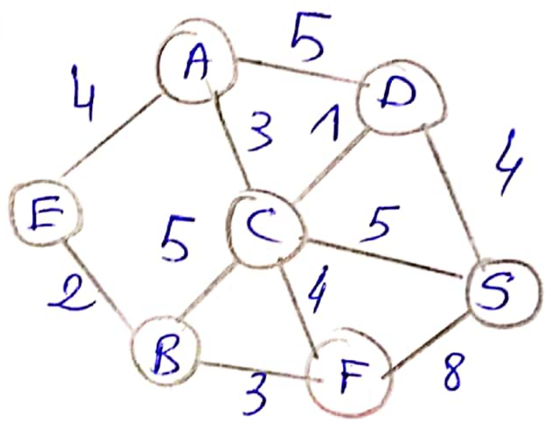
Exercice type

soit le graphe suivant :

1/ C'est quoi le type de se graphe ?

2/ existe t'il un chemin eulérien ?

3/ " " " cycle eulérien ?



Solution

1/ c'est un graphe ~~orienté~~ Pondéré

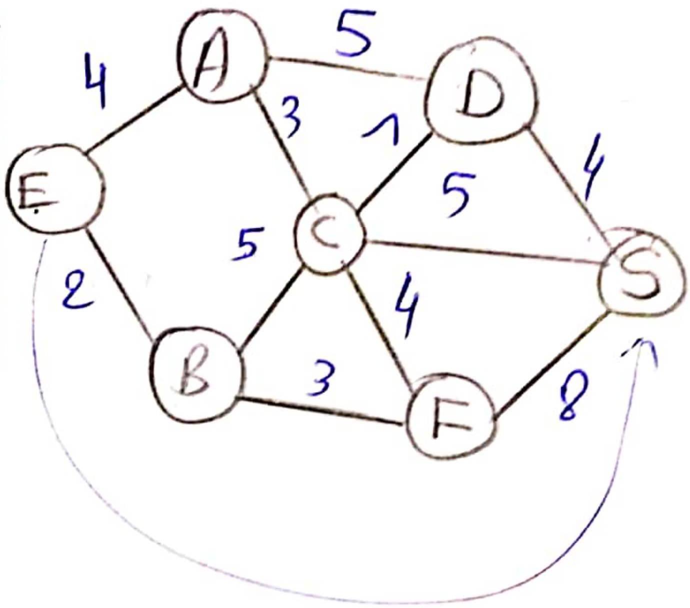
2/

Sommet	A	B	C	D	E	F	S
degré	3	3	5	3	2	3	3

, On a ni chemin ni cycle eulérien car tous les sommets ne sont pas tous pair, + il existe plusieurs sommets impairs.

L'algorithm de plus court chemin

E	A	B	C	D	F	S	~~S~~
0	4_E	2_E	∞	∞	∞	∞	E
	$4E$		$5\ 7_B$	∞	$3\ 5_B$	∞	B
			$3\ 7_B$	$5\ 9_A$	5_B	∞	A
			$4\ 9\ 7_B$	9_A		$8\ 13_F$	F
				$1\ 8_C$		$5\ 12_C$	C
							D



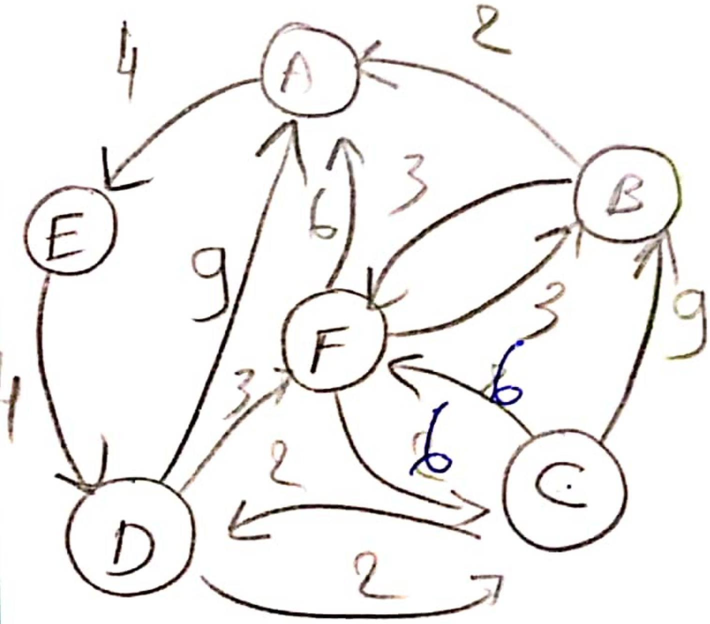
⇒ le plus cours chemin est :

~~E — B — A — F — C — D~~

E — B — C — S

Exercice 2 (de cours A)

C	B	F	D	E	A	Fine
0	9c	6c	2c	∞	∞	C
	9c	3D 5		∞	9D 11	D
	$3\ 8_F$			∞	$6\ 11_D$	F
				∞	$2\ 10_B$	B
						A



⇒ C — D — F — B — A

Théorème d'Euler

1/ Chaîne eulérienne, cycle eulérien

1.1 / Définition

Une **chaîne eulérienne** est une chaîne satisfaisant aux conditions suivantes :

1– elle contient toutes les arêtes du graphe.

2– chaque arête n'est décrite qu'une seule fois.

Donc : On peut passer plusieurs fois par le même sommet, mais pas par la même arête.

Exemple : Dans le graphe de la figure 1, la chaîne 2 – 1 – 4 – 3 – 2 – 5 – 3 est une chaîne eulérienne.

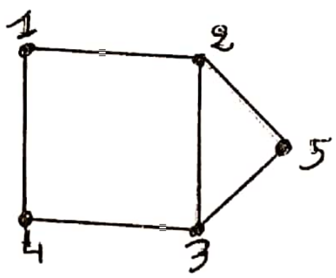


Fig.1 Graphe contenant une chaîne eulérienne

2.2/ Définition

Un **cycle eulérien** est une chaîne eulérienne dont le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont les mêmes.

Exemple : Dans le graphe de la figure 2, le cycle 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 1 est un cycle eulérien.

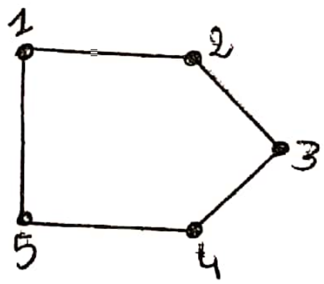


Fig.2 Graphe contenant un cycle eulérien.

Définition

On appelle **graphe eulérien** un graphe que l'on peut dessiner sans jamais lever le crayon et Sans passer deux fois par la même arête.

***Propriété :** Un graphe est eulérien si et seulement si il contient une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien.

Théorème d'Euler

1. Un graphe admet une chaîne eulérienne ou chemin eulérien entre les sommets x et y : Si et seulement si il est connexe et si x et y sont les deux seuls sommets de degré impair.

2. Un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si il est connexe et n'a aucun sommet de degré impair ; c.-à-d : tous les sommets sont de degré pair.

Remarque :

*la présence d'un cycle eulérien implique la présence d'une chaine eulérienne.

2/ Coloriage des sommets d'un graphe

Définitions :

1. Colorier un graphe consiste à affecter une couleur à chacun des sommets de sorte que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur.
2. Le nombre chromatique d'un graphe G est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorie le graphe ; On le note : $\delta(G)$.

$\delta(G)$

Propriété : Soit D le degré maximal des sommets du graphe G ; alors : $\delta(G) \leq 1 + D$.

Algorithme de Welsh-Powell

Exemple

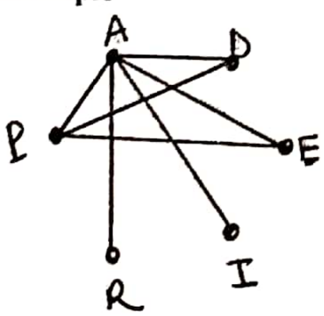


Fig.3 coloriage d'un graphe.

1. On range les sommets du plus haut degré au plus petit :

Sommet	A	P	D	E	I	R
degré	5	3	2	2	1	1
couleur	C_1	C_2	C_3	C_3	C_2	C_2

2. On choisit une couleur pour le premier sommet : sommet A.
3. On colorie de la même couleur tous les sommets non adjacents au sommet A et qui ne sont pas adjacents entre eux : ici, il n'y en a pas.
4. On réitère ce procédé avec une autre couleur pour le premier sommet non colorié de la liste : ici, le sommet P, et on peut colorier de la même couleur les sommets R et I.
5. On recommence jusqu'à épuisement des sommets : ici, on choisit une couleur pour le sommet D et on peut colorier le sommet E de la même couleur.

*on a réussit à colorier ce graphe avec trois couleurs. on peut donc en déduire : $\delta(G) \leq 3$.

3. Cas d'un graphe complet

*Dans un graphe complet, comme tous les sommets sont adjacents, il faut une couleur différente par sommet, on déduit que le nombre chromatique d'un graphe complet est égal à l'ordre de ce graphe.