Université A. MIRA - Béjaia **2022\2023**

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

L2 STID

Examen : Topologie **(Durée: 1h30)**

Exo 1 :

$E = \mathbb{R}$, $\forall\ x,\ y \in E$, on pose

$$d(x, y) = \ln(1 + 3|x - y|)$$

1- Montrer que

$$\forall u \geq 0,\ \forall v \geq 0,\ 1 + 3u + 3v \leq (1 + 3u)(1 + 3v)$$

2- Montrer que d est une distance sur E.

3- Soient $a \in E$ et $r \succ 0$

Trouver $B(a, r)$, $\bar{B}(a, r)$ et $S(a, r)$.

Exo 2 :

Dans tout l'exercise, la distance utilisée est la distance usuelle $d = |.|$.

1- Etudier la complétude de $]0, \frac{1}{2}[$.

On considère la fonction f définie par $f :]0, \frac{1}{2}\ [\to]0, \frac{1}{2}[,\ x \mapsto f(x) = x^3$.

2- Montrer que f est une application contractante.

3- Montrer que f ne possède aucun point fixe dans $]0, \frac{1}{2}[$. Expliquer pourquoi.

Exo 3 :

Soit E un ensemble muni de deux distances équivalentes d_1 et d_2 et soit $(x_n)_n \subset E$ une suite de points de E.

1- Montrer que

$$[(x_n)_n \text{ converge dans } (E, d_1)] \Longleftrightarrow [(x_n)_n \text{ converge dans } (E, d_2)]$$

2- Déduire que

$$[(E, d_1) \text{ est compact}] \Longleftrightarrow [(E, d_2) \text{ est compact}]$$

Ind : pour les deux questions, il suffit de monter une seule implication.

Exo 4 :

Soit E un e.v.n et soient $(x_n)_{n\geq 2} \subset E$ et $(y_n)_{n\geq 2} \subset E$ deux suites de points de E telles que

$$\forall n \geq 2,\ x_n \neq 0_E,\ y_n \neq 0_E \text{ et } \frac{\|x_n - y_n\|}{\|x_n\|} \leq \frac{1}{n}$$

Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|x_n - y_n\|}{\|y_n\|}$$

Barème : Exo 1 : 6 pts = 1 pts + 3 pts + 2 pts

Exo 2 : 6 pts = 2 pts + 2 pts + 2 pts

Exo 3 : 5 pts = 2,5 pts + 2,5 pts

Exo 4 : 3 pts

L2 STID 2022/2023

Corrigé : Examen de Topologie

Exo 1 :

1- Soient $u \geq 0$, $v \geq 0$.

on a $0 \leq 9uv \Rightarrow 1+3u+3v \leq 1+3u+3v+9uv$

$\Rightarrow 1+3u+3v \leq 1+3u(1+3v)+3v$

$\Rightarrow 1+3u+3v \leq (1+3v)(1+3u)$. (1)

2- Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a :

(*) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+3|x-y|) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+3|x-y| = 1 \Leftrightarrow 3|x-y| = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$ (0,5)

(**) $d(x,y) \stackrel{?}{=} d(y,x)$

$d(x,y) = \ln(1+3|x-y|) = \ln(1+3|y-x|)$

$= d(y,x)$ (0,5)

(***) $d(x,y) \stackrel{?}{\leq} d(x,z) + d(z,y)$

on a : $|x-y| \leq |x-z| + |z-y| \Rightarrow$

$\Rightarrow 3|x-y| \leq 3|x-z| + 3|z-y| \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+3|x-y| \leq 1+3\underbrace{|x-z|}_{u}+3\underbrace{|z-y|}_{v}$

$\leq (1+3|x-z|)(1+3|y-z|)$ d'après (1). (2)

D'où : $\ln(1+3|x-y|) \leq$

$\leq \ln\left[(1+3|x-z|)(1+3|y-z|)\right]$

$\Rightarrow \ln(1+3|x-y|) \leq$

$\leq \ln(1+3|x-z|) + \ln(1+3|y-z|)$

i.e : $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

D'où : d est une distance sur $E = \mathbb{R}$.

3- Soient $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$

on a : $B(a, r) = \{x \in E,\ d(x, a) < r\} =$

$= \{x \in \mathbb{R},\ \ln(1 + 3|x - a|) < r\}$

$= \{x \in \mathbb{R},\ 1 + 3|x - a| < e^r\}$

$= \{x \in \mathbb{R},\ 3|x - a| < e^r - 1\}$

$= \{x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \frac{e^r - 1}{3}\}$

$= \{x \in \mathbb{R},\ -\frac{e^r - 1}{3} < x - a < \frac{e^r - 1}{3}\}$.

$= \{x \in \mathbb{R},\ a - \frac{e^r - 1}{3} < x < a + \frac{e^r - 1}{3}\}$.

$=]a - \frac{1}{3}(e^r - 1), a + \frac{1}{3}(e^r - 1)[$

ié : $B(a, r) =]a - \frac{1}{3}(e^r - 1), a + \frac{1}{3}(e^r - 1)[$

(1)

De manière analogue, on trouve :

$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R},\ d(x, a) \leq r\}$

$= [a - \frac{1}{3}(e^r - 1), a + \frac{1}{3}(e^r - 1)]$

(0,5)

$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R},\ d(x, a) = r\}$

$= \{a - \frac{1}{3}(e^r - 1), a + \frac{1}{3}(e^r - 1)\}$.

(0,5)

Exo 2 :

1- La Complétude de $]0, \frac{1}{2}[$

Considérons la suite $(x_n = \frac{1}{3n})_n$

on a : $\forall n, \; x_n \in]0, \frac{1}{2}[$

De plus, on a $\lim_{n \to +\infty} x_n =$

$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3n} = 0$.

Donc $(x_n)_n$ est CV donc de Cauchy.

on a donc $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $]0, \frac{1}{2}[$ qui est CV

Mais $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0 \notin]0, \frac{1}{2}[$

D'où : L'espace $]0, \frac{1}{2}[$ n'est pas Complet.

2

on a : $f :]0, \frac{1}{2}[\longrightarrow]0, \frac{1}{2}[$
$x \longmapsto f(x) = x^3$

2- Mq f est contractante.

i.e : Mq : $\exists k \in]0,1[$ tq : $\forall x, y \in]0, \frac{1}{2}[$
$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$

Soient $x, y \in]0, \frac{1}{2}[$ (0,5)

on a : f est continue sur $[x, y]$ (f polynôme)
f est dérivable sur $]x, y[$ (f polynôme)

D'après le T.A.F, $\exists c \in]x, y[$ tq :
$f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$.

Mais : $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(c) = 3c^2$

Donc : $\exists c \in]x, y[$ tq :
$f(x) - f(y) = 3c^2(x-y)$. (0,5)

D'où : $|f(x) - f(y)| = |3c^2(x-y)| = 3c^2|x-y|$

i.e : $|f(x) - f(y)| = 3c^2|x-y| \dots (1)$

Mais :
$c \in]x, y[\subset]0, \frac{1}{2}[\Rightarrow c \in]0, \frac{1}{2}[\Rightarrow$
$\Rightarrow 0 < c < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < c^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 < 3c^2 < \frac{3}{4} \Rightarrow 3c^2|x-y| \leq \frac{3}{4}|x-y| \dots (2)$ (0,5)

De (1) et (2), on obtient :
$|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x-y|$

D'où : $\exists k = \frac{3}{4} \in]0,1[$ tq : $\forall x, y \in]0, \frac{1}{2}[$,

$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$ (0,5)

Ainsi : $f :]0, \frac{1}{2}[\longrightarrow]0, \frac{1}{2}[$, $x \longmapsto f(x) = x^3$

est une application contractante.

3- Soit x un pt fixe de f,

Donc : $f(x)=x \Longleftrightarrow x^3=x \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x^3-x=0 \Longleftrightarrow x(x^2-1)=0$

$\Longleftrightarrow x(x^2-1^2)=0 \Longleftrightarrow x(x-1)(x+1)=0$

$\Longleftrightarrow (x=0$ ou $x=1$ ou $x=-1)$

Donc les pts fixes de f sont $0, 1, -1$

et on a : $0 \notin]0,\frac{1}{2}[$, $1 \notin]0,\frac{1}{2}[$ et $-1 \notin]0,\frac{1}{2}[$

L'explication :

f n'admet pas de pt fixe dans $]0,\frac{1}{2}[$ malgré que f est une app. Contractante parce que l'espace $]0,\frac{1}{2}[$ n'est pas Complet.

1

1

5/7

Exo3 : on a d_1 et d_2 deux distances équivalentes sur E, donc : $\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0$ tq :
$\forall x, y \in E, \ \alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y) \cdots (*)$

0,5

1- $\Rightarrow$) Supposons que $(x_n)_n$ CV dans (E, d_1)
Mq : $(x_n)_n$ CV dans (E, d_2)

Soit $x \in E$ la limite de $(x_n)_n$ dans (E, d_1)
ie : $x = \lim_{n \to +\infty} x_n \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} d_1(x_n, x) = 0$.

D'après $(*)$, on a : $\forall n, \ 0 \leq d_2(x_n, x) \leq \beta d_1(x_n, x)$
par passage à la limite quand $n \to +\infty$,
on a :
$\cancel{\lim_{n \to +\infty} 0} \leq \lim_{n \to +\infty} d_2(x_n, x) \leq \lim_{n \to +\infty} \cancel{\beta d_1(x_n, x)}$

2

Donc : $\lim_{n \to +\infty} d_2(x_n, x) = 0$.

D'où : $(x_n)_n$ CV dans (E, d_2) vers x.

$\Leftarrow$) analogue.

2- $\Rightarrow$) Supposons que (E, d_1) est compact
Mq : (E, d_2) est compact.

Soit $(x_n)_n$ une suite de (E, d_2)
Donc $(x_n)_n$ est une suite de (E, d_1) qui est compact

0,5

Donc : $\exists (x_{\varphi(n)})_n$ sous-suite de $(x_n)_n$
qui converge vers x dans (E, d_1)

D'après la question (1), la suite $(x_{\varphi(n)})_n$ converge aussi vers x dans (E, d_2)

D'où: $\exists (x_{\varphi(n)})_n$ sous-suite qui converge dans (E, d_2).

D'où (E, d_2) est compact

$\Leftarrow$) analogue.

Ex04: on a: $\frac{\|x_n - y_n\|}{\|x_n\|} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n} \|x_n\| \ldots (I)$

Mais: $\left(\|x_n\| = \|x_n - y_n + y_n\| \leq \|x_n - y_n\| + \|y_n\|\right) \times \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\|x_n\| \leq \frac{1}{n}\|x_n - y_n\| + \frac{1}{n}\|y_n\| \ldots (II)$

De (I) et (II), on a

$\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}\|x_n - y_n\| + \frac{1}{n}\|y_n\| \Rightarrow$

$\|x_n - y_n\| - \frac{1}{n}\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}\|y_n\|$

$\Rightarrow \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}\|y_n\|\right] \times n$

$\Rightarrow (n-1)\|x_n - y_n\| \leq \|y_n\| \Rightarrow \|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n-1}\|y_n\|$

$\Rightarrow \frac{\|x_n - y_n\|}{\|y_n\|} \leq \frac{1}{n-1}$

D'où: $\forall n \geq 2$, $0 \leq \frac{\|x_n - y_n\|}{\|y_n\|} \leq \frac{1}{n-1}$

par passage à la limite, on a:

$$\lim_{n \to +\infty} 0 \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{\|x_n - y_n\|}{\|y_n\|} \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n-1}$$

D'où: $\lim_{n \to +\infty} \frac{\|x_n - y_n\|}{\|y_n\|} = 0$.