FACULTE DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Département d'Electrotechnique & d'Automatique
Année Universitaire : 2023 – 2024
Enseignant : Dahmane Ghenam
Module : Traitement du signal

Session : Normale
Date : 18 /01/2024
Durée : 1h30
Niveau : Master 1 Auto

Exercice 1 :

La figure 1 représente un signal périodique $f(t)$ défini par :

$$f(t) = \begin{cases} 2 & -4 \leq t < 0 \\ -2 & 0 \leq t < 4 \end{cases}$$

1. Quelle est la période T et la pulsation ω du signal $f(t)$.
2. Développer en série de **Fourier réelle** ce signal.
3. Déterminer la 1ère Harmonique (fondamentale).
4. Calculer la puissance moyenne de ce signal.

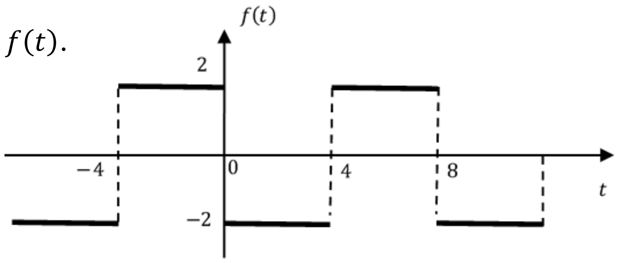


Fig.1

Exercice 2 :

1. Tracer les signaux $x(t)$ et $h(t)$ définis par :

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) \qquad\qquad h(t) = \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

$\Pi(t)$ est le signal porte

2. Déterminer graphiquement le produit de convolution entre le signal $x(t)$ et le signal $h(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

3. Tracer le signal $y(t)$

Exercice 3 :

1. Déterminer la transformée de Fourier du signal $z(t)$ en appliquant la formule de la Transformée de Fourier : (voir figure 2)

$$Z(\omega) = \mathcal{F}\{z(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-j\omega t}dt$$

2. Déduire la transformée de Fourier du signal $g(t) = z(t-3)$
3. Déduire la transformée de Fourier du signal $v(t) = g(2t)$

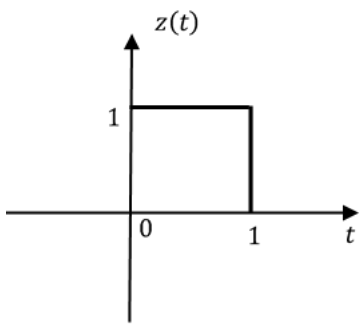


Fig. 2

Rappel :

- Si $x(t) \xrightarrow{TF} X(\omega)$ alors $x(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$ $\quad a \in \mathbb{R}$

- Si $x(t) \xrightarrow{TF} X(\omega)$ alors $x(t-t_0) \xrightarrow{TF} e^{-j\omega t_0}X(\omega)$ $\quad t_0 \in \mathbb{R}$

Corrigé Type de l'Examen

Exercice 1 : (08 pts)

1. La période T et la pulsation ω du signal $f(t)$.

$$T = 8 \quad \text{(01)} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4} \quad \text{(01)}$$

2. Le signal $f(t)$ est impair alors, les coefficients a_n et a_0 **sont nuls**. On calcul les coefficients b_n (0,5)

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^4 -2\sin n\frac{\pi}{4}t\,dt = -\int_0^4 \sin n\frac{\pi}{4}t\,dt = -\left[-\frac{4}{n\pi}\cos n\frac{\pi}{4}t\right]_0^4 = \frac{4}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

(0,5)

$$\boldsymbol{b_n = \frac{4}{n\pi}(\cos n\pi - 1), \qquad n \geq 1} \quad \text{(0,5)}$$

- Si n est paire, $(n = 2k,\ k \geq 1)$, alors $\boldsymbol{b_n = b_{2k} = 0.}$
- Si n est impaire, $(n = 2k+1,\ k \geq 0)$, alors

$$\boldsymbol{b_n = b_{2k+1} = -\frac{8}{(2k+1)\pi}, \quad k \geq 0}$$

En résumé :

$$\boldsymbol{b_n = \begin{cases} 0 & n = 2k,\ k \geq 1 \\ -\dfrac{8}{(2k+1)\pi} & n = 2k+1,\ k \geq 0 \end{cases}} \quad \text{(0,5)}$$

$$\text{on a: } f(t) = \underbrace{a_0}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n \cos n\omega t}_{=0} + b_n \sin n\omega t \quad \text{(0,5)}$$

$$\text{finalement: } f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{8}{(2k+1)\pi}\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4}t\right) = \boldsymbol{-\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4}t\right)} \quad \text{(0,5)}$$

3. La première harmonique $(n = 1, k = 0)$

$$\boldsymbol{h_1(t) = -\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}t = \frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}t \pm \pi\right)} \quad \text{(01)}$$

4. La puissance moyenne du signal :

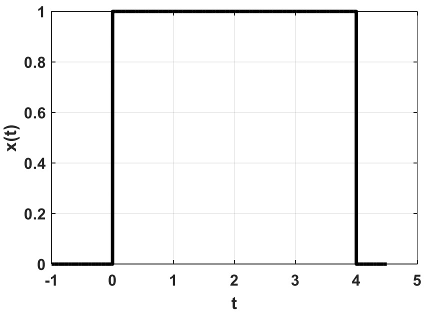
$$P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt + \frac{1}{4}\int_0^4 |-2|^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^4 4dt = [4t]_0^4 = \mathbf{16} \quad \text{(01)}$$

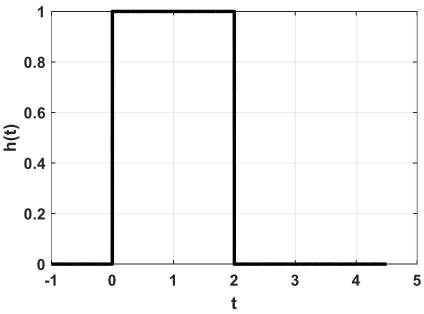
(01)

Exercice 2 : (07 pts)

1. Le tracé des signaux $x(t)$ et $h(t)$ (0,5)

(0,5)





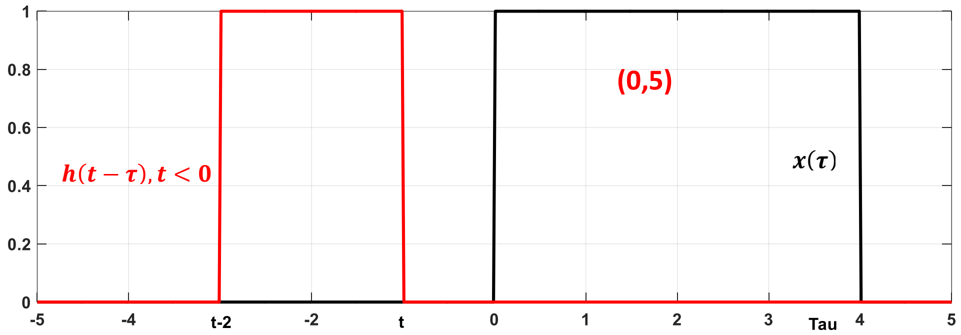
2. Le produit de convolution entre les deux signaux :

On détermine graphiquement le produit de convolution :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \text{avec} \quad x(\tau) = \Pi\left(\frac{\tau-2}{4}\right)$$

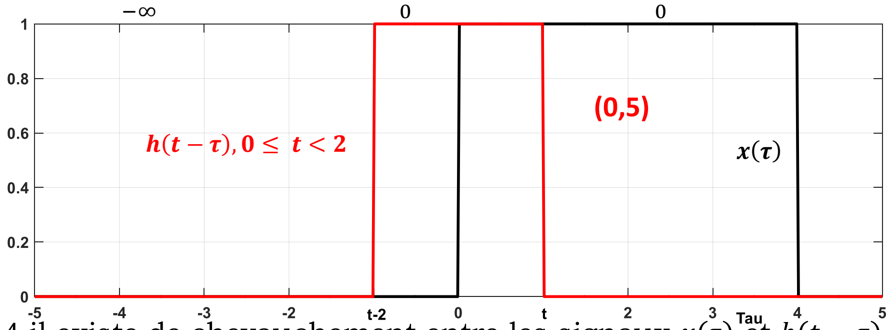
- Pour $t < 0$ pas de chevauchement entre les signaux $x(\tau)$ et $h(t-\tau)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$$ **(0,5)**



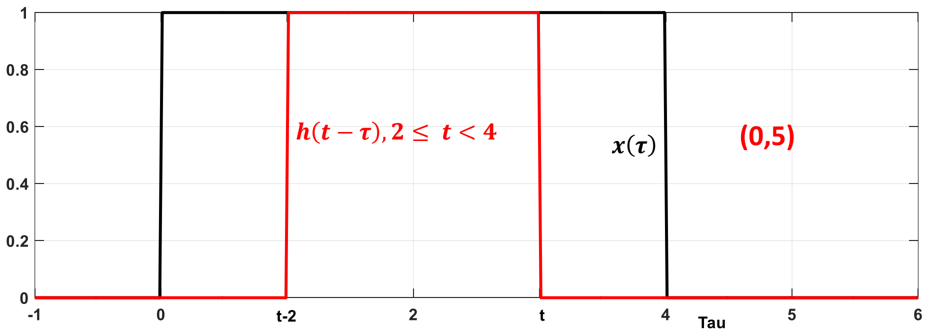
- Pour $0 \leq t < 2$ il existe de chevauchement entre les signaux $x(\tau)$ et $h(t-\tau)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} 1\cdot 1 d\tau = t$$ **(0,5)**



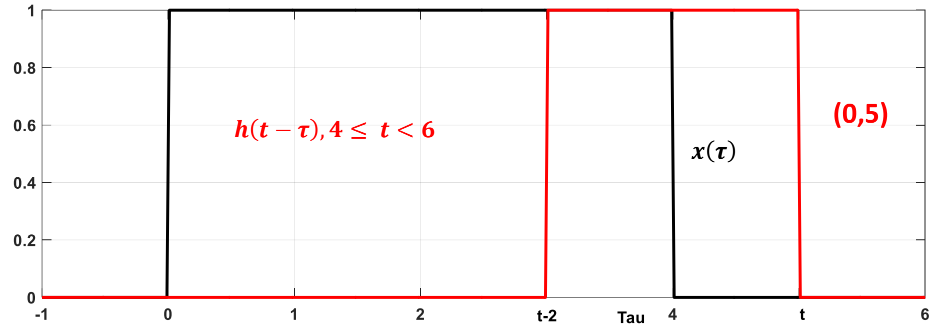
- Pour $2 \leq t < 4$ il existe de chevauchement entre les signaux $x(\tau)$ et $h(t-\tau)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-2}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-2}^{t} 1\cdot 1 d\tau = 2$$ **(0,5)**



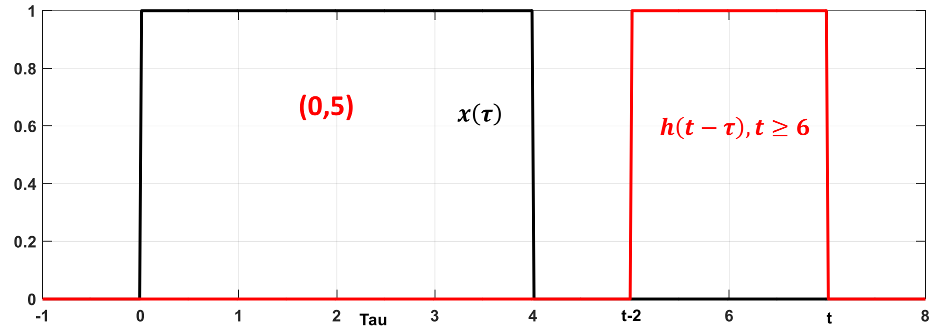
- Pour $4 \leq t < 6$ il existe de chevauchement entre les signaux $x(\tau)$ et $h(t-\tau)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-2}^{4} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-2}^{4} 1\cdot 1 d\tau = -t+6$$ **(0,5)**



- Pour $t \geq 6$ pas de chevauchement entre les signaux $x(\tau)$ et $h(t-\tau)$

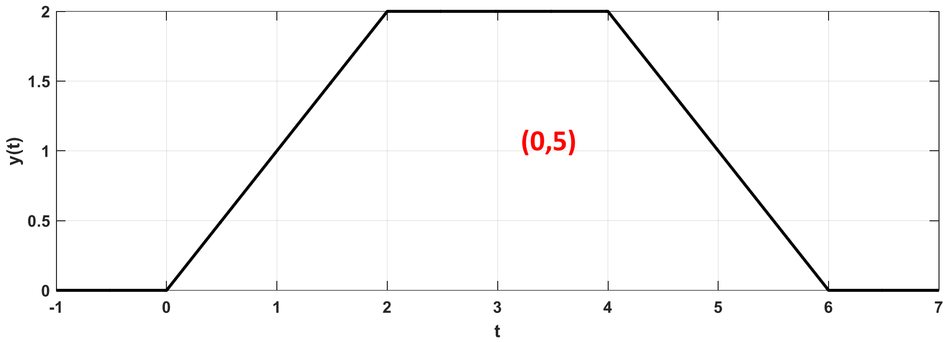
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0 \quad \textbf{(0,5)}$$



Finalement :

$$\boldsymbol{y(t)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{t < 0} \\ \boldsymbol{t} & \mathbf{0} \leq \boldsymbol{t} < \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} \leq \boldsymbol{t} < \mathbf{4} \\ -\boldsymbol{t} + \mathbf{6} & \mathbf{4} \leq \boldsymbol{t} < \mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{t} \geq \mathbf{6} \end{cases} \quad \textbf{(0,5)}$$

3. Le tracé du signal $\boldsymbol{y(t)}$



Exercice 3 : (05 pts)

1. La transformée de Fourier du signal $z(t)$:

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{1} e^{-j\omega t}dt = \left[-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}\right]_0^1 = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{j\omega}}\left(\mathbf{1} - \boldsymbol{e^{-j\omega}}\right) \quad \textbf{(02)}$$

2. Déduire la transformée de Fourier du signal $g(t) = z(t-3)$

$$G(\omega) = e^{-3j\omega}Z(\omega) = e^{-3j\omega}\left(\frac{1}{j\omega}\left(1 - e^{-j\omega}\right)\right) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{j\omega}}\left(\boldsymbol{e^{-3j\omega}} - \boldsymbol{e^{-4j\omega}}\right) \quad \textbf{(1,5)}$$

3. Déduire la transformée de Fourier du signal $v(t) = g(2t)$

$$V(\omega)=\frac{1}{|2|}G\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{j\left(\frac{\omega}{2}\right)}\left(e^{-3j\frac{\omega}{2}}-e^{-4j\frac{\omega}{2}}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{j\omega}\left(e^{-\frac{3}{2}j\omega}-e^{-2j\omega}\right)}\quad \textbf{(1,5)}$$