Université Paris 5 / UFR de Mathématiques et Informatique - L3 MIA

Systèmes de Communication

Epreuve de contrôle continu (1h30) - 21 mars 2007

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. *Les trois parties peuvent être abordées dans l'ordre qui vous conviendra, mais les réponses à chaque partie ne devront pas être dispersées dans la copie. Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.*

1 Questions de cours (1+1+2+2+1=7 points)

1) Lors d'un décodage de canal en bloc, pourquoi le syndrôme ne permet-il pas de détecter toutes les erreurs de transmission ? Quelles erreurs ne peuvent pas être détectées ?

2) La figure ci-dessous représente le début du décodage selon l'algorithme de Viterbi d'une séquence binaire de 15 éléments binaires codée par un codeur convolutif $\mathcal{C}(2, 1, 3)$. Dans le diagramme en treillis, les lignes en trait plein représentent un 1 à l'entrée du codeur, les lignes en pointillés un 0. Les chemins éliminés à l'instant 8 ont été effacés pour plus de clarté. Peut-on commencer le décodage avant d'avoir reçu toute la séquence codée ? (justifier) Si oui, quels sont les premiers éléments binaires de la séquence originelle ?

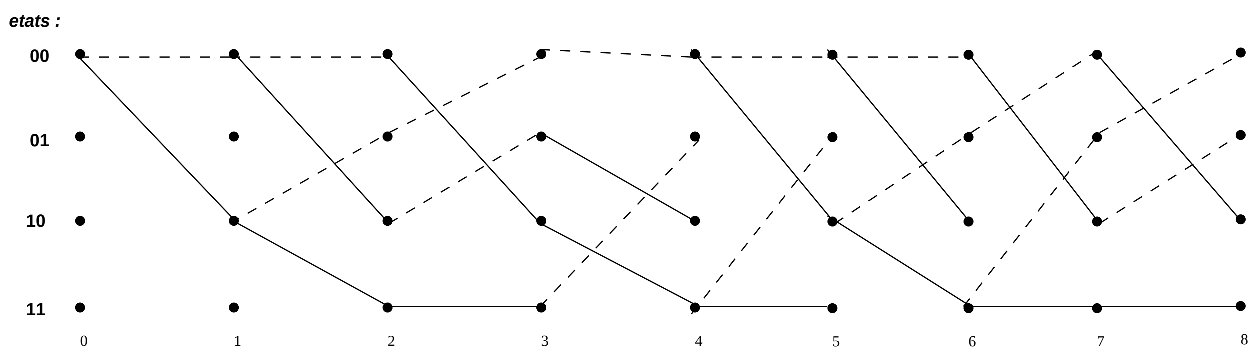

FIG. 1 – Début du décodage selon l'algorithme de Viterbi.

3) Soit un signal audio de spectre à support borné, de fréquence maximale 4000 Hz. La puissance de ce son est de 70 dB. Le signal est échantillonné à 8 kHz et chaque échantillon est codé sur 12 bit (quantification scalaire uniforme). Expliquer pourquoi, perceptivement, cette numérisation (échantillonnage + quantification) ne dégrade pas le son. Rappel : le rapport signal à bruit de quantification, en dB, vaut $6k$, où k désigne le nombre de bit par échantillon.

4) Un signal vocal s peut être découpé en tranches de 20 ms et représenté, sur chaque tranche, par un modèle dit auto-régressif d'ordre 10 :

$$s(n) = \sigma_e e(n) - \sum_{i=1}^{10} a_i s(n-i)$$

C'est-à-dire que chaque échantillon $s(n)$ est une combinaison linéaire des précédents, plus un terme d'innovation $\sigma_e e(n)$, tel que la puissance de e vaut 1. Au lieu de transmettre les échantillons $s(n)$ quantifiés, un codeur de parole peut donc transmettre, pour chaque tranche de 20 ms, les coefficients a_1 à a_{10}, σ_e et la suite des 240 échantillons $e(n)$ (pour un échantillonnage à 8 kHz). Sur une liaison à débit réduit, pourquoi est-il plus intéressant de transmettre ces 251 valeurs que les 240 échantillons de s ?

5) Si l'entropie d'une source est égale à la longueur moyenne des symboles émis, combien de bit d'information porte chaque élément binaire ? (expliquer)

2 Exercices

2.1 Codage de canal (6 points)

Soit un code en bloc linéaire défini par la matrice génératrice G suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Quel est le rendement de ce code ?

2) Construire l'ensemble des mots de code. Quel est la distance minimale de ce code ? En déduire les pouvoirs de détection et de correction.

3) On reçoit le mot $r = 110111$. Décoder r selon la distance minimale (*i.e.* en recherchant le mot de code le plus proche du mot reçu). Ce décodage est-il fiable ? (justifier votre réponse).

4) Soient les mots d'erreurs $e = 111000$ et $e' = 000111$. Pourquoi e n'est-elle pas détectable alors que e l'est (par la méthode du syndrôme par exemple) ?

2.2 Détection d'un tatouage audio (7 points)

Le tatouage audio consiste à insérer une information binaire auxiliaire dans un son par une modification imperceptible de ce dernier. Le destinataire du son peut ainsi à la fois écouter le son et, s'il a le décodeur adéquat, extraire l'information additionnelle (par exemple les paroles d'une chanson).

On s'intéresse ici au tatouage audio par QIM (quantification par modulation d'index). Habituellement, lorsque l'on quantifie un signal, on définit un certain nombre de *niveaux de quantification* ou *quantifieurs* (256 pour un codage sur 8 bits) et chaque échantillon est approché par le quantifieur le plus proche, comme indiqué sur la figure 2a. On note q le *pas de quantification*, c'est-à-dire l'écart entre deux niveaux de quantification. On souhaite ici insérer un bit d'information additionnelle par échantillon, par la méthode QIM. Pour cela, on partitionne l'ensemble des quantifieurs en 2 sous-ensembles $\mathcal{Q}_0$ et $\mathcal{Q}_1$, comme illustré sur la figure 2b : pour insérer 0, on choisit le quantifieur de $\mathcal{Q}_0$ le plus proche de l'échantillon x ; pour insérer 1 on choisit le quantifieur de $\mathcal{Q}_1$ le plus proche de x. On note $Q_i(x)$ le quantifieur associé à x, représenté par un rond noir si $i = 1$, par un rond blanc si $i = 0$.

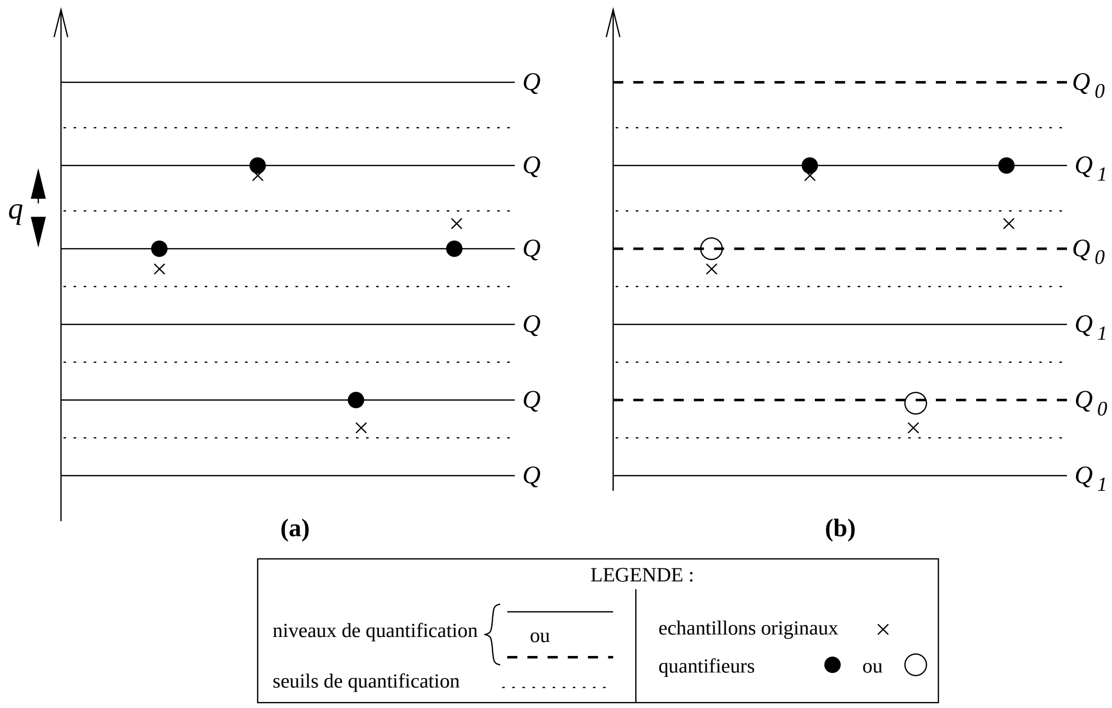

FIG. 2 – (a) Quantification d'un signal échantillonné. (b) Quantification de 4 échantillons avec insertion du message 0101.

Pour décoder la séquence binaire insérée dans le signal audio, il suffit de regarder à quel sous-ensemble de quantifieurs appartient chaque échantillon reçu. Toutefois, le canal de communication altère généralement le signal transmis : pour chaque échantillon x, on reçoit une valeur $z = Q_i(x) + b$, telle que b est une variable aléatoire de densité de probabilité uniforme sur un intervalle $[-\Delta/2; \Delta/2]$. La densité de probabilité de b, représentée sur la figure 3, est donc définie par :

$$p(b) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{si } b \in [-\Delta/2; \Delta/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette modélisation correspond par exemple au cas où le signal audio subit une nouvelle quantification dans le canal.

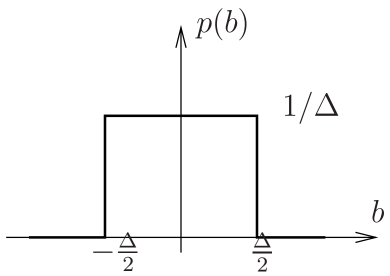

FIG. 3 – Densité de probabilité du bruit de canal b.

La figure 4 résume cette chaîne de communication. La règle de décision dans le détecteur est la suivante : si le quantifieur le plus proche de z appartient à $\mathcal{Q}_0$ on détecte 0, s'il appartient à $\mathcal{Q}_1$ on détecte 1.

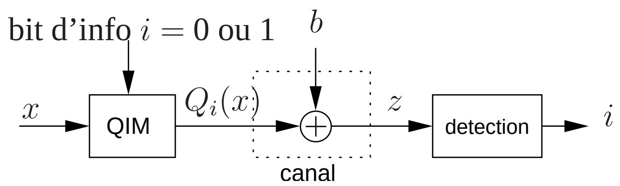

FIG. 4 – Chaîne de communication équivalente au système de tatouage.

1) La figure 5 représente les valeurs possibles pour $Q_i(x)$ sur un certain intervalle. On suppose que x est quantifié par la valeur indiquée $Q_1(x)$. Reproduisez cette figure et dessinez-y :

– les zones de décisions associées à chaque bit, que vous noterez r_0 et r_1
– la densité de probabilité de z dans le cas où $\Delta = \frac{3}{2}q$.

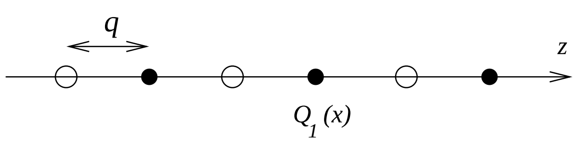

FIG. 5 –

2) Pour quelles valeurs de Δ la probabilité d'erreur est-elle nulle ? (justifier)

3) Suppposons $q < \Delta < 3q$. Calculer la probabilité de fausse décision conditionnellement à l'insertion d'un 1, $\mathrm{P}(r_1|Q_0)$. Calculer de même $\mathrm{P}(r_0|Q_1)$. En déduire la probabilité d'erreur si les 0 et les 1 sont équiprobables.

4) Suppposons $q < \Delta < 5q$. Calculer la probabilité d'erreur.

3 Annexes

Probabilités

Règle de Bayes :
Soient A un événement et X une variable aléatoire de densité de probabilité p. Alors :

$$\mathrm{P}(A|x)\mathrm{p}(x) = \mathrm{p}(x|A)\mathrm{P}(A)$$

Soient une variable aléatoire Z et deux réels a et b :

$$\mathrm{P}(a < Z < b) = \int_a^b \mathrm{p}(z)\mathrm{d}z$$

Densité de probabilité p d'une variable aléatoire gaussienne centrée Z de variance σ^2 :

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\Big)$$

Fonction d'erreur complémentaire Q :

$$Q : x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \mathrm{e}^{-z^2/2}\mathrm{d}z$$