Systèmes de Communication
Correction du partiel du 21.3.07

1) Questions de cours : voir cours

2.1) Codage de canal

1) Codage d'un mot de données m par un mot de code c : $c = mG$

Par conséquent, $\begin{cases} m \text{ est de longueur } 3 \\ c \text{ ——— } 6 \end{cases}$

Donc le rendement est de $\frac{1}{2}$

2) Ensemble des mots de code = ensemble des mots de code associés à chaque mot de 3 e.b. :

m	$c = mG$		P_H
000	000 000	c^0	0
001	001 011	c^1	3
010	010 110	c^2	3
011	011 101	c^3	4
100	100 101	c^4	3
101	101 110	c^5	4
110	110 011	c^6	4
111	111 000	c^7	3

Distance minimale du code = poids de Hamming min.
= 3

Donc pouvoir de détection = $d_{min} - 1 = 2$

pouvoir de correction = $\left[\frac{d_{min}-1}{2}\right] = 1$

3) Distances des mots de code par rapport à r :

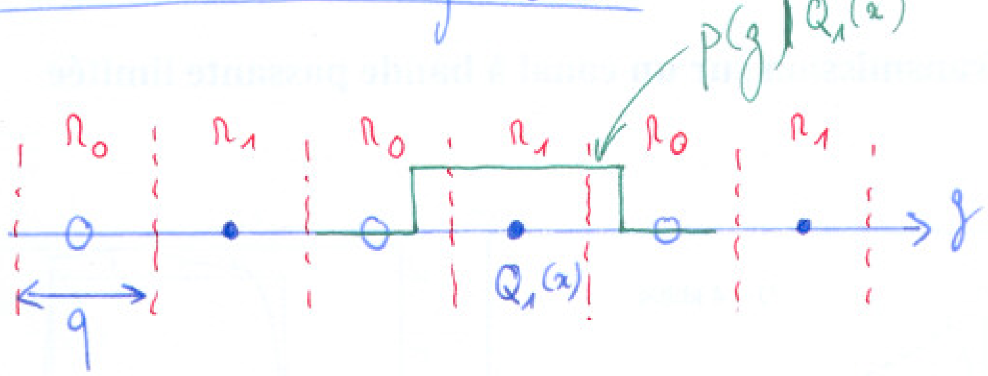
c	c^0	c^1	c^2	c^3	c^4	c^5	c^6	c^7
$d(c,r)$	5	4	2	3	2	3	1	4

Le mot de code le plus proche est c^6
Le décodage est fiable car c^6 est à distance 1 de r, ce qui correspond au nombre d'erreurs corrigibles par le code.

4) Contrairement à e', e est un mot de code. Par conséquent, le syndrôme calculé pour un mot reçu $r = c + e$ (avec c un mot de code) sera nul, ce qui ne permet pas de détecter l'erreur.

2.2) Détection d'un tatouage audio

1)



2) La probabilité d'erreur est nulle si la probabilité que $g \in$ zone de décision de $Q_i(x)$ vaut 1.

En notant I cette zone,

$$P(g \in I) = 1 \quad \text{ssi} \quad \int_I p(g \mid Q_i(x)) = 1$$

$$\text{ssi} \quad \left[-\frac{\Delta}{2} ; \frac{\Delta}{2}\right] \subset I$$

$$\text{ssi} \quad \Delta < q$$

3)
$$P(\mathcal{R}_0 \mid Q_1) = P\left(g < Q_1(x) - \frac{q}{2} \text{ ou } g > Q_1(x) + \frac{q}{2} \,\Big|\, Q_1\right)$$

$$= P\left(g < Q_1(x) - \frac{q}{2} \,\Big|\, Q_1\right) + P\left(g > Q_1(x) + \frac{q}{2} \,\Big|\, Q_1\right)$$

(événements disjoints)

Or, sachant Q_1, $g = Q_1(x) + b$.

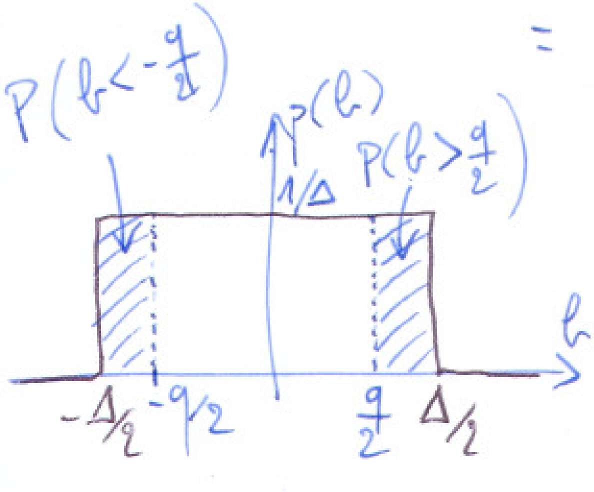
Donc
$$\underline{P(\mathcal{R}_0 \mid Q_1)} = P\left(b < -\frac{q}{2} \,\Big|\, Q_1\right) + P\left(b > \frac{q}{2} \,\Big|\, Q_1\right)$$

$$= P\left(b < -\frac{q}{2}\right) + P\left(b > \frac{q}{2}\right)$$

car b indépendant de i

$$= \frac{1}{\Delta} \times \left(\frac{\Delta}{2} - \frac{q}{2}\right) \times 2$$

$$= 1 - \frac{q}{\Delta}$$



De même, $P(r_1 | Q_0) = 1 - \frac{q}{\Delta}$

$\underline{P_e} = P\big((Q_1, r_0) \text{ ou } (Q_0, r_1)\big)$

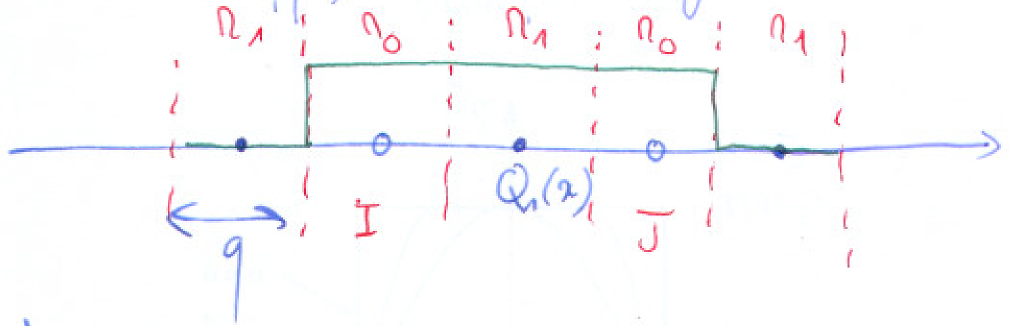
$= P(Q_1, r_0) + P(Q_0, r_1)$ (événements disjoints)

$= P(r_0 | Q_1) P(Q_1) + P(r_1 | Q_0) P(Q_0)$

$= \left(1 - \frac{q}{\Delta}\right) \times \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{q}{\Delta}\right) \times \frac{1}{2}$

$= 1 - \frac{q}{\Delta}$

4) Si $\Delta = 3q$, la ddp de $z | Q_1(x)$ est :



et $P_e = \frac{2}{3}$

Pour $3q < \Delta < 5q$, la décision est fausse si z est dans un des intervalles I ou J car au delà de ces intervalles, on retombe dans une zone de décision correcte, même si elle est éloignée de $Q_1(x)$

Donc $P(r_0 | Q_1) = P\left(Q_1(x) - \frac{3q}{2} < z < Q_1(x) - \frac{q}{2}\right)$

$+ P\left(Q_1(x) + \frac{q}{2} < z < Q_1(x) + \frac{3q}{2}\right)$

$= P\left(-\frac{3q}{2} < b < -\frac{q}{2}\right) + P\left(\frac{q}{2} < b < \frac{3q}{2}\right)$

$= 2\frac{q}{\Delta}$

Idem pour $P(r_1 | Q_0)$. Donc $P_e = 2q/\Delta$