

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Abderahmane Mira-Bejaia  
Faculté de Technologie  
Département de Génie des Procédés



# Cours de Transfert de Chaleur

---

## Chapitre 2

### Conduction thermique

---

Proposé par :

Mr Abdelhafid Dib

Année Universitaire 2016-2017

# Table des matières

2.1. Equation de la conduction . . . . .	3
2.1.1. Expression simplifiées . . . . .	4
2.2. Conduction unidirectionnel stationnaire . . . . .	5
2.2.1. Configurations géométriques sans sources internes . . . . .	5
a. Mur plan à faces isothermes . . . . .	5
b. Mur simple en contact avec deux fluides . . . . .	6
c. Cylindrique creux à surfaces latérales isothermes . . . . .	6
d. Cylindrique creux en contact avec deux fluides . . . . .	8
2.2.2. Configurations simples avec sources internes de chaleur . . . . .	9
a. Mur plan à faces isothermes . . . . .	9
<b>Liste des Figures</b>	<b>11</b>

### 2.1. Equation de la conduction

Dans ce chapitre, nous allons établir l'équation de conservation de l'énergie thermique par bilan sur un élément de volume  $\Delta V$  qu'on supposera indéformable, immobile et source d'une génération de chaleur  $P$  (voir Fig.1). Le bilan de chaleur se fera en établissant l'inventaire des différents flux de chaleur, soit :

$$(\text{flux de chaleur entrant}) - \text{flux de chaleur entrant} \mp \text{flux de chaleur généré} = \text{flux de chaleur accumulé} \quad (1)$$

soit :

$$\phi_e - \phi_s \mp \phi_q = \phi_a \quad (2)$$

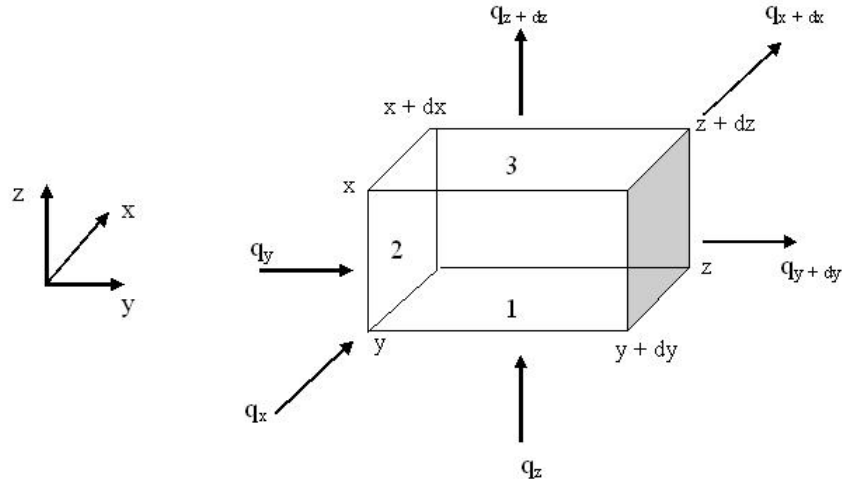


Fig. 1 – Bilan dans un élément de volume

1. flux entrant  $\phi_e$ 
  - suivant la direction x :  $q_x d_y d_z|_x$
  - suivant la direction y :  $q_y d_x d_z|_y$
  - suivant la direction z :  $q_z d_x d_y|_z$
2. flux sortant  $\phi_s$ 
  - suivant la direction x :  $q_x d_y d_z|_{x+dx}$
  - suivant la direction y :  $q_y d_x d_z|_{y+dy}$
  - suivant la direction z :  $q_z d_x d_y|_{z+dz}$
3. flux généré  $\phi_g$  :  $\pm P.dY = \pm P.dxdydz$
4. flux accumulé  $\phi_a$  :  $\frac{\partial}{\partial t}(\rho CT)dxdydz$

L'écriture du bilan nous donne :

$$(q_x - q_{x+dx}) dydz + (q_y - q_{y+dy}) dx dz + (q_z - q_{z+dz}) dx dy \mp P.dxdydz = \frac{\partial}{\partial t}(\rho CT)dxdydz$$

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} \pm P = \frac{\partial}{\partial t}(\rho CT) \quad (3)$$

soit l'équation de la chaleur (4) suivante :

$$-\text{div}(\vec{q}) \pm P = \frac{\partial}{\partial t}(\rho C T) \quad (4)$$

La loi de Fourier nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}) \pm P = \frac{\partial}{\partial t}(\rho C T) \quad (5)$$

### Hypothèses

- (a). milieu isotrope
- (b).  $\lambda$  constante sur l'intervalle de température considéré
- (c). capacité calorifique constante

l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\Delta T \pm \frac{P}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \left| \alpha = \frac{\lambda}{\rho C} \right. \quad \text{est la diffusivité thermique} \quad / \quad \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad (6)$$

$\Delta$  est le Laplacien

1. en coordonnées cartésiennes (x,y,z)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \pm \frac{P}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (7)$$

2. en coordonnées cylindrique (r,θ,z)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \pm \frac{P}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8)$$

3. en coordonnées sphérique (r,θ,ψ)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sin \psi \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) \pm \frac{P}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9)$$

#### **2.1.1. Expression simplifiées**

- Absence de source interne de chaleur (P = 0 )

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (10)$$

- Régime permanent

$$\Delta T \pm \frac{P}{\lambda} = 0 \quad (11)$$

- Régime permanent et en l'absence de source de chaleur

$$\Delta T = 0 \quad (12)$$

## 2.2. Conduction stationnaire unidirectionnelle

Sauf indication contraire, les problèmes traités dans ce qui suit concerneront des milieux homogènes, isotropes et indéformables ayant  $\lambda$  et  $P$  constantes et indépendantes de la température.

Certaines applications pratiques peuvent être traitées par des systèmes unidimensionnels où la température ne varie essentiellement que dans une seule direction. Les cas de références sont représentés par le problème plan, cylindrique et sphérique.

Le problème plan correspond à la conduction dans un mur, une plaque, qu'on rapporte à un système de coordonnées cartésiennes et qui conduit à champ de température de la forme  $T = f(x)$ ,  $x$  désigne une coordonnée d'espace suivant laquelle l'écoulement de la chaleur se fait. Le problème cylindrique correspond à la conduction avec une symétrie cylindrique. Rapporté aux systèmes de coordonnées cylindriques, ce problème conduit à une variation de température en fonction de la distance radiale seule, c'est à dire de la forme  $T = f(r)$ . Idem pour le problème sphérique.

### 2.2.1. Configurations géométriques simples sans sources internes

#### a. Mur plan à faces isothermes

Soit un mur plan d'épaisseur  $e$  dont les températures  $T_1$  et  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ) des deux faces sont connues, constantes et uniformes. L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0; \quad 0 \leq x \leq e \quad \left\{ \begin{array}{l} T(x=0) = T_1 \\ T(x=e) = T_2 \end{array} \right. \quad (13)$$

cette équation s'intègre immédiatement et donne :

$$\frac{dT}{dx} = C_1 = \text{Cste}; \quad 0 \leq x \leq e \quad (14)$$

cette expression montre clairement que le gradient de température est

constant sur l'épaisseur  $e$  du mur. La solution suivante montre également que le champ de température :

$$T(x) = T_1 + \left( \frac{T_2 - T_1}{e} \right) x$$

est linéaire (voir figure 3) et les surfaces isothermes qui en découlent sont des p

Connaissant le champ de température, la densité de flux thermique est don

$$q_x = -\lambda \left( \frac{dT}{dx} \right) = \lambda \left( \frac{T_1 - T_2}{e} \right) = \text{cste}$$

Le flux thermique total (puissance thermique) transféré entre les deux faces d'air  $S$  est donné par la relation suivante :

$$\Phi_x = q_x \cdot S = \lambda S \left( \frac{T_1 - T_2}{e} \right) \quad (17)$$

soit

$$\Phi_x = \frac{T_1 - T_2}{e/\lambda S} = \frac{\Delta T}{R_i} \quad ; \quad R_i = \frac{e}{\lambda S} \quad (18)$$

cette écriture traduit la loi d'ohm pour une résistance  $R$ , d'où le schéma électrique équivalent de la figure figure 3.

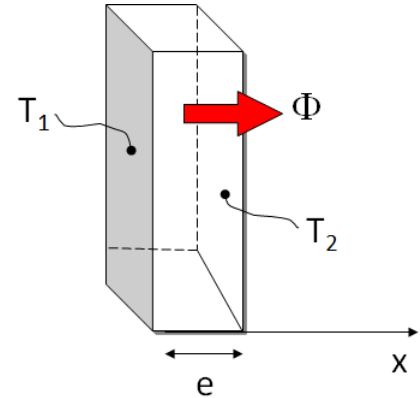


Fig. 2 – conduction-mur simple

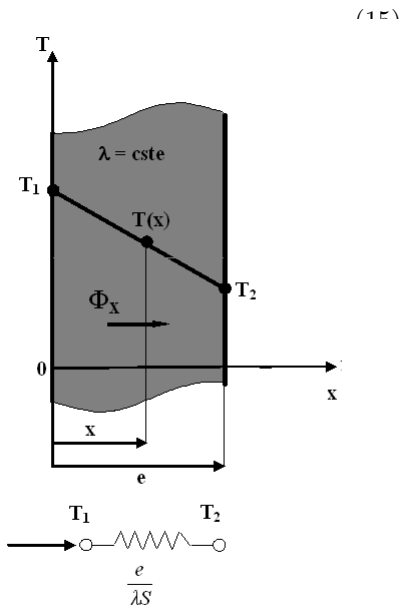


Fig. 3

### b. Mur plan en contact avec deux fluides

Ce cas correspond à celui d'un mur dont les températures des deux faces  $T_1$  et  $T_2$  résultent d'un échange convectif entre deux fluides. La chaleur est transférée, à travers le mur d'épaisseur  $e$ , entre le fluide chaud ayant la température  $T_{f1}$  et le fluide froid ayant la température  $T_{f2}$ . Dans ces conditions, le champ de température dans le mur et le flux thermique traversant ce dernier s'écrivent :

$$T(x) = T_1 + \left( \frac{T_2 - T_1}{e} \right) x \quad (19)$$

$$\Phi_{1x} = \lambda S \left( \frac{T_1 - T_2}{e} \right) \quad (20)$$

d'autre part, les flux de chaleur par convection cédés par le fluide chaud au mur et celui reçu par le fluide froid sont

$$\Phi_{2x} = \bar{h}_1 S (T_{f1} - T_1) \quad (21)$$

$$\Phi_{3x} = \bar{h}_2 S (T_2 - T_{f2}) \quad (22)$$

en régime permanent, le flux thermique se conserve, c à d :

$$\Phi_x = \bar{h}_1 S (T_{f1} - T_1) = \bar{h}_2 S (T_2 - T_{f2}) = \lambda S \left( \frac{T_1 - T_2}{e} \right) \quad (23)$$

soit :

$$\Phi_x = \frac{T_{f1} - T_1}{1/\bar{h}_1 S} = \frac{T_2 - T_{f2}}{1/\bar{h}_2 S} = \frac{T_1 - T_2}{e/\lambda S} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{1/\bar{h}_1 S + 1/\bar{h}_2 S + e/\lambda S} \quad (24)$$

c'est à dire :

$$\Phi_x = \frac{T_{f1} - T_1}{R_{e1}} = \frac{T_2 - T_{f2}}{R_{e2}} = \frac{T_1 - T_2}{R_i} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_g} \quad (25)$$

qui traduit la loi d'ohm pour 03 résistances en série représentées par le schéma électrique de la figure 4. Par ailleurs, on peut définir un coefficient d'échange de chaleur global ou équivalent entre les deux fluides :

$$\Phi_x = \bar{h}_g S (T_{f1} - T_{f2}) = \frac{1}{R_g} (T_{f1} - T_{f2}) \quad (26)$$

$$\bar{h}_g = \frac{1}{R_g S} \quad / \quad \text{W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1} \quad (27)$$

$$\bar{h}_g = \frac{1}{\frac{1}{\bar{h}_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{\bar{h}_2}} \quad (28)$$

### c. Cylindrique creux à surfaces latérales isothermes

Considérons un tube cylindrique creux (Fig.5) limité par une surface latérale intérieure de rayon  $r_1$ , de température  $T_1$ , et une surface latérale extérieure de rayon  $r_2$  et de température  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ). Les hypothèses faites conduisent à l'équation différentielle de la conduction, en coordonnée cylindrique, suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0; \quad r_1 \leq r \leq r_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} T(r = r_1) = T_1 \\ T(r = r_2) = T_2 \end{array} \right. \quad (29)$$

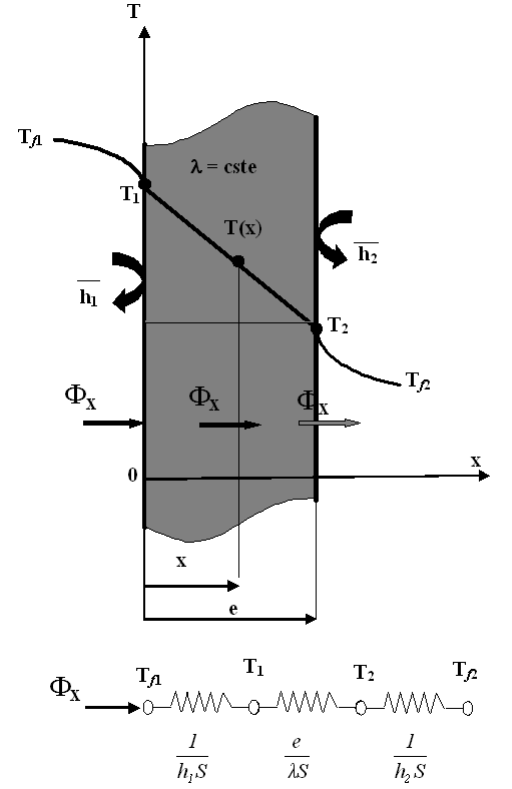


Fig. 4

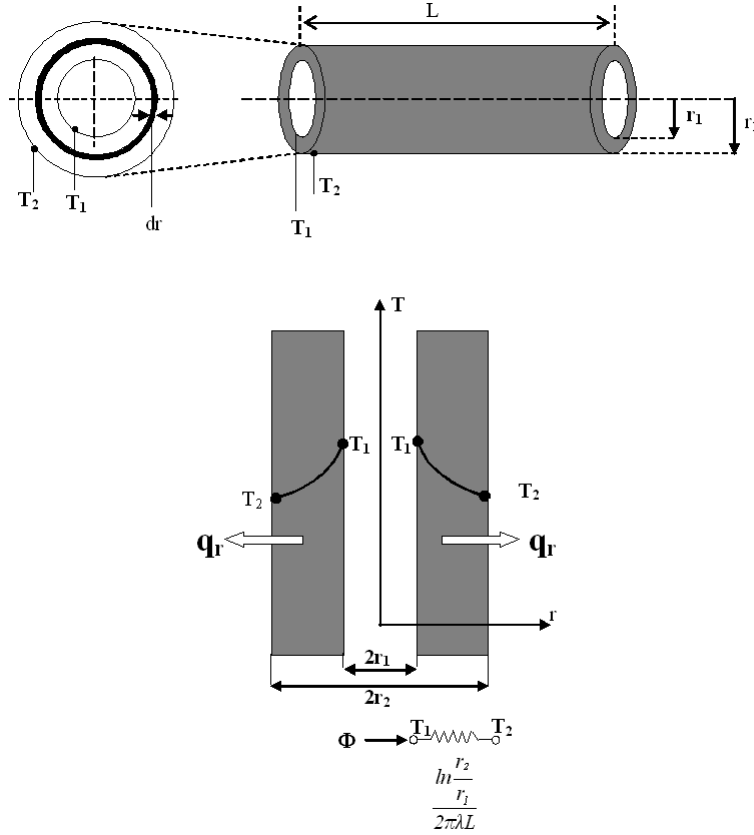


Fig. 5 – Cylindrique creux à surfaces latérales isothermes

soit après intégration :

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} T(r = r_1) = T_1 \\ T(r = r_2) = T_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \\ C_2 = T_1 - \left( \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \right) \ln r_1 \\ C_2 = T_2 - \left( \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \right) \ln r_2 \end{array} \right. \quad (30)$$

l'équation du champ de température dans le cylindre est :

$$T(r) = T_1 + \left( \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \right) \ln \frac{r}{r_1} = T_2 + \left( \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \right) \ln \frac{r}{r_2} \quad (31)$$

et les isothermes sont des surfaces cylindriques coaxiales de rayon  $r_1 \leq r \leq r_2$ .

La densité de flux thermique obtenue à l'aide de la loi de Fourier :

$$q_r = -\lambda \left( \frac{dT}{dr} \right) = \lambda \left( \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right) \frac{1}{r} \quad (32)$$

n'est pas constante et elle présente une variation radiale de type hyperbolique.

Le flux thermique total à travers la surface latérale de longueur L et de rayon r ( $S = 2\pi r L$ ) est donné par la relation suivante :

$$\Phi_r = q_r \cdot S = \frac{\lambda}{r} \left( \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right) 2\pi r L = 2\pi \lambda L \left( \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right) = \text{Cste} \quad (33)$$

en accord avec cette relation, la résistance thermique du cylindre creux est donnée par l'expression :

$$R_i = \frac{\Delta T}{\Phi_r} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi\lambda L} \quad (34)$$

et le schéma électrique du cylindre est celui de la figure 5

#### d. Cylindrique creux en contact avec deux fluides

Soit un cylindre creux qui sépare deux milieux fluides ayant les températures  $T_{f1}$  et  $T_{f2}$  ( $T_{f1} > T_{f2}$ ) constantes et uniformes (voir figure 6). Le transfert de chaleur a lieu entre le fluide chaud ayant la température  $T_{f1}$  qui s'écoule, par exemple, à l'intérieur du cylindre et le fluide froid de température  $T_{f2}$  qui s'écoule à l'extérieur de celui-ci. On supposera que les coefficients de transfert par convection ( $\bar{h}_1$  et  $\bar{h}_2$ ) afférents aux fluides et les rayons intérieur ( $r_1$ ) et extérieur ( $r_2$ ) sont constants et connus.

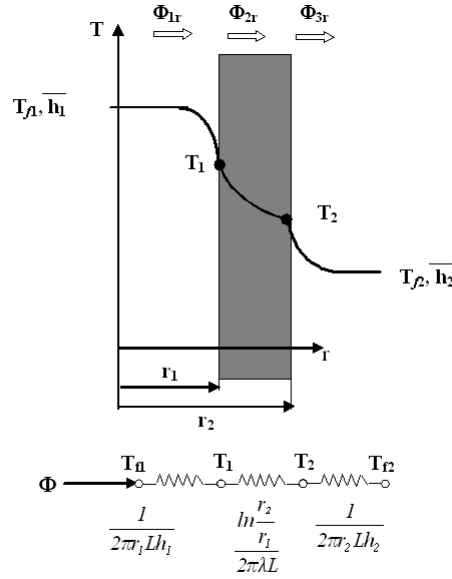


Fig. 6 – Cylindrique creux simple en contact avec deux fluides

la conservation du flux se traduit par l'égalité suivante .

$$\Phi_r = 2\pi r_1 L \bar{h}_1 (T_{f1} - T_1) = 2\pi \lambda L \left( \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right) = 2\pi r_2 L \bar{h}_2 (T_2 - T_{f2}) \quad (35)$$

$$\Phi_r = \frac{T_{f1} - T_1}{\frac{1}{2\pi r_1 L \bar{h}_1}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi \lambda L \ln \frac{r_2}{r_1}}} = \frac{T_2 - T_{f2}}{\frac{1}{2\pi r_2 L \bar{h}_2}} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{2\pi r_1 L \bar{h}_1} + \frac{1}{2\pi \lambda L \ln \frac{r_2}{r_1}} + \frac{1}{2\pi r_2 L \bar{h}_2}} \quad (36)$$

$$\Phi_r = \frac{T_{f1} - T_1}{R_{e1}} = \frac{T_1 - T_2}{R_i} = \frac{T_2 - T_{f2}}{R_{e2}} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_g} \quad (37)$$

qui traduit la loi d'ohm pour 03 résistances en série (voir figure 6).

On peut définir deux coefficients d'échange de chaleur globaux entre les deux fluides par rapport aux deux surfaces, intérieure  $S_i$  et extérieure  $S_e$ , limitant le cylindre creux :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_r^i &= \bar{h}_g^i S_i (T_{f1} - T_{f2}) = 2\pi r_1 L \bar{h}_g^i (T_{f1} - T_{f2}) \\ \Phi_r^e &= \bar{h}_g^e S_e (T_{f1} - T_{f2}) = 2\pi r_2 L \bar{h}_g^e (T_{f1} - T_{f2}) \end{aligned} \right\} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_g} \quad (38)$$



soit :

$$\left. \begin{aligned} \bar{h}_g^i &= \frac{1}{R_g S_i} = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{r_1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{r_2 h_2}} \\ \bar{h}_g^e &= \frac{1}{R_g S_e} = \frac{1}{\frac{r_2}{r_1 h_1} + \frac{r_2}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{h_2}} \end{aligned} \right\} / \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1} \quad (39)$$

ce qui conduit à définir un coefficient global (équivalent) de transfert thermique linéaire, sous la forme :

$$\bar{h}_g = \bar{h}_g^i r_2 = \bar{h}_g^e r_1 = \frac{1}{\frac{r_2}{h_1} + \frac{r_1 r_2}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{h_2}} / \text{ W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1} \quad (40)$$

### 2.2.1. Configurations simples avec sources internes de chaleur

#### a. Mur plan à faces isothermes

Soit un mur plan d'épaisseur  $2e$ , constitué d'un matériau homogène de conductivité thermique  $\lambda$  constante, caractérisé par une source interne de chaleur uniformément distribuée dans son volume. Les températures  $T_1$  et  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ) des deux faces sont connues, constantes et uniformes. Dans ces conditions, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{P}{\lambda} = 0; \quad 0 \leq x \leq e \quad \left\| \begin{aligned} T(x=0) &= T_1 \\ T(x=2e) &= T_2 \end{aligned} \right. \quad (41)$$

la solution générale de cette équation est :

$$T(x) = \frac{-P}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2 \quad \left\| \begin{aligned} T(x=0) &= T_1 \implies C_2 = T_1 \\ T(x=2e) &= T_2 \implies C_1 = \frac{P}{\lambda} e + \frac{T_2 - T_1}{2e} \end{aligned} \right. \quad (42)$$

ces valeurs conduisent au champ de température ci-dessous :

$$T(x) = \frac{-P}{2\lambda} x^2 + \left( \frac{T_2 - T_1}{2e} + \frac{P}{\lambda} e \right) x + T_1 \quad (43)$$

à cause de la forme parabolique du champ de température, cette dernière va admettre un extremum (max ou min) déterminé comme suit :

$$\frac{dT}{dx} = 0 \implies \frac{-P}{\lambda} x + \left( \frac{T_2 - T_1}{2e} + \frac{P}{\lambda} e \right) = 0 \quad (44)$$

$$x_{\min, \max} = \frac{\lambda}{P} \left( \frac{T_2 - T_1}{2e} \right) + e \quad (45)$$

sa nature (max ou min) est dictée par le signe de la deuxième dérivée :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{-P}{\lambda} \implies \begin{cases} P < 0 \implies \frac{d^2 T}{dx^2} > 0 \implies \exists x_{\min} > e \\ P > 0 \implies \frac{d^2 T}{dx^2} < 0 \implies \exists x_{\max} < e \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} T_{\max, \min} &= T(x_{\max, \min}) = \frac{-P}{2\lambda} \left( \frac{\lambda}{P} \left( \frac{T_2 - T_1}{2e} \right) + e \right)^2 \\ &\quad + \left( \frac{T_2 - T_1}{2e} + \frac{P}{\lambda} e \right) \left( \frac{\lambda}{P} \left( \frac{T_2 - T_1}{2e} \right) + e \right) + T_1 \end{aligned} \quad (47)$$

la densité de flux thermique est donnée par la loi de Fourier :

$$q_x = -\lambda \left( \frac{dT}{dx} \right) = P(x - e) - \frac{\lambda}{2e} (T_2 - T_1) \neq \text{cste} \quad (48)$$

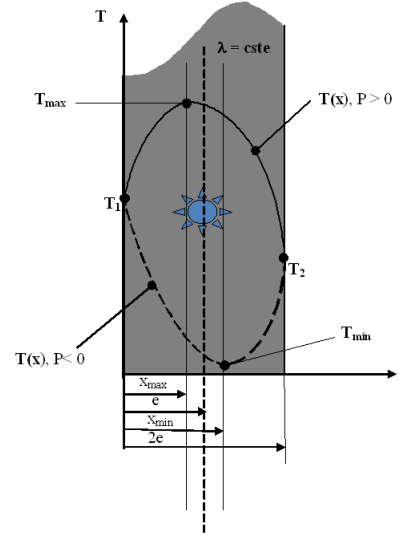


Fig. 7 – Mur à faces isothermes avec source de chaleur

on constate qu'en présence de source interne la densité de flux traversant un mur simple n'est pas constante, elle dépend de  $x$ . On appelle le plan dans lequel la température admet un extremum ( $x_{\max, \min}$  un plan neutre ou adiabatique.

Dans le cas où les températures des surfaces limitatrices sont égales ( $T_1 = T_2 = T_0$ ), alors :

la distribution de température devient :

$$T(x) = \frac{-P}{2\lambda}x^2 + \left(\frac{P}{\lambda}e\right)x + T_1 \quad (49)$$

la densité de flux thermique s'écrit :

$$q_x = P(x - e) \quad / \quad (50)$$

L'extremum et la température correspondante sont :

$$\begin{aligned} x_{\max, \min} &= e \\ T_{\max, \min} &= \frac{P}{2\lambda}e^2 + T_1 \end{aligned} \quad (51)$$

et les valeurs particulières suivantes :

$$\left. \begin{aligned} x &= 0; & q_{x=0} &= -Pe \\ x &= e; & q_{x=e} &= 0 \\ x &= 2e; & q_{x=2e} &= Pe \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

dans ces conditions, le plan adiabatique correspond au milieu du mur et la densité du flux thermique est déterminée exclusivement par les sources internes.