Université Paris Descartes / UFR de Mathématiques et Informatique - L3 MIA

Systèmes de Communication

Epreuve de contrôle continu (1h30) - 9 avril 2009

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. *Les trois parties peuvent être abordées dans l'ordre qui vous conviendra, mais les réponses à chaque partie ne devront pas être dispersées dans la copie. Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.*

1 Questions de cours (5 points)

a) Dans l'algorithme de Viterbi, lorsque plusieurs chemins convergent vers le même noeud du treillis, on ne conserve que celui de métrique cumulée la plus faible. Pourquoi ?

b) Enoncer le théorème de Shannon.

c) L'oreille humaine perçoit des sons de puissance comprise entre 0 et 90 dB. Expliquez pourquoi une quantification des échantillons sonores sur 16 bits (en virgule fixe) suffit. Rappel : le rapport signal à bruit de quantification, en dB, vaut $6k$, où k désigne le nombre de bit par échantillon.

d) Dans le codage d'une trame MPEG-1, on attribue n_i bit par échantillon dans chaque bande i. Quelles contraintes bornent inférieurement et supérieurement les valeurs des n_i ? Quel problème peut survenir ?

e) Quel est le rôle du filtre adapté dans un récepteur ? Quel est son effet collatéral ?

2 Exercices

2.1 Détection de symboles (5 points)

Les symboles utilisés dans les transmissions par modulation de porteuse sinusoïdale peuvent être représentés dans un plan par une constellation caractéristique de la modulation. Les points de la figure 1 correspondent aux symboles d'une modulation d'amplitude de deux porteuses en quadrature à 16 symboles (MAQ-16).

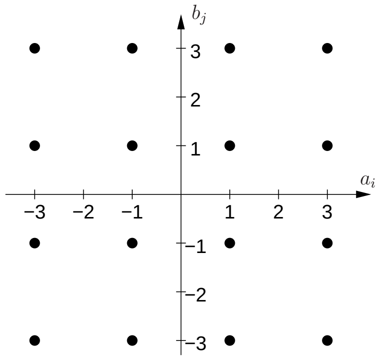

FIG. 1 – Constellation d'une MAQ-16.

Le bruit de la liaison provoque un déplacement aléatoire du point reçu par rapport à la position du symbole émis. Comme le symbole détecté est celui le plus proche du point reçu, une erreur survient dès que le déplacement est trop important. On supppose que lors de l'émission d'un symbole, les seuls risques d'erreur de détection sont liés à une confusion avec un de ses plus proches voisins (des déplacements plus importants sont trop peu probables). Pour l'émission d'un symbole S_i, la probabilité de confusion avec un de ses plus proches voisins S_j est notée :

$$\mathrm{P}(R_j|S_i) = p$$

où R_j désigne l'événement "détection de S_j en réception".

a) Calculer $\mathrm{P}(\overline{R_i}|S_i)$ pour chaque symbole de la constellation. ($\overline{R_i}$ signifie "détection d'un symbole différent de S_i).

b) Définir de manière ensembliste l'événement erreur. Calculer la probabilité d'erreur P_e dans le cas où les symboles sont équiprobables.

2.2 Codage de source (5 points)

Soit une source ternaire sans mémoire X telle que $\mathrm{P}(x_1) = \mathrm{P}(x_2) = p$ et $\mathrm{P}(x_3) = 1 - 2p$, avec $p < 1/3$. Cette source a un débit d'information donné, indépendant du codage, D_I. Ce débit peut s'exprimer : $D_I = H(X)/\overline{T}$, où $H(X)$ désigne l'entropie de X et $\overline{T}$ la durée moyenne d'un symbole.

a) Construire un code de Huffman pour X.

b) Comparer le débit binaire D (en nombre d'éléments binaire par seconde) nécessaire avec ce codage au débit D' que nécessiterait un code de longueur fixe, notamment pour p faible.

2.3 Codage de canal (5 points)

Soit un code en bloc linéaire $\mathcal{C}(5,3)$ défini par la matrice génératrice G suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de contrôle s'écrit donc :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Construire l'ensemble des mots de code. Quelle est la distance minimale de ce code ?

c) On reçoit le mot $r = 10000$. Calculer le syndrôme. Y a-t-il une erreur ? Peut-on la corriger ? Si oui, corrigez-là, si non, expliquez pourquoi.

3 Annexes

Codes correcteurs

Pour un code en bloc linéaire de distance minimale d_{min}, le pouvoir de détection vaut $d_{\text{min}} - 1$ et le pouvoir de correction $\lfloor \frac{d_{\text{min}}-1}{2} \rfloor$.

Probabilités

Soient A et B deux événements.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Règle de Bayes :

$$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)$$

Entropie

L'entropie d'une source X délivrant des symboles x_i, $1 \leq i \leq N$, est définie par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) \log_2(\mathrm{P}(x_i))$$