CHAPITRE 1

SYSTÈMES LINÉAIRES - SYSTÈMES ASSERVIS

1. Les systèmes - Définitions et exemples.

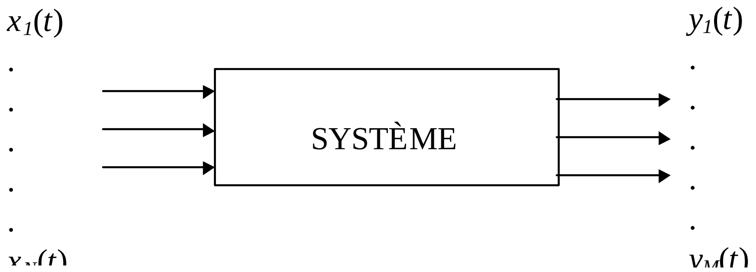
Un **système** peut être défini comme un ensemble d'éléments exerçant collectivement une fonction déterminée. Un système communique avec l'extérieur par l'intermédiaire de grandeurs, fonctions du temps, appelées signaux.

Dans la suite, on essaiera de garder les notations suivantes:

$x_1(t)...x_N(t)$ pour les signaux d'entrée.

$y_1(t)...y_M(t)$ pour les signaux de sortie.

Les signaux de sortie d'un système sont aussi appelés **réponse du système**.



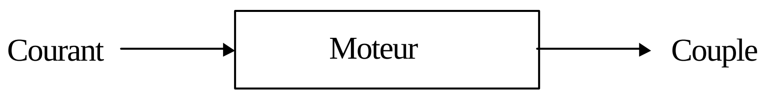
Remarque: en général les signaux d'entrée et de sortie d'un système ne sont pas de même nature. De plus N peut être différent de M.

Les systèmes à une entrée et une sortie (cas où $N = 1$, $M = 1$) sont appelés systèmes univariables ou **systèmes scalaires**.

Exemples:

Chauffage d'une pièce.

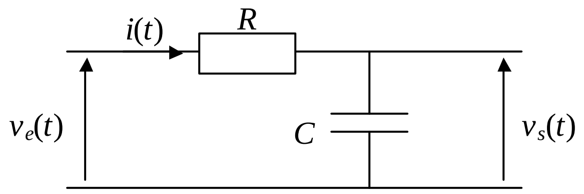
Commande d'un moteur.

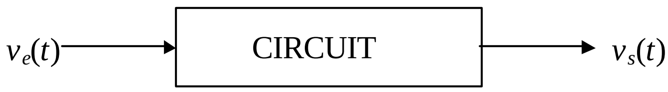


Un système est principalement connu par son action sur le monde extérieur. Lorsqu'on applique certains signaux d'entrée, le système se manifeste en émettant des signaux de sortie particuliers. Le système est donc parfaitement connu quand on peut prédire ces signaux de sortie, c'est-à-dire lorsqu'on connaît les relations entre les x_i et les y_j:

$$y_1(t) = f_1(x_1(t),...,x_N(t))$$
$$...$$
$$y_M(t) = f_M(x_1(t),...,x_N(t))$$

<u>Exemple</u>:
Soit le circuit électrique suivant :





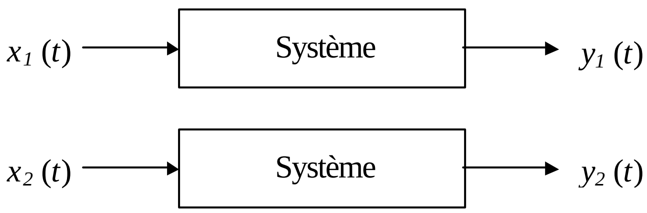
La charge du condensateur étant initialement nulle, on ferme l'interrupteur à t = 0. Pour t > 0, l'équilibre électrique du circuit se traduit par l'équation : $R.i+\frac{1}{C}\int_0^t i.dt = v_e(t)$

avec : $v_s(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i.dt$

on a donc l'équation du système: $RC\frac{dv_s}{dt}+v_s(t)=v_e(t)$

2. Les systèmes linéaires.

Un **système** est dit **linéaire** si la réponse de ce système à une combinaison linéaire de signaux d'entrée est égale à la combinaison linéaire des réponses:

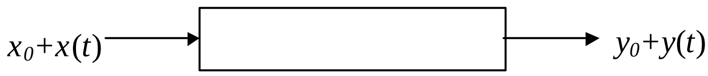


si on applique en entrée $x(t) = u.x_1(t) + v.x_2(t)$

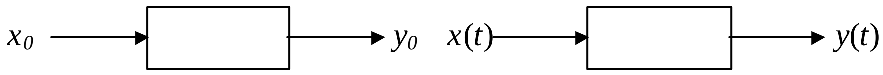
on obtiendra en sortie $y(t) = u.y_1(t) + v.y_2(t)$

Cette propriété des systèmes linéaires est aussi appelée **principe de superposition**.

Dans la plupart des cas on essaie de se ramener à l'étude d'un système linéaire. En effet, le principe de superposition simplifie beaucoup les problèmes: en particulier, on peut distinguer l'étude des conditions initiales d'une part et l'étude du comportement dynamique d'autre part.

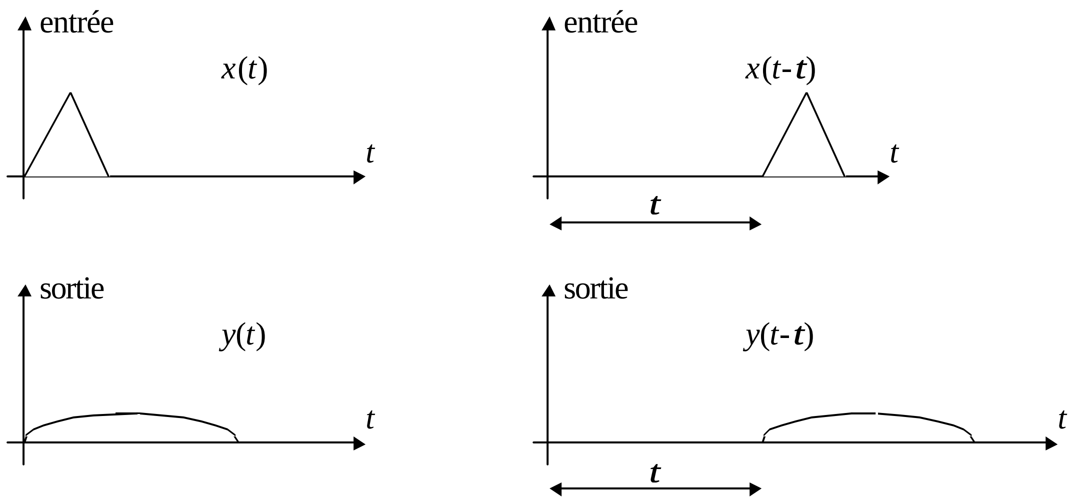


se décompose en :



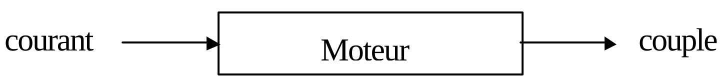
3. Les systèmes invariants.

Un **système** est dit **invariant** si la réponse du système à un signal $x(t)$ différé d'un temps $\boldsymbol{t}$ est la même que la réponse $y(t)$ du système mais différée de $\boldsymbol{t}$.



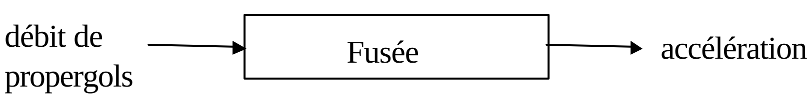
Un système invariant est aussi appelé système à paramètres constants localisés ou à constantes localisées.
Cette propriété des systèmes invariants est aussi appelée principe de permanence.

Exemples:
Moteur.



Si on néglige l'usure, le moteur n'évolue pas dans le temps: le système est invariant.

Fusée.

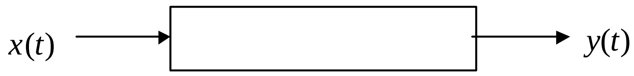


La masse de la fusée diminue au cours de son ascension : pour un même débit de propergols, l'accélération augmente avec le temps : le système est variant.

Remarques:
Dans la suite on s'intéressera surtout aux systèmes invariants.
Un système peut être linéaire et/ou invariant : les deux propriétés sont indépendantes.

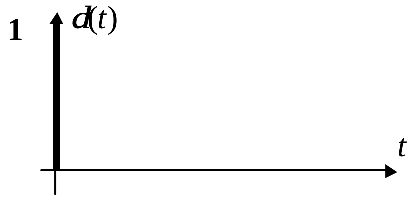
4. Réponses particulières d'un système scalaire.

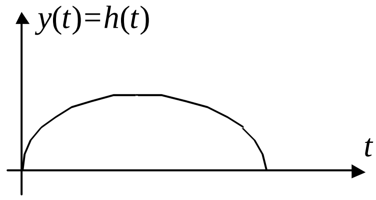
On considère ici un système scalaire, c'est à dire à une entrée et une sortie.



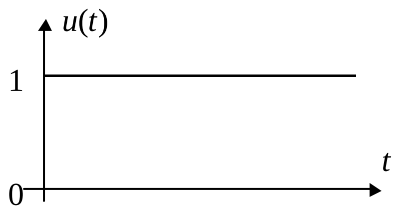
Pour connaître le comportement du système et le comparer à d'autres systèmes, on étudie les réponses à quelques signaux particuliers.

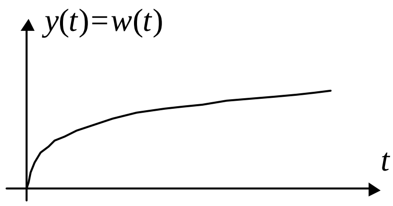
Réponse impulsionnelle.
On appelle réponse impulsionnelle, la réponse notée $h(t)$, obtenue par l'application d'une impulsion de Dirac $\delta(t)$ (voir Annexe 1) à l'entrée du système, celui-ci étant initialement au repos.





Réponse indicielle.
On appelle réponse indicielle, la réponse notée $w(t)$, obtenue par l'application d'un échelon unité $u(t)$ à l'entrée du système, celui-ci étant initialement au repos.





5. Réponse à un signal quelconque : convolution temporelle.

Remarque : l'annexe 1 donne les notions indispensables sur la distribution de Dirac notée $\delta(t)$ pour aborder la notion fondamentale de convolution temporelle.

5.1 Définition de la convolution temporelle

On considère un système scalaire linéaire invariant de réponse impulsionnelle $h(t)$.

Pour un **système scalaire, linéaire et invariant**, initialement au repos, la réponse $y(t)$ à un signal d'entrée quelconque $x(t)$ est donnée par le produit de convolution entre $x(t)$ et la réponse impulsionnelle du système :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(v).\,h(t-v).\,dv = x(t) * h(t)$$

Cette expression est fondamentale. Elle permet, connaissant le système par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ et l'entrée $x(t)$, de déterminer $y(t)$. Elle peut donc remplacer totalement l'équation différentielle régissant le système.
Cette expression se note de façon condensée $y(t) = x(t) * h(t)$. $*$ est l'opérateur de convolution ; $y(t)$ est la convolution du signal d'entrée avec la réponse impulsionnelle du système.
<u>Remarques</u>:

- Le produit de convolution est commutatif: $y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
- L'impulsion de Dirac et la réponse impulsionnelle (si x et y ont même dimension) sont homogènes à l'inverse d'un temps. Ce sont des éléments mathématiques qui permettent de formaliser les comportements des systèmes mais qui n'ont pas de réalité physique.

Si l'impulsion de Dirac est appliquée à l'instant zéro, la réponse impulsionnelle est forcément nulle pour $t < \nu$ car $h(t-\nu) = 0$, le système étant supposé causal (cas des systèmes physiquement réalisables). De plus, si le signal est lui-même causal (appliqué au temps t=0), alors $x(v) = 0$ si $v < 0$. Les bornes de l'intégrale de convolution se simplifient et le produit de convolution s'écrit :

$$y(t) = \int_0^t x(v).\,h(t-v).dv$$

<u>Exemple</u>: calcul de la réponse indicielle d'un circuit RC à partir de sa réponse impulsionnelle.

La réponse impulsionnelle d'un circuit RC s'écrit (voir TD): $h(t) = \dfrac{1}{\tau}.\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$, avec $\tau = RC$.

On se propose d'utiliser la convolution pour déterminer la réponse indicielle $w(t)$ du circuit RC à un échelon d'amplitude E à partir de sa réponse impulsionnelle $h(t)$.

$$w(t) = h(t) * E.u(t) = \int_0^t h(t-v).E.u(v).dv = E.\int_0^t h(t-v).dv$$

soit:
$$w(t) = E.\int_0^t \frac{1}{\tau}.\exp\left(-\frac{t-v}{\tau}\right).dv = \frac{E}{\tau}.\left[\tau.\exp\left(-\frac{t-v}{\tau}\right)\right]_0^t = E.\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

5.2 Quelques significations physiques de la convolution: appareil de mesure

a. Signal vrai et signal observé

Un appareil de mesure (oscilloscope, analyseur de spectre, ...) peut être décrit par l'opération de convolution $y(t) = x(t) * h(t)$. $x(t)$ est le signal vrai à mesurer, $y(t)$ est le signal effectivement mesuré (ou observé) à l'aide de l'appareil, $h(t)$ est la réponse impulsionnelle de l'appareil. Pour que le signal mesuré corresponde rigoureusement au signal vrai, il faudrait que la réponse impulsionnelle de l'appareil soit une impulsion de Dirac. Cela revient à dire que l'appareil devrait être parfait, c'est-à-dire posséder un temps de réponse infiniment court (ou une bande passante infinie). Dans ce cas, l'appareil est transparent puisqu'il n'intervient pas dans le signal observé qui correspond au signal réel.
En réalité, un appareil, quel qu'il soit, possède toujours un temps de réponse non nul (et donc une bande passante non infinie - voir oscilloscopes utilisés en TP « Bande Passante=20MHz »). Le signal observé est donc toujours une image *plus ou moins* modifiée du signal réel. Le *plus ou moins* dépend de la bande passante de l'appareil vis à vis du spectre du signal à mesurer. Si on mesure par exemple un signal sinusoïdal de fréquence 100KHz avec un oscilloscope possédant une bande passante égale à 20MHz, l'oscilloscope pourra être considéré comme parfait. Par contre si le signal sinusoïdal possède une fréquence égale à 100MHz, il faudra tenir compte de la réponse impulsionnelle de l'oscilloscope.

b. Pouvoir séparateur des appareils: résolution temporelle

La réponse impulsionnelle des appareils de mesure réels peut être considérée plus ou moins courte selon les constantes de temps régissant les phénomènes observés (voir TD). Dans tous les cas sa durée est non nulle. Ceci se traduit par un étalement temporel plus ou moins significatif du signal mesuré. Ainsi, si deux impulsions à mesurer sont trop rapprochées dans le temps, leur étalement dans le temps fera que l'on ne pourra plus les séparer lors de la mesure, la **résolution temporelle** de l'appareil étant insuffisante. La résolution temporelle d'un appareil de mesure, directement liée à sa réponse impulsionnelle, est donc la distance minimale séparant deux impulsions successives permettant de les distinguer lors de la mesure. Cette notion de résolution temporelle est générale en physique pour tous les appareils de mesure, aussi bien en optique qu'en électronique rapide (impulsions de largeur inférieure à 1ns=10^{-9} secondes).

6. Les systèmes asservis

L'étude des systèmes est destinée à commander au mieux les différents processus rencontrés. Il existe deux solutions pour commander un système :

6.1 Commande en boucle ouverte

Dans ce cas, la commande est envoyée en entrée sans contrôle sur les sorties.

<u>Exemple</u>: rhéostat → [résistance chauffante] → four

Pour utiliser ce type de commande, il est nécessaire de connaître le système et les réponses aux commandes envoyées. Malgré tout, de multiples perturbations peuvent modifier l'action de ces commandes: si la porte du four reste ouverte, les graduations du rhéostat ne correspondent plus à la température intérieure.

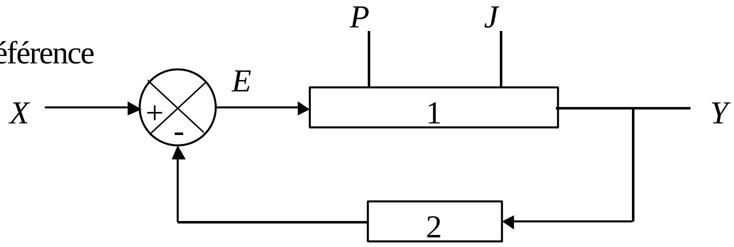
6.2 Commande en boucle fermée

Pour améliorer les performances d'une commande, il est indispensable d'observer les sorties du système pour les comparer à ce que l'on désire obtenir. Dans ce deuxième type de commande, les sorties du système sont contrôlées. C'est à ce niveau que l'on rencontre la notion de système asservi.

> Un système asservi est un système dont le rôle consiste essentiellement à établir une correspondance définie entre une ou plusieurs grandeurs d'entrée, de faibles niveaux énergétiques, et une ou plusieurs grandeurs de sortie de niveaux énergétiques plus élevés.
> Un système asservi est caractérisé par la présence de:
> <u>- chaînes directes</u>
> Elles comprennent des éléments amplificateurs et éventuellement, des convertisseurs de puissance, en liaison avec les sources d'énergie.
> <u>- Chaînes de retour</u>
> Elles sont constituées d'éléments de précision généralement passifs. Ce ne sont pas des chaînes de puissance ; elles transmettent à l'entrée des informations sur les grandeurs de sortie. Ces informations sont comparées aux signaux d'entrée au moyen de comparateurs. Ces derniers élaborent les différences ou écarts entre les signaux d'entrée et les informations images des signaux de sortie.

Structure d'un système asservi:

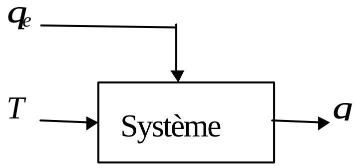
X: signal d'entrée ou *consigne* ou signal de référence
Y: signal de sortie
E: écart ;
P: perturbation
J: source d'énergie



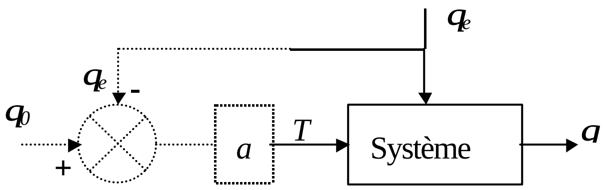
1: chaîne directe (amplificateurs, correcteurs, organes de conversion)
2: chaîne de retour (éléments de précision, capteurs, instruments de mesure)

Remarque: le contrôle des sorties d'un système semble être un moyen idéal pour établir des commandes parfaites. Il ne faut cependant pas oublier que tout système physique comporte des temps de réponse. Des retours anarchiques installés sans étude préalable peuvent conduire à des instabilités et parfois à la destruction du système.
Pour déterminer les retours adéquats pour un système donné et une commande donnée, l'automaticien doit, dans un premier temps, établir un modèle mathématique du système. alors seulement, il pourra effectuer des calculs de commande.

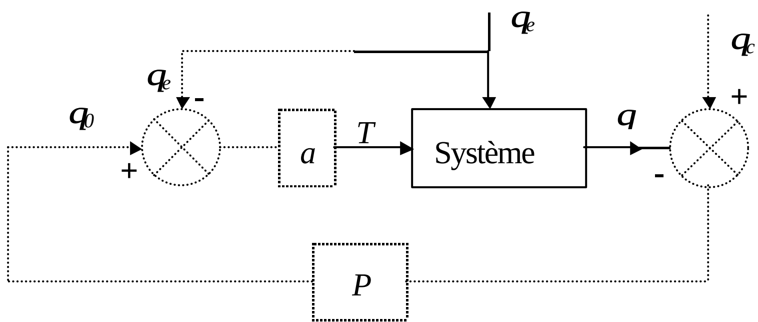
Exemple: Chauffage d'un immeuble



a)



b)



c)

Figure 1.1.

La figure 1.1 a) représente le système. La température θ à l'intérieur de l'immeuble est fonction de la température T de l'eau chaude envoyée dans les radiateurs et de la température extérieure θ_e. Nous représentons cette description, volontairement simplifiée, par une boîte munie d'une sortie θ, d'une entrée de commande T à la disposition de l'opérateur et d'une perturbation θ_e.
Le rayonnement solaire dans l'immeuble, le vent ou d'autres grandeurs agissent aussi sur la température θ. C'est volontairement que ces grandeurs ne sont pas prises en compte par notre modèle qui doit, avant tout, être simple. C'est l'utilisateur qui règle T, en vue d'obtenir θ=19°C (en régime permanent). Il sait, par *expérience*, qu'il obtient un bon résultat en réglant T, par exemple, à 45°C. Il sait aussi que si la température extérieure θ_e diminue, il devra revenir régler T qu'il augmentera d'autant plus que θ_e aura diminué.
La figure 1.1 b) représente alors une première tentative de réglage automatique de T, tel que $T = a(\theta_0 - \theta_e)$. Dans cette configuration, l'opérateur n'aura plus besoin de retoucher T en fonction de la température extérieure. En effet, T va varier *automatiquement* en sens inverse de θ_e.
Quand $\theta_e=\theta_0$, on a T=0, ce qui signifie qu'on doit, bien entendu, couper le chauffage. Cette commande en boucle ouverte donne de bons résultats car la température θ_e est mesurable par une sonde extérieure, θ_0 est donc une référence, réglable par l'opérateur de même que (-a), la pente de la droite de réglage (figure 1.2).

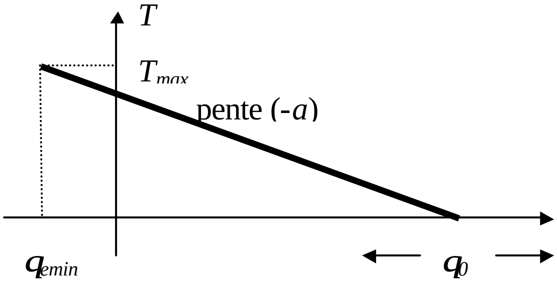


Figure 1.2.

Le chauffagiste procédera à des essais pour adapter la chaufferie aux caractéristiques particulières de l'immeuble à chauffer en vue de définir les paramètres θ_0 et a.
La figure 1.1 c) représente une amélioration du réglage automatique de T. Supposons que par temps froid le soleil pénètre à l'intérieur de l'immeuble. La température intérieure θ va s'élever sans pour autant que la température T de l'eau des radiateurs ne soit réduite puisqu'elle ne dépend que de θ_e. Il se produira alors une surchauffe et un opérateur devrait venir pour modifier T, c'est à dire pour diminuer θ_0. Il est clair que cette opération peut s'effectuer de façon automatique en rendant θ_0 dépendant de la température θ effectivement atteinte dans l'immeuble. Pour cela, θ est comparée à une consigne θ_c, réglable par l'utilisateur, à l'aide d'une boucle d'asservissement. La grandeur θ_0 peut alors suivre une loi très simple, par exemple $\theta_0=P(\theta_c-\theta)$, qui assure les variations de θ_0 dans le bon sens. Le système fonctionne ainsi en boucle fermée.