CHAPITRE 2

MISE EN ÉQUATION D'UN SYSTÈME LINÉAIRE SCALAIRE

La mise en équation, au départ de l'analyse d'un système, est une opération extrêmement délicate, qui peut compromettre l'ensemble de l'étude de manière définitive. Cette opération demande beaucoup de connaissances physiques mais aussi d'expérience de "terrain". Avec une vue générale des systèmes et par analogie avec les systèmes électriques, on peut établir ces équations indispensables.

Dans la suite, nous nous intéresserons aux systèmes scalaires, c'est à dire à une entrée et une sortie, linéaires.

1. Notion de modèle - Mise en équation.

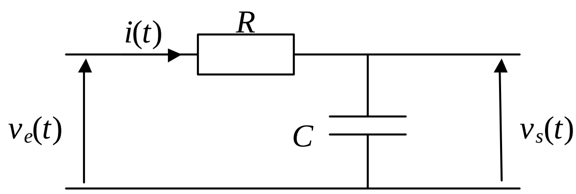
On appelle modèle d'un processus ou système monovariable la loi qui relie l'entrée x (cause) à la sortie y (effet).
L'idéal, pour appréhender l'étude d'un système, est de détailler pas à pas l'ensemble de ses éléments constitutifs. Mais cette méthode, la seule au stade de la conception d'un système automatisé, n'est pas praticable en général sur un système existant, de structure complexe ou mal connue.
Nous supposerons que l'on peut définir a priori une loi simple qui lie y à x. Les paramètres (en général peu nombreux) de la loi sont alors déterminés par des essais effectués sur le système, c'est la phase d'*identification* ou *modélisation*.

Soit un système linéaire et scalaire. Le comportement d'un tel système est régi par une équation différentielle, ayant pour forme:

$$b_n.\frac{d^n y}{dt^n}+...+b_1.\frac{dy}{dt}+b_0.y = a_m.\frac{d^m x}{dt^m}+...+a_1.\frac{dx}{dt}+a_0.x$$

<u>Remarque</u>:
Si le système est variant, les coefficients a_i et b_j de l'équation sont dépendants du temps: $a_i(t)$, $b_j(t)$.
La mise en équation d'un système scalaire, linéaire et invariant consiste donc à déterminer les paramètres constants de l'équation qui lient l'entrée et la sortie.

<u>Exemple</u>:



On a: $v_s = \frac{1}{C}\int i dt$ donc $i = C.\frac{dv_s}{dt}$

Avec: $v_e = R.i + v_s$ d'où $v_e = R.C.\frac{dv_s}{dt} + v_s$

Par identification : $b_0 = 1; b_1 =$ RC et $a_0 = 1$.

2. Transformée de Laplace.

L'étude des systèmes s'accompagne inévitablement de la manipulation d'équations différentielles. Or les opérations liées à cette manipulation sont souvent délicates et la résolution des équations n'est pas toujours simple. Pour faciliter les calculs, on utilise un outil mathématique puissant: la transformée de Laplace.

2.1 Formulation mathématique.

Transformée de Laplace.
Soit $f(t)$ une fonction réelle de la variable réelle t, définie pour toute valeur de t, sauf éventuellement pour certaines valeurs, en nombre fini dans tout intervalle fini, et nulle pour $t<0$.

La transformée Laplace de $f(t)$ est définie par l'égalité: $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}.f(t).dt$

p étant une variable complexe.
On note $F(p) = \mathrm{LP}[f(t)]$ et $f(t) = \mathrm{LP}^{-1}[F(p)]$.
On dit que $F(p)$ est la transformée de $f(t)$ et que $f(t)$ est l'original de $F(p)$.

Pour résoudre les équations différentielles grâce à la transformée de Laplace, il est nécessaire de savoir effectuer le passage de $f(t)$ à $F(p)$ mais aussi de $F(p)$ à $f(t)$:

Théorème : **formule d'inversion**.
Soit $f(t)$ une fonction réelle de la variable t, de classe C^2 par morceaux (c'est à dire continue et pourvue d'une dérivée première et seconde continues, sauf éventuellement pour certaines valeurs, en nombre fini), telle que - $f(t) = 0$ pour $t<0$
- il existe σ tel que

$\int_0^\infty e^{-pt}.|f(t)|.dt$ et $\int_0^\infty e^{-st}.F(p).dp$ sont convergentes.

alors pour toutes valeurs de t on a: $\frac{1}{2}\left[f(t+0) + f(t-0)\right] = \frac{1}{2ip}\int_\Gamma e^{tp}.F(p).dp$

o ù G est la droite d'équation $x = s$.

Pour information, le calcul de cette dernière intégrale est effectué avec la méthode des résidus qui sera abordée en second cycle.

2.2 Propriétés et théorèmes.

Les propriétés de la Transformée de Laplace sont réunies dans le tableau ci-après.

Propriété	Originale	Transformée de Laplace
	$f(t)$	$F(p)$
Linéarité	$a.f_1(t)+b.f_2(t)$	$aF_1(p)+b.F_2(p)$
Dérivation	$f'(t)$	$p.F(p)-f(0^+)$
Dérivation d'ordre n	$f^{n}(t)$ $(n>0)$	$p^n.F(p)-p^{n-1}.f(0^+)- \ldots -p.f^{(n-2)}(0^+)$ $-f^{(n-1)}(0^+)$
Intégration	$\int f(t).dt$	$\dfrac{F(p)}{p}$
Retard	$f(t-\theta)$	$e^{-\theta p}.F(p)$
Changement d'échelle	$f(a.t)$	$\dfrac{1}{a}.F\left(\dfrac{p}{a}\right)$

A ces propriétés, on doit joindre les théorèmes suivants:

Théorème de la valeur finale: $\lim\limits_{p\to 0} p.F(p)=\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$

Théorème de la valeur initiale: $\lim\limits_{p\to\infty} p.F(p)=\lim\limits_{t\to 0} f(t)$

Théorème de Borel:
Si $f(t)$ et $g(t)$ ont respectivement pour transformée de Laplace $F(p)$ et $G(p)$, alors $h(t) = f(t) * g(t)$ a pour transformée: $H(p) = F(p).G(p)$.

Théorème du développement de Heaviside:
Pour trouver l'originale d'une fraction rationnelle $F(p)/G(p)$, où le degré de $F(p)$ est inférieur au degré de $G(p)$, on la décompose en éléments simples de première espèce, et l'on applique la formule:

$$LP\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{at}\right]=\frac{1}{(p-a)^k}$$

2.3 Table des transformées de Laplace.

Il est souvent plus simple de calculer la Transformée de Laplace d'une fonction à partir de la transformée connue d'une autre fonction en utilisant les propriétés et théorèmes énoncés au §2.2. A partir de quelques résultats de base, on peut ainsi retrouver rapidement les Transformées de Laplace de la plupart des fonctions utilisées en électronique ou en automatique dans les asservissements. Afin d'éviter le calcul systématique de ces fonctions de base, on les regroupe dans des tables de Transformées de Laplace. Une table résumée des Transformées de Laplace les plus usuelles en électronique est donnée à l'Annexe 2.

3. Fonction de transfert.

Soit un système scalaire, linéaire, invariant régi par l'équation différentielle :

$$a_n.\frac{d^n x}{dt^n}+...+a_1.\frac{dx}{dt}+a_0.x = b_m.\frac{d^m y}{dt^m}+...+b_1.\frac{dy}{dt}+b_0.y$$

La transformation de Laplace appliquée à cette équation conduit à la nouvelle relation :

$$a_n[p^n.X(p) - p^{n-1}.x(0^+) - ... - p.x^{(n-2)}(0^+) - x^{(n-1)}(0^+)] + ... + a_1[p.X(p) - x(0^+)] + a_0.X(p) =$$

$$b_m[p^m.Y(p) - p^{m-1}.y(0^+) - ... - p.y^{(m-2)}(0^+) - y^{(m-1)}(0^+)] + ... + b_1[p.Y(p) - y(0^+)] + b_0.Y(p)$$

Cette relation peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$[a_n.p^n + ... + a_1.p + a_0]X(p) - [a_n.p^{n-1} + ... + a_1]x(0^+) -...- [a_n.p + a_{n-1}]x^{(n-2)}(0^+) - a_n.x^{(n-1)}(0^+) =$$

$$[b_m.p^m + ... + b_1.p + b_0]Y(p) - [b_m.p^{m-1} + ... + b_1]y(0^+) - ... - [b_m.p + b_{m-1}]y^{(m-2)}(0^+) - b_m.y^{(m-1)}(0^+)$$

Dans le cas où toutes *les conditions initiales sont nulles* ou considérées comme telles à la suite d'un changement de variable (cas le plus fréquent), cette dernière relation se simplifie:

$$\left[a_n p^n + ...+ a_0\right]X(p) = \left[b_m p^m + ...+ b_0\right]Y(p)$$

On aboutit finalement au résultat: $\dfrac{Y(p)}{X(p)} = \dfrac{a_n p^n + ... + a_0}{b_m p^m + ...+ b_0}$

Fonction de transfert.
La fonction en p, obtenue en formant le rapport $Y(p)$ sur $X(p)$ lorsque le système est initialement au repos, est appelée fonction de transfert du système. On la note généralement $H(p)$: $H(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)}$

On a vu précédemment que la réponse d'un système scalaire, linéaire, invariant à un signal quelconque $x(t)$ est donnée par: $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau).d\tau = x(t) * h(t)$ où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système.

En appliquant la transformée de Laplace à cette dernière relation (théorème de Borel, voir TD sur Laplace), on obtient :

$$Y(p) = X(p).LP[h(t)]$$

En comparant cette égalité avec la définition de la fonction de transfert du système on constate que:

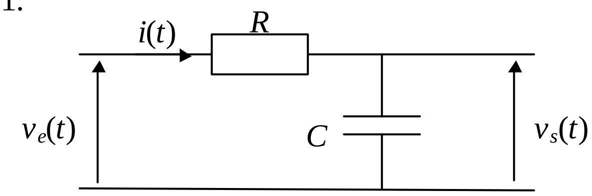
$$H(p) = LP[h(t)]$$

La fonction de transfert $H(p)$ d'un système scalaire, linéaire et invariant, est égale à la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle $h(t)$ de ce système:

$$H(p) = LP[h(t)]$$

Remarque: $H(p)$ ne dépend que des coefficients physiques du système.

Exemple: on reprend l'exemple du §1:



On a: $v_e = RC\dfrac{dv_s}{dt} + v_s$

On applique la transformée de Laplace: $V_e(p) = RC\left[pV_s(p) - v_s(0^+)\right] + V_s(p)$

Si les conditions initiales sont nulles $v_s(0^+) = 0$, on obtient: $V_e(p) = (1 + RCp)V_s(p)$

D'oùla fonction de transfert de ce système: $H(p) = \dfrac{V_s(p)}{V_e(p)} = \dfrac{1}{1 + RCp}$

4. Diagramme fonctionnel.

Un système complexe peut comporter plusieurs sous systèmes. Pour manipuler les équations de l'ensemble du processus, sans lourdeur, on utilise une représentation schématique adaptée: la méthode des diagrammes fonctionnels.

Diagramme fonctionnel.
Le diagramme fonctionnel d'un système scalaire, dont la fonction de transfert est $H(p)$, est défini par:

$$X(p) \longrightarrow \boxed{H(p)} \longrightarrow Y(p)$$

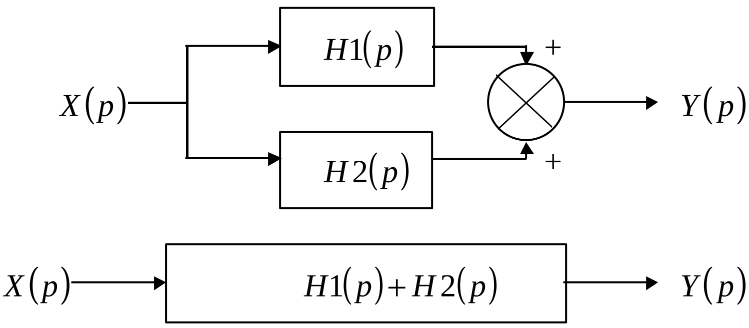
Les calculs dans l'espace de Laplace étant simples, on garde pour les diagrammes fonctionnels l'expression des transformées de Laplace. Les règles de manipulation de ces diagrammes sont alors presque évidentes:

Mise en série:
Soit un système formé par la mise en série de deux sous systèmes de fonction de transfert *H1* et *H2*. La fonction de transfert de l'ensemble est *H = H1.H2*.

$$X(p) \longrightarrow \boxed{H1(p)} \xrightarrow{Y(p)} \boxed{H2(p)} \longrightarrow Z(p)$$

$$X(p) \longrightarrow \boxed{H1(p).H2(p)} \longrightarrow Z(p)$$

Mise en parallèle:
Soit un système formé par la mise en parallèle de deux sous systèmes de fonction de transfert *H1* et *H2*. La fonction de transfert de l'ensemble est $H = H1 + H2$.



5. Relations fondamentales en électricité et en mécanique.

5.1 Relations fondamentales en électricité.

a. Notations

- différence de potentiel (Volts) : e
- courant (Ampères) : i
- résistance (Ohms) : R
- capacité d'un condensateur (Farads) : C
- self (Henry) : L
- Énergie électrique (Joules) : E_E
- Énergie magnétique (Joules) : E_M

b. Relations fondamentales

- tension aux bornes d'une résistance : $e = R.i$ (1)
- tension aux bornes d'une inductance : $e = L.\frac{di}{dt}$ (2)
- tension aux bornes d'un condensateur : $i = C.\frac{de}{dt}$ (3)
- Énergie électrique : $E_E = \frac{1}{2}.C.e^2$ (4)
- Énergie magnétique : $E_M = \frac{1}{2}.L.i^2$ (5)

5.2 Systèmes mécaniques en translation.

a. Lois fondamentales

- **Loi fondamentale de la dynamique :** l'accélération d'un mobile dans une direction est proportionnelle à la résultante des forces appliquées au mobile dans cette direction :

$$m.\frac{dV}{dt}.\vec{u} = \vec{F}_x \qquad (6)$$

où $\vec{F}_x$ représente la somme des projections des forces appliquées au mobile sur la direction $\vec{u}$ considérée. m est la masse d'inertie du mobile (kg).

- **Énergie cinétique** d'un corps en translation : pour amener un corps immobile de masse m à la vitesse V, il faut fournir une énergie cinétique E_c. Celle-ci correspond au travail de la force $\vec{F}_x$ qui accélère le corps. Le travail W fourni par cette force s'écrit :

$$W = E_c = \int dW = \int F.V.dt = \int m.\frac{dV}{dt}.V.dt = \int m.V.dV = \frac{1}{2}.m.V^2 \qquad (7)$$

b. Les différents types de forces et énergies

- **Force de rappel élastique :** c'est la force qu'exerce un ressort lorsqu'on l'écarte de sa position de repos. Cette force est proportionnelle à l'écart x par rapport à cette position de repos : $\vec{F} = -k.x.\vec{u}$
- **Énergie potentielle d'élasticité :** travail de la force nécessaire pour amener le ressort de sa position de repos à sa nouvelle position :

$$W = E_p = \int dW = \int k.x.dx = \int d\left(\frac{1}{2}.k.x^2\right) = \frac{1}{2}.k.x^2 \qquad (8)$$

- **Force de frottement visqueux :** c'est la force qu'exerce un amortisseur lorsqu'on le comprime ou lorsqu'on l'étire :

$$\vec{F} = -f.\vec{V} = -f.\frac{dx}{dt}.\vec{u} \qquad (9)$$

f est le coefficient de frottement visqueux ($N.s.m^{-1}$).

5.3 Systèmes mécaniques en rotation.

a. Lois fondamentales

- **Loi fondamentale de la dynamique:** l'accélération angulaire d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est proportionnelle au moment résultant par rapport à cet axe de toutes les forces extérieures appliquées au solide. Cette loi s'écrit (en intensité):

$$J.\frac{d^2\alpha}{dt^2} = J.\frac{d\Omega}{dt} = M \qquad (10)$$

où α représente l'angle de rotation (rd), Ω la vitesse de rotation ($rd.s^{-1}$), J le moment d'inertie ($kg.m^2$) et M le moment résultant de toutes les forces par rapport à l'axe de rotation (m.N).

- **Énergie cinétique de rotation:**

$$W = E_c = \int dW = \int M.d\alpha = \int M.\Omega.dt = \int J.\Omega.d\Omega = \int d\left(\frac{1}{2}.J.\Omega^2\right) = \frac{1}{2}.J.\Omega^2 \qquad (11)$$

b. Les différents types de moments et énergies

- **Moment de rappel élastique :** c'est le moment qu'exerce un ressort enroulé autour de l'axe lorsqu'on l'écarte d'un angle α de sa position de repos. Son intensité s'écrit :
$$M = -k.\alpha$$
où k est la constante de raideur du ressort.
- **Énergie potentielle d'élasticité :** travail de la force nécessaire pour amener le ressort de sa position de repos à sa nouvelle position :
$$W = E_p = \int dW = \int M.d\alpha = \int k.\alpha.d\alpha = \int d\left(\frac{1}{2}.k.\alpha^2\right) = \frac{1}{2}.k.\alpha^2 \qquad (12)$$
- **Moment de frottement visqueux :** c'est un moment dont l'intensité est proportionnelle à la vitesse de rotation. Il s'écrit :
$$M = Rf.\Omega = Rf.\frac{d\alpha}{dt}$$
où f est le coefficient de frottement visqueux ($N.s.m^{-1}$) et R est le rayon du système en rotation.