CHAPITRE 6

SYSTÈMES DU SECOND ORDRE

1. Équation différentielle – Fonction de transfert.

On appelle système du second ordre, un système régi par une équation différentielle du type :

$$\frac{1}{w_n^2}.\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2.x}{w_n}.\frac{dy}{dt}+y=K.x$$

avec: $\left(\frac{2.x}{w_n}\right)^2-\frac{4}{w_n^2}<0$

ce qui donne $|x|<1$ (le système ne peut pas se décomposer en deux systèmes du premier ordre en série).

w_n est appelée pulsation libre ou pulsation naturelle ou **pulsation propre** du système **non amorti**.
w_n se mesure en rad/s.
x est appelé **amortissement** du système ou facteur d'amortissement.
K est le **gain statique** du système (gain en régime permanent).

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation, on obtient :

$$\frac{1}{w_n^2}.p^2.Y(p)-\left(\frac{1}{w_n^2}.p.y(0^+)+\frac{1}{w_n^2}.y'(0^+)\right)+\frac{2.x}{w_n}.p.Y(p)-\frac{2.x}{w_n}.y(0^+)+Y(p)=K.X(p)$$

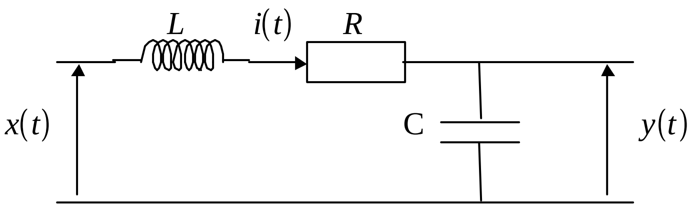
Lorsque les conditions initiales sont nulles : $\left(\frac{1}{w_n^2}.p^2+\frac{2.x}{w_n}.p+1\right).Y(p)=K.X(p)$

La fonction de transfert du système est alors :

$$H(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{K.w_n^2}{w_n^2+2.x.w_n p+p^2}=\frac{K}{1+\frac{2.x}{w_n}p+\left(\frac{p}{w_n}\right)^2}$$

Cette fonction de transfert possède un pôle complexe conjugué: $\left(-x\pm j.\sqrt{1-x^2}\right).w_n$

Exemple :



Pour des conditions initiales nulles, on a : $L.\frac{di}{dt}+R.i+\frac{1}{C}\int_0^t i.dt=x$ et $y=\frac{1}{C}.\int_0^t i.dt$

d'où : $$L.C.\frac{d^2y}{dt^2}+R.C.\frac{dy}{dt}+y=x$$

et : $$H(p)=\frac{1}{L.C.p^2+R.C.p+1}$$

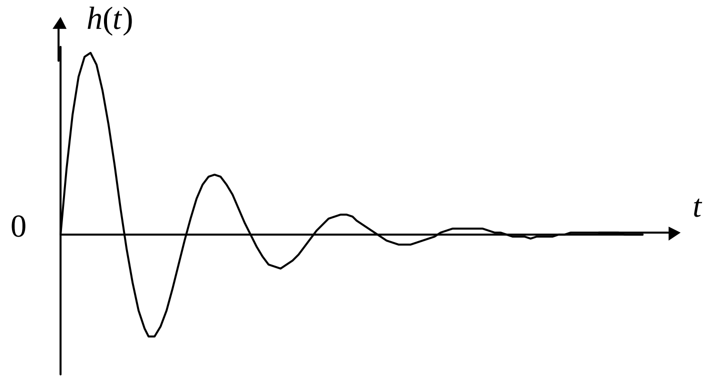
avec : $$\omega_n^2=\frac{1}{L.C} \quad \text{et} \quad \xi=\frac{1}{2}.R.C.\omega_n$$

2. Réponse impulsionnelle.

La réponse impulsionnelle du système est donnée par : $h(t)$ = LP^{-1}[$H(p)$]

d'où : $$h(t)=\frac{K.\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}.e^{-\xi\omega_n t}.Sin\left[\omega_n.\sqrt{1-\xi^2}.t\right]$$

On constate d'après cette expression, que le système est stable, si $\xi.\omega_n>0$. C'est à dire si les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle négative. ω_n étant positive, le système est stable pour $\xi>0$.
Si le système est stable, $h(t)$ est une sinusoï de amortie :



$\omega_p=\omega_n.\sqrt{1-\xi^2}$ est appelée **pulsation propre** ou pseudo pulsation du système.

3. Réponse indicielle.

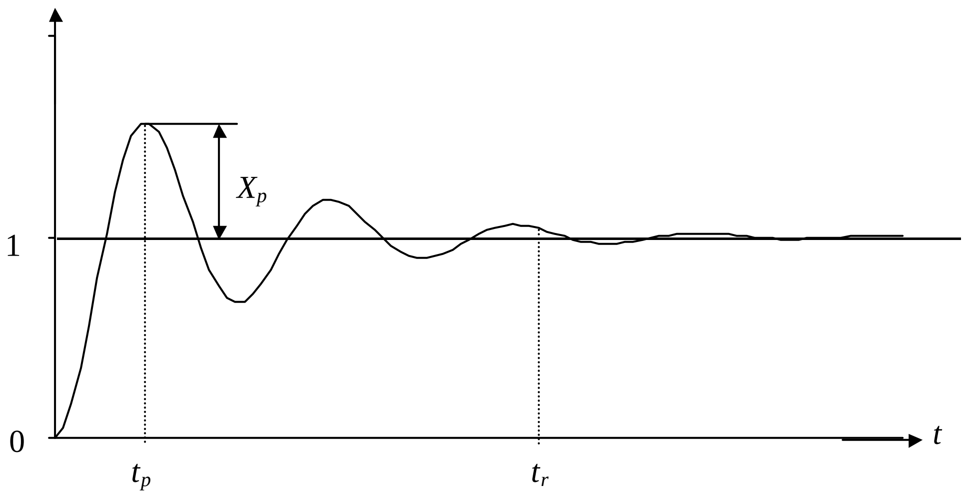
Cette réponse est obtenue pour $x(t)=u(t)$ soit $X(p)=1/p$.

On a donc : $w(t)$ = LP^{-1}[$H(p)/p$]

On démontre alors que : $$w(t)=K\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}.e^{-\xi\omega_n t}.Sin\left[\omega_n.\sqrt{1-\xi^2}.t+\theta\right]\right]$$

avec : $$tg(\theta)=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

Pour un système ayant un gain statique de 1 ; $K=1$:



Lorsque le système est stable, (x >0), la réponse du système est sinusoï de amortie autour de la valeur finale qui est égale à K fois la valeur de l'échelon. (Sauf pour le cas critique, où x =1: la réponse est alors apériodique.)
La pente à l'origine est égale à 0.

Le temps de réponse à 2% est à peu près égal à $\dfrac{4}{x.w_n}$.

Pour les systèmes du deuxième ordre, on définit:

Instant de premier dépassement :
On appelle instant de premier dépassement, l'instant où la sortie atteint son premier maximum. On le note $\boldsymbol{t_p}$.
Amplitude du premier dépassement:
On appelle amplitude de premier dépassement, l'amplitude du premier maximum sur la valeur finale de la sortie. On note cette valeur $\boldsymbol{X_p}$.

Calcul de t_p :

A t_p, on a $w'(t)=0$ car $w(t)$ est maximum. Or, on a :

$$w'(t) = -K.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.e^{-xw_nt}.w_n.\left[-x.Sin\left[w_n.\sqrt{1-x^2}.t+q\right]+\sqrt{1-x^2}.Cos\left[w_n.\sqrt{1-x^2}.t+q\right]\right]$$

donc $w'(t)=0$ équivaut à : $\sqrt{1-x^2}.Cos\left[w_n.\sqrt{1-x^2}.t+q\right]=x.Sin\left[w_n.\sqrt{1-x^2}.t+q\right]$

on a : $tg(q)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ et $x^2+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2=1$

donc, par identification : $x=Cos(q)$ et $\sqrt{1-x^2}=Sin(q)$

l'égalité précédente devient donc: $Sin(q).Cos\left[w_n.\sqrt{1-x^2}.t+q\right]=Cos(q).Sin\left[w_n.\sqrt{1-x^2}.t+q\right]$

soit : $Sin\left[q-\left(w_n.\sqrt{1-x^2}.t+q\right)\right]=0$ d'où $Sin\left[w_n.\sqrt{1-x^2}.t\right]=0$

Finalement on a $w'(t)=0$ pour :

$$w_n.\sqrt{1-x^2}.t = 0 \quad \text{pente nulle à l'origine.}$$
$$w_n.\sqrt{1-x^2}.t = k.p \quad \text{avec } k \text{ entier.}$$

$$\boxed{\text{l'instant de premier dépassement est obtenu pour } k = 1 : t_p = \frac{p}{w_n.\sqrt{1-x^2}}}$$

à cet instant on a : $W_p = W(t_p) = K\left(1 + e^{-p/tg(q)}\right)$

d'où :

$$\boxed{X_p = K.e^{-p/tg(q)}}$$

<u>Remarque</u> :

A partir du relevé de la réponse indicielle, on peut retrouver par identification l'équation d'un système du deuxième ordre : $x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{p^2}{ln^2 X_p / K}}}$ et $w_n = \dfrac{p}{t_p.\sqrt{1-x^2}}$

4. Réponse à une rampe.

Cette réponse est obtenue pour $x(t) = a.t.u(t)$.

On a $X(p) = a/p^2$, et: $y(t) = K.a.\left[t - \dfrac{2.x}{w_n} + \dfrac{1}{w_n.\sqrt{1-x^2}}.e^{-xw_nt}.Sin\left[w_n.\sqrt{1-x^2}.t + 2q\right]\right]$

5. Régime harmonique.

On pose $p = jw$, ce qui correspond à un cas particulier pour la transformée de Laplace. La transmittance isochrone du système est : $\overline{H(jw)} = \dfrac{K.w_n^2}{w_n^2 - w^2 + 2.j.x.w.w_n}$

on a alors : $\left|\overline{H(jw)}\right|_{dB} = 20.\log\left(K.w_n^2\right) - 10.\log\left[w_n^4 + w^4 + \left(4.x^2 - 2\right).w^2.w_n^2\right]$

et : $Arg\left[\overline{H(jw)}\right] = -Arctg\left[\dfrac{2.x.w.w_n}{w_n^2 - w^2}\right]$

Deux cas se présentent :

<u>1^er cas:</u>

$\left|\overline{H(jw)}\right|'$ s'annule : dans ce cas, le gain du système passe par un maximum. On dit alors qu'il y a résonance.

$$\left|\overline{H(jw)}\right|' = \frac{d\left|\overline{H(jw)}\right|}{dw} = -K.w_n^2.\frac{1}{2}\frac{\left[4.w^3 + 2.\left(4.x^2 - 2\right).w.w_n^2\right]}{\left[\left(w_n^2 - w^2\right)^2 + \left(2xww_n\right)^2\right]\sqrt{\left(w_n^2 - w^2\right)^2 + \left(2xww_n\right)^2}}$$

donc $\left|\overline{H(jw)}\right|' = 0$ équivaut à: $4.w^3 + 2.\left(4.x^2 - 2\right).w.w_n^2 = 0$

soit : $$w^2 + \left(2.x^2 - 1\right).w_n^2 = 0$$

ce qui n'est possible que si $\left(2.x^2 - 1\right) < 0$ c'est à dire $x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

La résonance a lieu pour $\left|\overline{H(jw)}\right|' = 0$, c'est à dire: $w = w_r = w_n.\sqrt{\left(1 - 2x^2\right)}$

w_r est appelée **pulsation de résonance** du système.

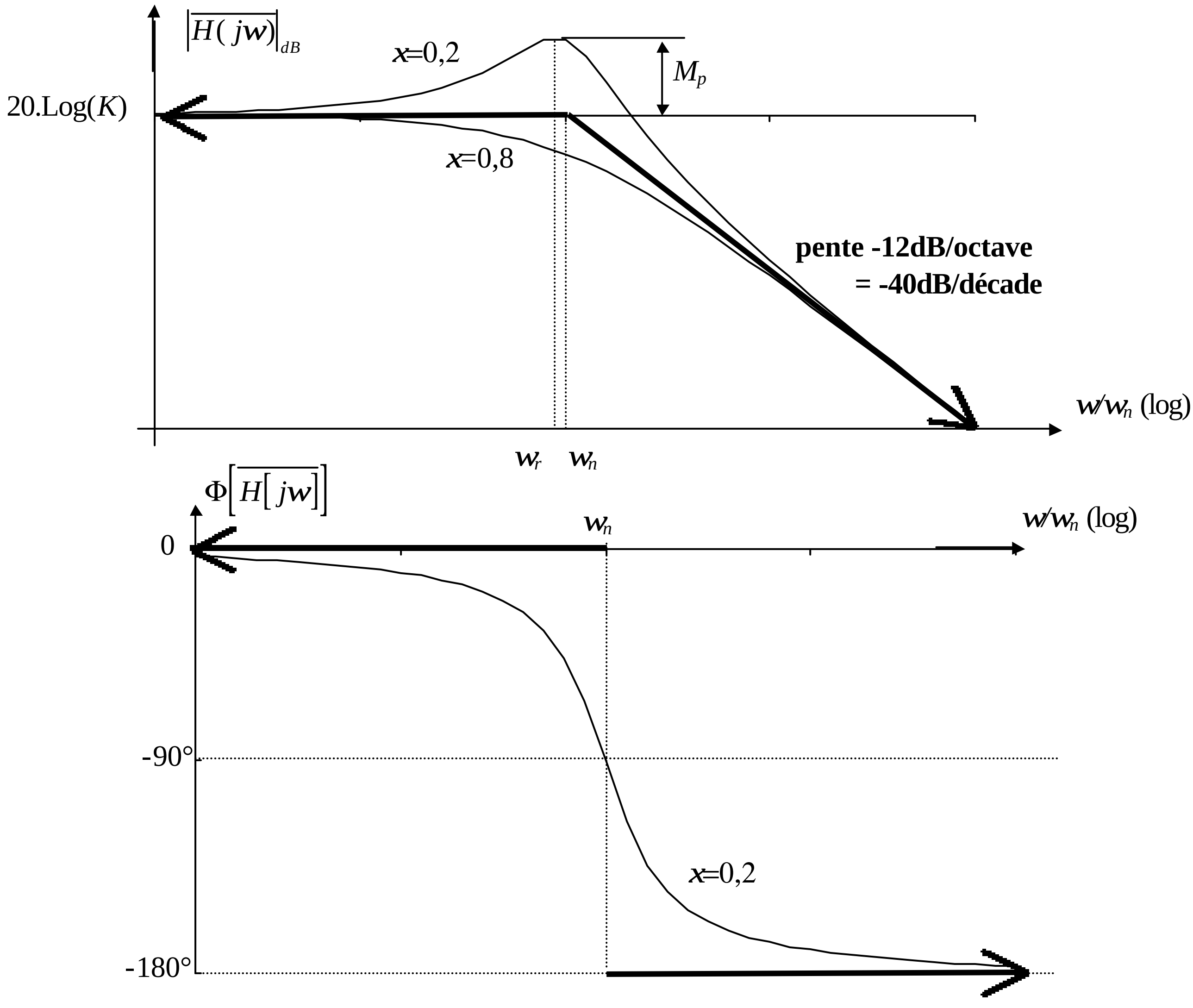
2me cas:

$\left|\overline{H(jw)}\right|'$ ne s'annule jamais : il n'y a pas de résonance. C'est le cas où $x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

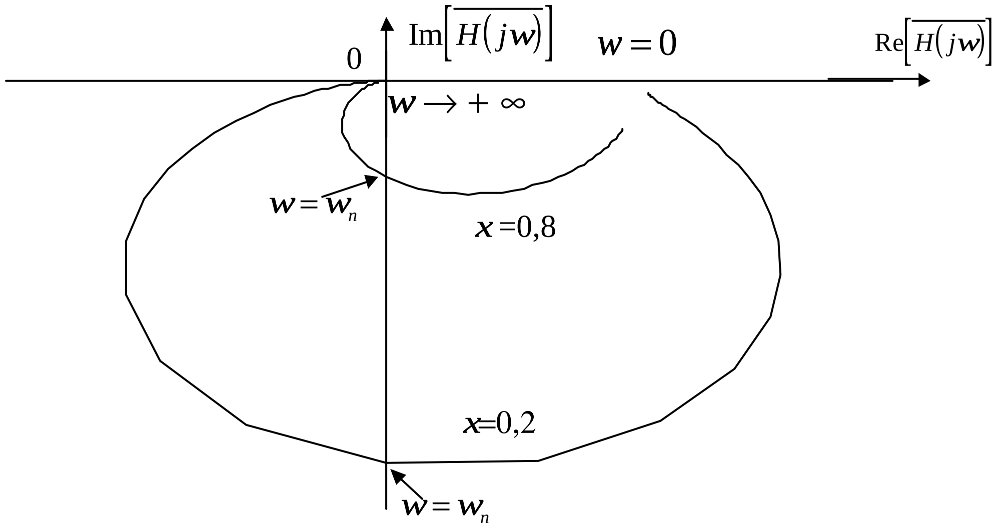
Dans le cas où il y a résonance, on définit alors un **facteur de résonance** M_p par:

$$M_p = \frac{\left|\overline{H\left(jw_r\right)}\right|}{\left|\overline{H(0)}\right|} = \frac{1}{2.x.\sqrt{1 - x^2}}$$

- Représentation de Bode :



- Représentation dans le plan de Nyquist :



- Représentation dans le plan de Black :