CHAPITRE 8

SYSTÈME D'ORDRE SUPÉRIEUR A DEUX

SYSTÈME A RETARD PUR

1 Système d'ordre supérieur à deux

1.1 Forme canonique.

Un système linéaire, invariant, scalaire, d'ordre quelconque possède une fonction de transfert *H*(*p*), dont le dénominateur a un degré quelconque :

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}$$

En décomposant les deux polynômes *N*(*p*) et D(*p*) en polynômes élémentaires du premier degré, *H*(*p*) peut s'écrire:

$$H(p)=\frac{K}{p^n}\frac{(1+pT_1)(1+pT_2)...}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)...} \qquad \begin{array}{l} 1/\mathrm{T_i} \ \text{ racines de } N(p) \\ 1/\tau_\mathrm{i} \ \text{ racines de } D(p) \end{array}$$

Si *N*(*p*) ou D(*p*) possède des racines complexes, alors celles-ci apparaîtront en paires conjuguées car les coefficients du polynôme sont réels, ce qui donnera des termes en :

$$1+2\xi\frac{p}{\omega_n}+\frac{p^2}{\omega_n^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1+2\xi\frac{p}{\omega_n}+\frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

Finalement, toute fonction de transfert relative à un système à constante localisée pourra être considérée comme le produit de termes de la forme :

$$K,\ p^n,\ (1+pT)^n,\ \frac{1}{(1+p\tau)^n},\ \left(1+2\xi\frac{p}{\omega_n}+\frac{p^2}{\omega_n^2}\right)^n,\ \frac{1}{\left(1+2\xi\frac{p}{\omega_n}+\frac{p^2}{\omega_n^2}\right)^n}$$

1.2 Régime harmonique.

1.2.1 Représentation de Bode.

- terme constant *K*: il donne une droite horizontale d'ordonnée 20.Log(*K*). La phase est nulle.
- terme en $\frac{1}{(j\omega)^n}$: le module est une droite de pente -6.*n* dB/octave passant par le point ($\omega=1$; 0dB).

  La phase est fixe et égale à $-n.\pi/2$.
- terme en $\frac{1}{(1+j\omega\tau)^n}$: le module comporte deux asymptotes se coupant en $\omega\tau=1$; une droite horizontale et une droite inclinée à -6.*n* dB/octave. La phase passe de 0 à $-n.\pi/2$ pour ω variant de 0 à $+\infty$.

- terme en $\dfrac{1}{\left(1+2\xi j\dfrac{\omega}{\omega_n}+\left(\dfrac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^n}$: le module comporte deux asymptotes se coupant en $\omega=\omega_n$; une droite horizontale et une droite inclinée à $-12.n$ dB/octave. La phase passe de 0 à $-n.\pi$ pour ω variant de 0 à $+\infty$.
- termes en $(j\omega)^n$, $(1+j\omega T)^n$, $\left(1+2\xi j\dfrac{\omega}{\omega_n}+\left(\dfrac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^n$: analogues aux trois termes précédents en inversant les pentes des asymptotes et en changeant le signe des phases.

1.2.2 Représentation dans le plan de Nyquist.

La construction ne peut être faite que point par point.

1.2.3 Représentation dans le plan de Black.

Bien qu'on ne puisse pas faire d'approximations asymptotiques, on peut utiliser les avantages inhérents aux échelles logarithmiques. Le plan de Black est d'un emploi fort commode pour le calcul des réseaux correcteurs et ceci milite en faveur de son emploi.

2 Retard pur $e^{-p\tau}$.

2.1 Origine physique du terme de retard pur.

Dans tout système, l'information de sortie est fournie par un capteur. Il se peut que, pour des raisons d'accessibilité, d'entretien ou d'encombrement, le capteur ne puisse pas être placé à l'endroit où l'on souhaiterait observer le système.
Cela introduit un retard entre l'instant où le signal est disponible (prêt à être mesuré) et l'instant où il est effectivement mesuré. Si $y(t)$ représente le signal à mesurer, l'introduction d'un retard τ donnera lieu au signal $y(t-\tau)$.
D'après les propriétés de la transformation de Laplace (§2.2, chapitre 2), si la transformée de Laplace de $y(t)$ s'écrit $Y(p)$, alors la transformée de Laplace de $y(t-\tau)$ s'écrira $e^{-p\tau}.Y(p)$.
En régime sinusoï dal le terme de retard $e^{-p\tau}$ introduit un déphasage $\omega\tau$ de la sortie sur l'entrée. Le réglage automatique de l'entrée du système $x(t)$ à partir des informations recueillies en sortie est difficile car les signaux nécessaires pour prendre des décisions convenables arrivent parfois trop tard.

2.2 Représentation dans le plan de Black.

On pose $R(p)=e^{-p\tau}$. D'où $R(j\omega)=e^{-j\omega\tau}$.

Le module de $R(j\omega)$ vaut 1 (0dB) quelle que soit la valeur de la pulsation ω. Son argument $Arg(R)=-\omega\tau$ est proportionnel à ω.

Le lieu de Black est donc l'axe 0dB. Le déphasage atteint -90° pour $\omega=\dfrac{1,57}{\tau}$ et -180° pour $\omega=\dfrac{3,14}{\tau}$.

2.3 Approximations de $e^{-p\tau}$.

Il est utile et parfois indispensable de disposer d'une bonne approximation du terme de retard par une fraction rationnelle, en commande ou en simulation.
Le développement limité de e^{-pt} donne:

$$e^{-tp} = 1 - p\boldsymbol{t} + \frac{p^2\boldsymbol{t}^2}{2} - \frac{p^3\boldsymbol{t}^3}{6} + \ldots$$

On peut ainsi penser approcher e^{-pt} simplement par $\dfrac{1}{1+\boldsymbol{t}p} = 1 - p\boldsymbol{t} + p^2\boldsymbol{t}^2 - \ldots$

L'approximation n'est pas très bonne dès que $\boldsymbol{w}$ augmente et il existe en pratique d'autres approximations certes plus performantes mais aussi plus compliquées.