

# Cours de Systèmes Asservis

J.Baillou, J.P.Chemla, B. Gasnier, M.Lethiecq

Polytech'Tours



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Définition de l'automatique

**Automatique** : Qui fonctionne tout seul ou sans intervention humaine. Il existe deux domaines d'intervention de l'automatique :

- Dans les systèmes à événements discrets. On parle d'automatisme (séquence d'actions dans le temps). Exemples d'applications : les distributeurs automatiques, les ascenseurs, le montage automatique dans le milieu industriel, les feux de croisement, les passages à niveaux.
- Dans les systèmes continus pour asservir et/ou commander des grandeurs physiques de façon précise et sans aide extérieure. Quelques exemples d'application : l'angle d'une fusée, la vitesse de rotation d'un lecteur CD, la position du bras d'un robot, le pilotage automatique d'un avion.

Dans ce cours, nous ne nous intéresserons qu'à l'automatique des systèmes continus.

### 1.2 Principes de base

**faire une contre-réaction ou un "feedback"** : réagir en fonction de ce qui est réalisé, connaissant ce qui est demandé.

Ce principe nous l'utilisons tous les jours dans la plupart de nos actions. Pour conduire, nous devons regarder la route et sans cesse corriger la direction de la voiture même s'il n'y a pas de virages.

#### 1.2.1 Notion de système, de Boucle Ouverte (BO), de Boucle Fermée (BF)

L'automatique peut s'appliquer à tout ce qui bouge, fonctionne, se transforme. L'objet d'application de l'automatique est appelé **système**.

Un système se caractérise par ses grandeurs d'entrée et de sortie. Les grandeurs d'entrée sont les grandeurs qui agissent sur le système. Il en existe de deux types :

**commandes** : celles que l'on peut maîtriser

**perturbations** : celles que l'on ne peut pas maîtriser.

Un système est en boucle ouverte lorsque la commande est élaborée sans l'aide de la connaissance des grandeurs de sortie : il n'y a pas de feedback. Dans le cas contraire, le système est dit en boucle fermée. La commande est alors fonction de la **consigne** ( la valeur souhaitée en sortie) et de la sortie. Pour observer les grandeurs de sortie, on utilise des capteurs. C'est l'information de ces capteurs qui va permettre d'élaborer la commande.

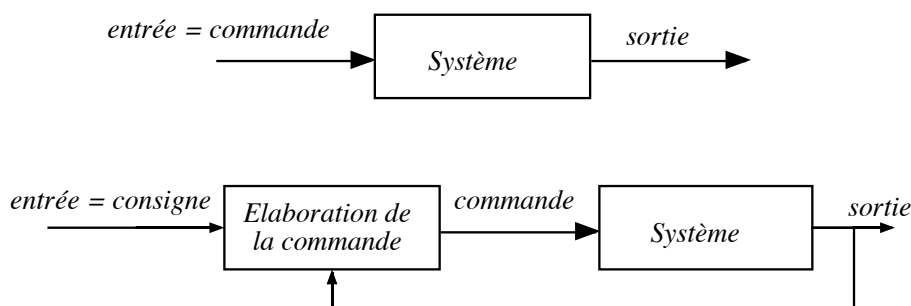


FIG. 1.1: Schéma d'un système en Boucle Ouverte (en haut) et en Boucle Fermée (en bas)

Ce que nous avons vu permet de donner cette autre définition de l'automatique. **Automatique** : c'est une science et une technique qui permet de maîtriser le comportement d'un système (traduit par ses grandeurs de sortie), en agissant de manière adéquate sur ses grandeurs d'entrée.

## 1.3 Exemples

### 1.3.1 Chauffage d'une salle

Considérons le chauffage électrique d'une salle. Le système est constitué par l'ensemble chauffage + salle. La sortie de ce système est la température de la pièce. La commande du système est la position 0 ou 1 de l'interrupteur. Les perturbations peuvent être l'ouverture d'une fenêtre, de la porte ou les rayons du soleil. En boucle ouverte, la commande est insensible à la sortie. Pour créer un feedback ou contre-réaction, on peut utiliser un thermostat. La commande est alors élaborée en fonction de la consigne (température souhaitée) et de la sortie (température de la pièce).

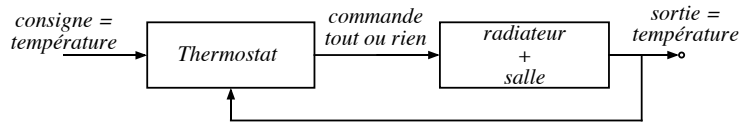


FIG. 1.2: Schéma de la régulation de la température d'une pièce par un thermostat

### 1.3.2 Asservissement de la position angulaire d'une antenne satellite

Voir le schéma fourni en annexe

## 1.4 Nécessité de la boucle fermée

Exceptionnellement, le système de commande peut opérer en boucle ouverte à partir du seul signal de consigne. Mais la boucle fermée (contre réaction) est capable de

- stabiliser un système instable en BO
- compenser les perturbations externes
- compenser les incertitudes internes au processus lui-même

Un système de commande peut réaliser deux fonctions distinctes :

**l'asservissement** c'est à dire la poursuite par la sortie d'une consigne variable dans le temps

**la régulation** c'est à dire la compensation de l'effet de perturbations variables sur la sortie (la consigne restant fixe)



## Chapitre 2

# Equations d'un système linéaire

Dans toute la suite du cours, les systèmes considérés n'auront qu'une entrée et qu'une sortie.

### 2.1 Introduction

Un système est dit **linéaire** si l'équation liant la sortie à l'entrée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants. La forme générale de cette équation différentielle est :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} \quad (2.1)$$

Ces systèmes linéaires sont homogènes, c'est à dire  $s(k.e) = k.s(e)$ , et additifs, c'est à dire que l'on a  $s(e_1 + e_2) = s(e_1) + s(e_2)$ .

On appelle l'ordre de l'équation 2.1 ( $n$ ), l'**ordre du système linéaire**. Seuls les systèmes pour lesquels  $m \leq n$  se rencontrent dans la pratique.

### 2.2 Exemples

#### 2.2.1 Circuit RC

Soit le circuit RC en figure 2.1.

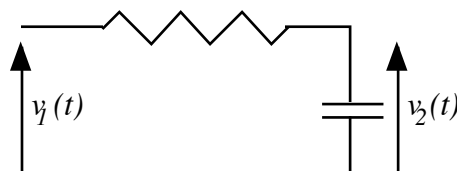


FIG. 2.1: Circuit RC

Les équations électriques sont :

$$v_1 = R.i + v_2 \qquad C.\frac{dv_2}{dt} = i$$

Nous pouvons obtenir une équation différentielle d'ordre 1 reliant la sortie  $v_2$  et l'entrée  $v_1$  :

$$v_1 = R.C.\frac{dv_2}{dt} + v_2$$

### 2.2.2 Moteur électrique

Soit le moteur électrique décrit par le schéma 2.2.

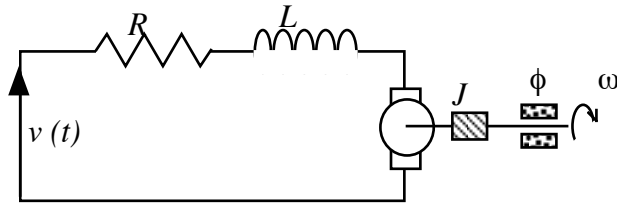


FIG. 2.2: Schéma du moteur électrique

L'équation électrique est :

$$v(t) = R.i + L.\frac{di}{dt} + K_e.\omega$$

L'équation mécanique donne :

$$J.\frac{d\omega}{dt} = K_c i - \phi.\omega$$

On peut obtenir une équation différentielle reliant la sortie  $\omega$  à l'entrée  $v(t)$  :

$$\frac{L.J}{K_c} \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{R.J + L.\phi}{K_c} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \left( \frac{R.\phi}{K_c} + K_e \right) \cdot \omega = v(t)$$

On en déduit que ce système est d'ordre 2.

## 2.3 Remarques

### 2.3.1 Régime statique

Dans l'équation 2.1, si les dérivées successives de l'entrée  $e(t)$  et de la sortie  $s(t)$  sont nulles, on obtient  $b_0 s(t) = a_0 e(t)$ . On définit le **gain statique**  $K$  du système comme étant le rapport  $K = \frac{a_0}{b_0}$ .

### 2.3.2 Conditions initiales

Dans la suite du cours, on supposera souvent que les valeurs initiales de l'entrée et de la sortie sont nulles. En fait, si ce n'est pas le cas mais que l'on se trouve dans des conditions de repos du système, on peut montrer que les variations autour de ce point d'équilibre vérifient la même équation 2.1 que les grandeurs elles mêmes.

### 2.3.3 Linéarisation

Les systèmes réels ne sont parfois pas linéaires mais peuvent être considérés comme tels dans certaines conditions. Nous n'étudierons dans la suite du cours que les systèmes linéaires ou linéarisables.

### 2.3.4 Réponse d'un système linéaire

Si l'on veut connaître la réponse d'un système linéaire, il suffit de résoudre l'équation 2.1. Dans la suite du cours, on utilisera la Transformée de Laplace (TL) pour simplifier la résolution de ces équations. Nous apprendrons également à faire un lien direct entre les réponses des systèmes et la TL de l'équation 2.1.

## 2.4 Rappels sur la transformée de Laplace

### 2.4.1 Définition

Soit une fonction  $f$  définie pour  $t \geq 0$ . On définit sa transformée de Laplace (TL)  $F$  par :

$$F(p) = TL[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-p.t}.dt$$

On admettra qu'il existe une transformée de Laplace pour toutes les fonctions que nous rencontrerons. On notera par des lettres minuscules les fonctions originales (fonction du temps) et par des lettres majuscules les images (les fonction de la variable  $p$ ). En pratique, les transformées de Laplace ne seront pas calculées mais on utilisera la table des transformées.

### 2.4.2 Propriétés de la Transformée de Laplace

**Linéarité :**

$$TL[a.f(t) + b.g(t)] = a.F(p) + b.G(p)$$

**Dérivation :**

$$TL\left[\frac{df}{dt}\right] = p.F(p) - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$$

ce qui se généralise :

$$TL \left[ \frac{d^2 f}{dt^2} \right] = p^2 \cdot F(p) - p \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{df(t)}{dt}$$

Souvent,  $f(t)$  et les dérivées successives de  $f(t)$  sont nulles à l'instant initial.

### Intégration

$$TL \left[ \int_0^t f(\tau) \cdot d\tau \right] = \frac{F(p)}{p}$$

### Retard

$$TL[f(t - \tau)] = e^{-\tau \cdot p} \cdot F(p)$$

### Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot F(p)$$

### Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$$

### Translation de la variable de Laplace

$$F(p + a) = TL \left[ e^{-at} \cdot f(t) \right]$$

Les transformées de Laplace que nous rencontrerons seront la plupart du temps des fonctions rationnelles. Pour évaluer leur original (transformée inverse de Laplace), il suffit souvent de décomposer cette fonction en éléments simples, puis d'utiliser la table des transformées. La fonction  $u(t)$  (échelon unitaire) intervient systématiquement dans ces tables ; elle est définie par :

$$u(t) = 0 \forall t < 0 \quad u(t) = 1 \forall t \geq 0$$

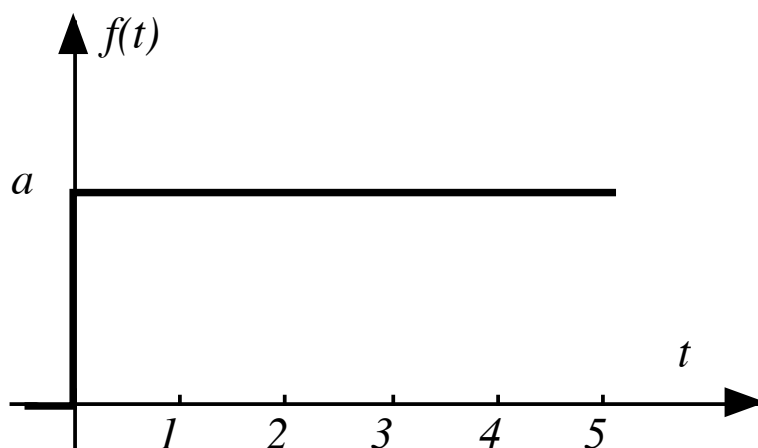


FIG. 2.3: La fonction échelon unitaire

### 2.4.3 Exemple

Déterminer l'original de

$$F(p) = \frac{1}{p^2 \cdot (1 + \tau \cdot p)} \quad \tau > 0$$

Réponse :  $f(t) = (t - \tau + \tau \cdot e^{-t/\tau}) \cdot u(t)$ .

## 2.5 Application à la résolution d'équations différentielles

Rappelons la forme générale d'une équation différentielle d'ordre  $n$  :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

Nous pouvons former la TL de cette équation :

$$\begin{aligned} b_0 S(p) + b_1 (p \cdot S(p) - s(0^+)) + b_2 \left( p^2 \cdot S(p) - p \cdot s(0^+) - \frac{ds(0^+)}{dt} \right) + \dots \\ = a_0 E(p) + a_1 (p \cdot E(p) - e(0^+)) + \dots \end{aligned}$$

Ce qui peut se mettre sous la forme :

$$(b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_n \cdot p^n) \cdot S(p) + I_s = (a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_m \cdot p^m) \cdot E(p) + I_e$$

où  $I_s$  et  $I_e$  sont des termes dépendant des conditions initiales de  $s(t)$  et de  $e(t)$ . Dans le cas où ces conditions initiales sont nulles (c'est le cas le plus courant en automatique), on obtient :

$$S(p) = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_m \cdot p^m}{b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_n \cdot p^n} \cdot E(p)$$

Cette équation permet de calculer  $S(p)$ . Il ne reste plus qu'à former la transformée inverse de Laplace pour avoir  $s(t)$ .

## 2.6 Fonction de transfert d'un système linéaire

### 2.6.1 Définition

On appelle **fonction de transfert** ou transmittance d'un système linéaire le rapport entre la transformée de Laplace de la sortie sur celle de l'entrée :

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_m \cdot p^m}{b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_n \cdot p^n}$$

C'est une fonction rationnelle. L'ordre du système (qui est l'ordre de l'équation différentielle) est le degré du dénominateur de  $T(p)$ .

**Schéma fonctionnel :** Pour exprimer l'équation précédente, on utilise généralement le schéma 2.4

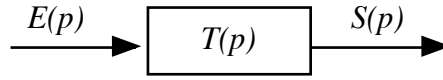


FIG. 2.4: Schéma fonctionnel d'une fonction de transfert

### 2.6.2 Mise en cascade

La mise en cascade de deux systèmes dont les fonctions de transfert sont  $T_1(p)$  et  $T_2(p)$  est équivalent à un seul système dont la fonction de transfert serait  $T_1(p).T_2(p)$  (voir schéma 2.5).

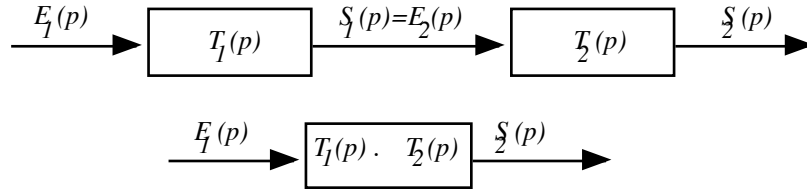


FIG. 2.5: Les fonctions de transfert en cascade se multiplient

### 2.6.3 Différentes formes d'écriture de la fonction de transfert

Nous avons vu précédemment la forme développée de la fonction de transfert où l'on peut lire directement les coefficients de l'équation différentielle.

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1.p + \dots + a_m.p^m}{b_0 + b_1.p + \dots + b_n.p^n} \quad (2.2)$$

Il est souvent préférable de mettre en évidence le **gain**  $K$  du système ainsi que le nombre  $\alpha$  d'intégrateurs purs aussi appelé **type du système**.

$$T(p) = K \cdot \frac{1}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + \dots + c_m.p^m}{1 + \dots + d_{n-\alpha}.p^{n-\alpha}} = K.G(p) \quad (2.3)$$

Remarque :

- si  $\alpha = 0$ , alors  $K = \frac{a_0}{b_0}$  est le gain statique du système.
- si  $\alpha \neq 0$ , alors  $K = \lim_{p \rightarrow 0} p^\alpha T(p)$

Cette dernière forme peut parfois se trouver sous forme factorisée :

$$T(p) = K \cdot \frac{(1 + \tau'_1 p) \dots (1 + \tau'_m p)}{p^\alpha (1 + \tau_1 p) \dots (1 + \tau_{n-\alpha} p)}$$

Dans cette formulation, les  $\tau$  et  $\tau'$  sont assimilés à des constantes de temps.

Nous pouvons enfin faire apparaître les pôles et les zéros de la fonction de transfert. Cela donne :

$$T(p) = k \cdot \frac{(p - z_1) \cdots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1) \cdots (p - p_{n-\alpha})}$$

où  $k \neq K$ .

## 2.7 Exemples

### 2.7.1 Circuit RC

Nous reprenons l'exemple du paragraphe 2.2.1. Nous avons vu que :

$$v_1 = R.C. \frac{dv_2}{dt} + v_2$$

Dans ce système, nous considérons la tension  $v_1$  comme étant l'entrée  $e(t)$ , et la tension  $v_2$  comme étant la sortie  $s(t)$ . En prenant la transformée de Laplace de l'équation précédente, on peut former la fonction de transfert de ce système :

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + R.C.p}$$

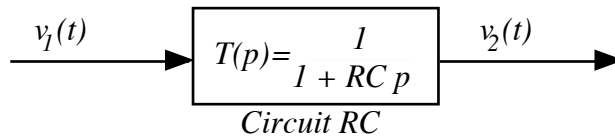


FIG. 2.6: Schéma fonctionnel d'un Circuit RC

On identifiera facilement le fait que c'est un système d'ordre 1 dont la constante de temps est  $\tau = RC$  et de gain statique  $K = 1$ .



## Chapitre 3

# Réponse temporelle des systèmes

On veut caractériser les systèmes d'une part par leur fonction de transfert et, d'autre part, par leur comportement. Ce dernier peut être mis en évidence par la réponse  $s(t)$  à une entrée donnée. Classiquement, on peut apprendre beaucoup des systèmes en observant la réponse aux entrées suivantes :

- l'impulsion  $\rightarrow$  réponse impulsionnelle
- l'échelon  $\rightarrow$  réponse indicielle
- la rampe
- la sinusoïde  $\rightarrow$  réponse fréquentielle

Nous étudierons au chapitre suivant les réponses fréquentielles des systèmes. Dans ce chapitre, nous allons faire le lien entre fonction de transfert et réponses temporelles (c'est à dire les réponses aux impulsion, échelon et rampe). Comme dans la suite du cours, nous allons étudier les systèmes simples et très répandus que sont les systèmes du premier ordre et du second ordre. De plus, les méthodes d'étude de ces systèmes se généralisent facilement aux autres.

### 3.1 Les différentes entrées classiques

#### 3.1.1 L'échelon

C'est l'entrée la plus utilisée de toutes. Elle correspond à un changement brusque de consigne. Cette fonction est définie par :

$$f(t) = a \quad \forall t > 0 \quad \text{et} \quad f(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$$

Sa transformée de Laplace est :

$$F(p) = \frac{a}{p}$$

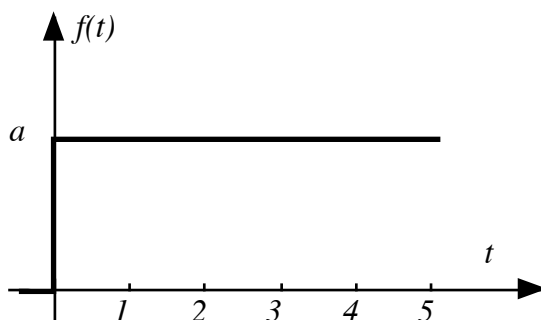


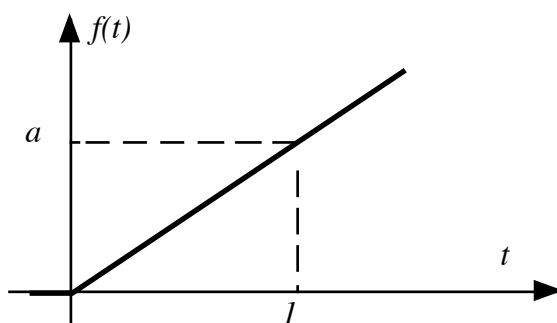
FIG. 3.1: La fonction échelon

On appelle **échelon unitaire** la fonction dont la TL est  $\frac{1}{p}$  ( $a = 1$ ). On le note souvent  $u(t)$ . On appelle **réponse indicielle** la réponse à l'échelon unité. On rencontre également l'échelon retardé  $g(t) = u(t - \tau)$ .

### 3.1.2 La rampe

La rampe de pente  $a$  est la primitive de l'échelon de hauteur  $a$ . Elle est définie par :

$$\forall t > 0, f(t) = at \quad \forall t \leq 0, f(t) = 0$$

FIG. 3.2: La fonction rampe de pente  $a$ 

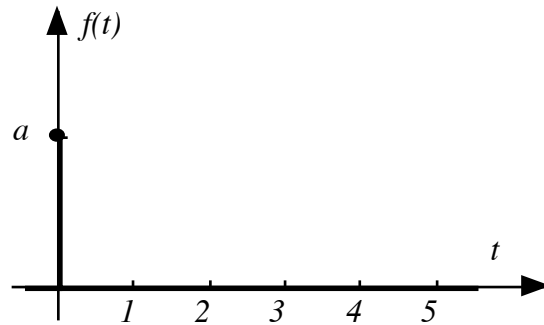
Sa transformée de Laplace est définie par :

$$F(p) = \frac{a}{p^2}$$

On peut définir également la rampe unitaire : la rampe de pente 1.

### 3.1.3 L'impulsion

L'impulsion unité est, dans l'espace des distributions, la dérivée de l'échelon unitaire. On l'appelle aussi impulsion de Dirac. On la note généralement  $\delta(t)$ . Sa transformée de Laplace est  $TL[\delta(t)] = 1$ .

FIG. 3.3: La fonction impulsion de dirac de poids  $a$ 

## 3.2 Décomposition de signaux complexes

Nous connaissons la transformée de Laplace des signaux précédents. Nous déterminerons par la suite la réponse temporelle des systèmes à ces entrées. Par la propriété de linéarité de la transformée, nous pourrions connaître la TL et la réponse des systèmes à toute la classe des signaux qui peuvent se décomposer en signaux classiques (impulsion, échelon, rampe).

### 3.2.1 Exemple

Determiner la TL de la fonction en figure 3.4.

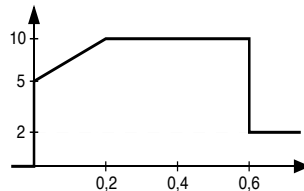


FIG. 3.4: Exemple de fonction composée d'échelons, rampes et dirac

Réponse :

$$F(p) = \frac{1}{p}(5 - 8e^{-0,6p}) + \frac{25}{p^2}(1 - e^{-0,2p})$$

**Remarque :** Dans la suite du cours, si rien n'est précisé, les conditions initiales seront considérées comme nulles. Pour calculer la sortie d'un système de fonction de transfert  $T(p)$ , il suffira de calculer la transformée inverse de Laplace de  $T(p).E(p)$  où  $E(p)$  est la TL de l'entrée. Dans le cas où les conditions initiales ne sont pas nulles, il faudra revenir à la transformée de Laplace de l'équation différentielle.

### 3.3 Réponse d'un système du premier ordre

#### 3.3.1 Fonction de transfert

Un système du premier ordre est décrit par

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds}{dt} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de}{dt}$$

Nous ne traiterons, dans ce chapitre, que les systèmes pour lesquels  $a_0 \neq 0$  et  $a_1 = 0$ . La fonction de transfert de ces systèmes est :  $T(p) = \frac{a_0}{b_0 + b_1 p}$ , ce que nous pouvons mettre sous la forme :

$$T(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On appelle  $K$  le *gain statique* et  $\tau$  la *constante de temps* du système.

#### 3.3.2 Réponse à un échelon

Pour toutes les réponses indicielles (à un échelon), on définit :

Régime permanent  $s_p(t) = s(t) \quad \forall t \gg t_r \quad (s_p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t))$

Temps de montée  $t_m$  est le temps pendant lequel  $s(t)$  passe de  $0,1s_p(t)$  à  $0,9s_p(t)$

Temps de réponse à 5%  $t_r$  est le temps au bout duquel  $\forall t > t_r, s_p(t) - s(t) < 0,05s_p(t)$

On applique à l'entrée de ce système un échelon d'amplitude  $E_0$ .  $E(p)$ , la TL de l'entrée est donc  $E(p) = \frac{E_0}{p}$ . La sortie du système est telle que :

$$S(p) = E(p).T(p) = \frac{K.E_0}{p(1 + \tau p)}$$

$$s(t) = K.E_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

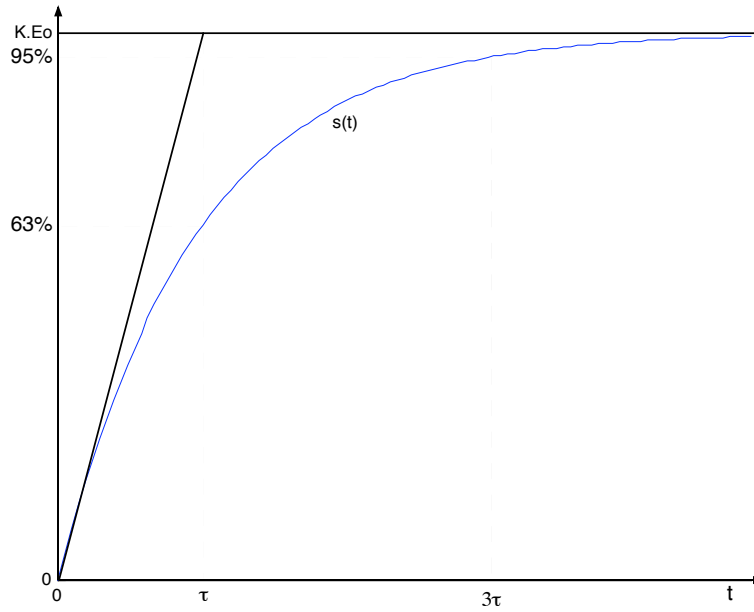


FIG. 3.5: Réponse à un échelon d'un système du premier ordre

Sur son tracé ci-dessus, on peut noter

- $s(\tau) = 0,632KE_0$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K.E_0$
- la tangente à l'origine a une pente de  $\frac{K.E_0}{\tau}$
- temps de montée  $\approx 2\tau$
- temps de réponse à 5%  $\approx 3\tau$

On peut tracer la courbe en coordonnées réduites, c'est à dire le tracé de  $y = \frac{s(t)}{K.E_0}$  en fonction de  $x = t/\tau$  qui ne dépend plus de  $\tau$  ni de  $K$  ni de l'amplitude de l'échelon d'entrée. ( $y = 1 - e^{-x}$ )

### 3.3.3 Réponse à une rampe

L'entrée est une rampe de pente  $a$  :  $e(t) = atu(t)$ . Sa Transformée de Laplace est  $E(p) = a/p^2$ . La sortie est donnée par :

$$S(p) = \frac{K.a}{\tau} \cdot \frac{1}{p^2(p + \frac{1}{\tau})}$$

$$s(t) = K.a.(t - \tau) + K.a.\tau.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

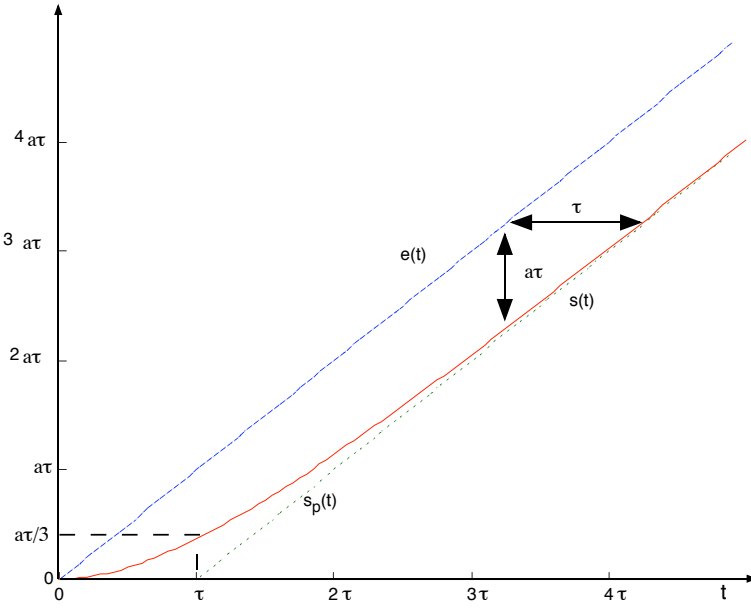


FIG. 3.6: Réponse d'un premier ordre à une rampe

Les caractéristiques de cette réponse sont :

- Le régime permanent est  $s_p(t) = K.a.(t - \tau)$
- Si  $K = 1$ , la sortie  $s(t)$  suit l'entrée avec un retard constant ( $\tau$ ). La différence entre la sortie et l'entrée est appelée erreur de traînage et vaut  $a.\tau$ .
- Si  $K \neq 1$ ,  $s_p(t)$  et  $e(t)$  n'ont pas la même pente. Ils divergent.

### 3.3.4 Réponse à une impulsion

L'entrée est donnée par  $e(t) = E_0.\delta(t)$ . En Laplace :  $E(p) = E_0$ . La sortie est donnée par

$$S(p) = \frac{K.E_0}{1 + \tau p} \Rightarrow s(t) = \frac{K.E_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

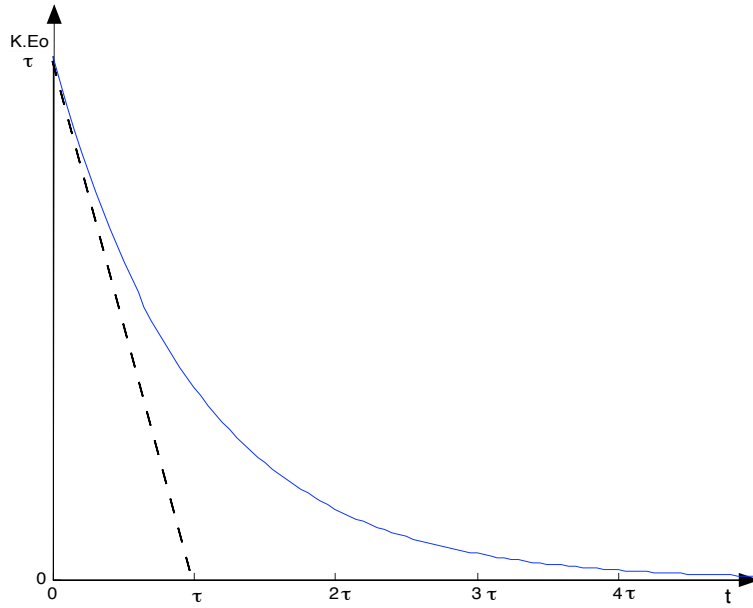


FIG. 3.7: Réponse d'un premier ordre à une impulsion

### 3.4 Réponse des systèmes du second ordre

#### 3.4.1 Fonction de transfert

L'équation différentielle la plus générale de second ordre est :

$$b_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + b_1 \frac{ds}{dt} + b_0 s(t) = a_2 \frac{d^2 e}{dt^2} + a_1 \frac{de}{dt} + a_0 e(t)$$

Dans ce paragraphe, nous n'étudierons que les systèmes tels que les dérivées de l'entrée n'interviennent pas ( $a_2 = a_1 = 0$ ). La fonction de transfert de ces systèmes peut se mettre sous la forme :

$$T(p) = \frac{K}{1 + \frac{2zp}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

avec

$K$  est le gain statique du système.

$\omega_n$  est la pulsation naturelle (en  $rd/s$ ). On pourra poser  $\tau_n = \frac{1}{\omega_n}$ .

$z$  est le coefficient d'amortissement.

Si on cherche les pôles de la fonction de transfert (les racines du dénominateur), on distingue 3 cas possibles :

$z > 1$  dans ce cas, les pôles sont réels :  $-z\omega_n \pm \omega_n \sqrt{z^2 - 1}$

$z = 1$  les deux pôles sont égaux et réels. Ils valent  $-\omega_n$ .

$z < 1$  les deux pôles sont des complexes conjugués. Ils sont à partie réelle négative si  $z > 0$ .

### 3.4.2 Réponse à l'échelon pour $z > 1$

On parle de système à fort amortissement. Les deux pôles réels  $p_1$  et  $p_2$  donnent une réponse qui sera la somme de deux exponentielles. Pour une entrée  $e(t) = E_0 u(t) \rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$ , la sortie est donnée par

$$S(p) = \frac{K.E_0.\omega_n^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$s(t) = K.E_0 \left[ 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] . u(t)$$

avec  $p_1 = -\frac{1}{\tau_1}$  et  $p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$

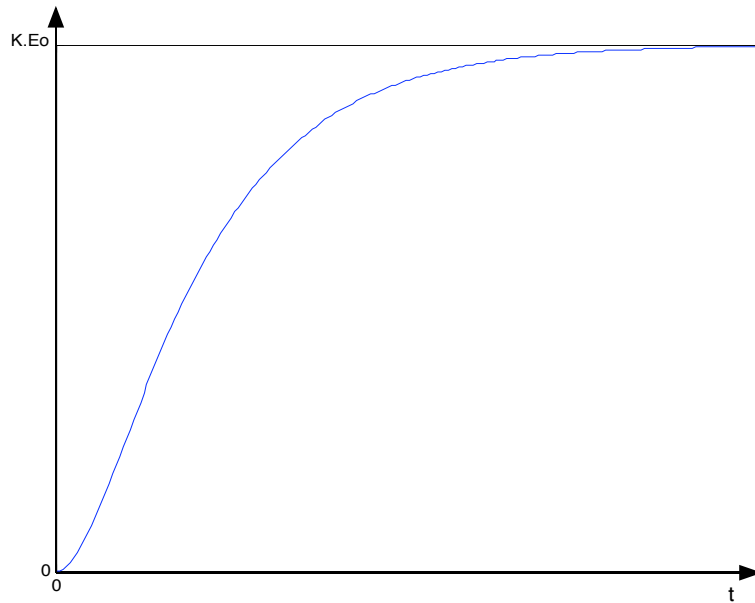


FIG. 3.8: Réponse indicielle d'un second ordre à fort amortissement

Les caractéristiques de cette réponse sont :

- le régime permanent est :  $s_p(t) = K.E_0$
- à l'origine, la tangente est horizontale

### 3.4.3 Réponse à l'échelon pour $z = 1$

Par rapport au paragraphe précédent, les pôles sont confondus.

$$T(p) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{(p + \omega_n)^2}$$

$$s(t) = K \cdot E_0 \left[ 1 - (1 + \omega_n t) e^{-t/\tau_n} \right] \cdot u(t)$$

La courbe de réponse ressemble à la courbe obtenue au paragraphe précédent, mais la croissance est plus rapide.

### 3.4.4 Réponse à l'échelon pour $z < 1$

On parle de système à faible amortissement. Les pôles sont complexes conjugués. La réponse temporelle est :

$$s(t) = K \cdot E_0 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - z^2} t + \varphi) \right]$$

avec  $\tan \varphi = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z}$

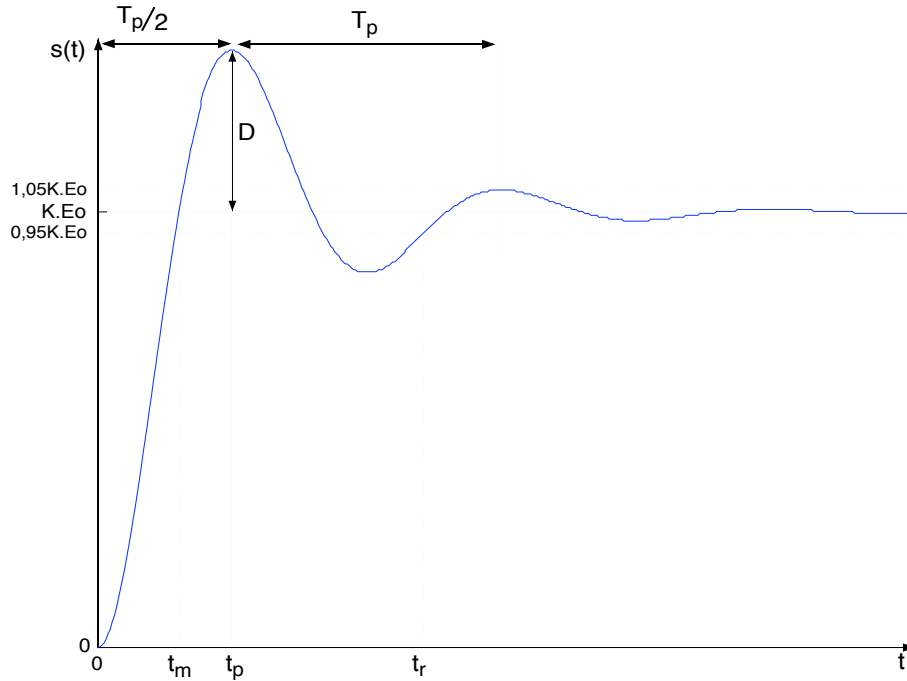


FIG. 3.9: Réponse indicielle d'un second ordre à faible amortissement

Les caractéristiques de cette réponse sont :

- régime permanent  $s_p(t) = K \cdot E_0$

- à l'origine, la tangente est horizontale
- pulsation propre amortie

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - z^2}$$

- pseudo-période des oscillations :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$$

- temps de montée (temps au bout duquel  $s(t)$  atteint pour la première fois  $s_p(t)$ ).

$$t_m = \frac{T_p}{2} \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right)$$

- temps de pic

$$t_p = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_p}$$

- temps de réponse à 5% : C'est le temps au bout duquel la sortie atteint le régime permanent à 5% près et y reste. L'abaque ci-joint donne ce temps en fonction des caractéristiques de la fonction de transfert. Une approximation pour  $z \ll 1$  est

$$t_r = 3 \frac{\tau_n}{z} = \frac{3}{z\omega_n}$$

qui est le temps de réponse de l'enveloppe exponentielle.

- le dépassement  $D = s(t_p) - K.E_0$ . Le calcul donne :

$$D = K.E_0.e^{-\frac{z\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

On peut aussi définir le dépassement relatif (sans unité) :  $D_r = \frac{D}{K.E_0} = e^{-\frac{z\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$ .

- dépassements successifs : le rapport entre deux dépassements successifs de même signe peut permettre d'identifier l'amortissement  $z$ .

$$\ln \frac{D_2}{D_1} = \frac{-2z\pi}{\sqrt{1-z^2}}$$

### 3.4.5 Réponse d'un système du second ordre à une rampe

L'entrée est une rampe de pente  $a$ .  $E(p) = \frac{a}{p^2}$ . On en déduit la sortie

$$S(p) = \frac{Ka}{p^2(p^2 + 2z\omega_n p + \omega_n^2)}$$

Pour  $z > 1$ ,

$$s(t) = K.a \left[ t - \tau_1 - \tau_2 + \frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2}.e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2}.e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]$$

Pour  $z < 1$ ,

$$s(t) = K.a \left[ t - \frac{2z}{\omega_n} + \frac{e^{-\frac{zt}{\tau_n}}}{\omega_p} \cdot \sin(\omega_p t - \psi) \right]$$

avec  $\psi = -2 \arctan \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$ .

Dans les deux cas, le régime stationnaire est une droite de pente  $Ka$ .  
Dans le cas  $z < 1$ , le régime transitoire est oscillant.



## Chapitre 4

# Réponse fréquentielle d'un système

### 4.1 Réponse d'un système à une sinusoïde

Considérons un système linéaire d'ordre quelconque avec une entrée et une sortie. Si l'entrée est sinusoïdale ( $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$ ), la propriété linéaire du système fait que la sortie sera également une sinusoïde, de même pulsation que l'entrée. On aura :  $s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$ .

Dans une *analyse harmonique* d'un système, on va faire le lien entre la fonction de transfert et la réponse de ce système à une sinusoïde. Cette réponse sera caractérisée par deux paramètres :

$$\text{Gain} = \frac{S_0}{E_0} \qquad \text{déphasage} : \varphi$$

Ces deux paramètres dépendent de la pulsation  $\omega$  de l'entrée. On peut montrer que :

$$\frac{S_0}{E_0} = |T(j\omega)| \qquad \varphi = \arg(T(j\omega))$$

où  $T(j\omega)$  est l'expression de la fonction de transfert du système dans laquelle on remplace la variable de Laplace  $p$  par  $j\omega$ .

L'intérêt de connaître les réponses fréquentielles vient du fait que, d'après Fourier, tout signal peut être décomposé en une somme de fonctions sinus ou cosinus. La réponse à un signal quelconque sera la somme des réponses aux sinusoïdes qui composent ce signal.

L'expression analytique du gain et du déphasage en fonction de  $\omega$  ne sont pas 'parlantes'. On préférera avoir une représentation graphique de ces deux paramètres en fonction de la pulsation. Il existe trois types de représentations graphiques :

BODE se présente sous la forme de deux courbes :

- $|T(j\omega)|_{dB}$  en fonction de  $\omega$  (abscisses logarithmiques)
- $\varphi = \arg(T(j\omega))$  en fonction de  $\omega$  (abscisses logarithmiques)

BLACK aussi appelé NICHOLS représente  $|T(j\omega)|_{dB}$  en fonction de  $\varphi$ . La courbe est graduée en  $\omega$ .

NYQUIST représente  $T(j\omega)$  dans le plan complexe. La courbe est graduée en  $\omega$ .

## 4.2 Représentation dans le plan de BODE

### 4.2.1 Définition

Cette représentation s'appelle également *Lieu de Bode*. Le gain est représenté en décibels ( $dB$ ) :

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20 \log(|T(j\omega)|)$$

La construction pratique consiste en la recherche des asymptotes, leur point de concours et le calcul de quelques points particuliers. Le déphasage est souvent représenté en degrés. A part quelques rares exceptions, ce déphasage est négatif (la sortie est en retard par rapport à l'entrée).

### 4.2.2 Systèmes du premier ordre

La fonction de transfert d'un système du premier ordre est donnée par :

$$T(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad \Rightarrow \quad T(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega}$$

Pour pouvoir tracer ce lieu dans le cas général (nous n'avons pas de valeur numérique pour  $K$  et  $\tau$ , on posera  $u = \tau\omega$  et  $K = 1$ . (Si  $K \neq 1$ , il suffira de décaler la courbe de gain de  $20 \log(K)$ .)

$$|T(ju)|_{dB} = 20 \log K - 10 \log(1 + u^2) \quad \arg(T(ju)) = -\arctan(u)$$

- asymptotes :
  - pour  $u \rightarrow 0$ ,  $|T(ju)|_{dB} \rightarrow 0$ ,  $\arg(T(ju)) \rightarrow 0$
  - pour  $u \rightarrow \infty$ ,  $|T(ju)|_{dB} \rightarrow -20 \log(u)$ ,  $\arg(T(ju)) \rightarrow -90^\circ$ . Comme l'axe des abscisses est logarithmique, l'asymptote de gain est une droite de pente  $-20dB/decade(u)$  et coupe l'axe pour  $u = 1$  ( $\omega = 1/\tau$ ).
- règle des 10% : pour  $u < 0.1$  ou  $u > 10$ , la courbe se confond avec les asymptotes.
- Pour  $u = 1$ ,  $|T(ju)|_{dB} = -3dB$ , et  $\varphi = -45^\circ$ . On dira que la pulsation  $u = 1 \Leftrightarrow \omega = 1/\tau$  est la pulsation de coupure à  $-3dB$ .

- Pour  $u = 1/2$ ,  $|T(j\omega)|_{dB} = -1dB$ , et  $\varphi = -26,5^\circ$ .
- Pour  $u = 2$ ,  $|T(j\omega)|_{dB} = -7dB$ , et  $\varphi = -63,5^\circ$ .

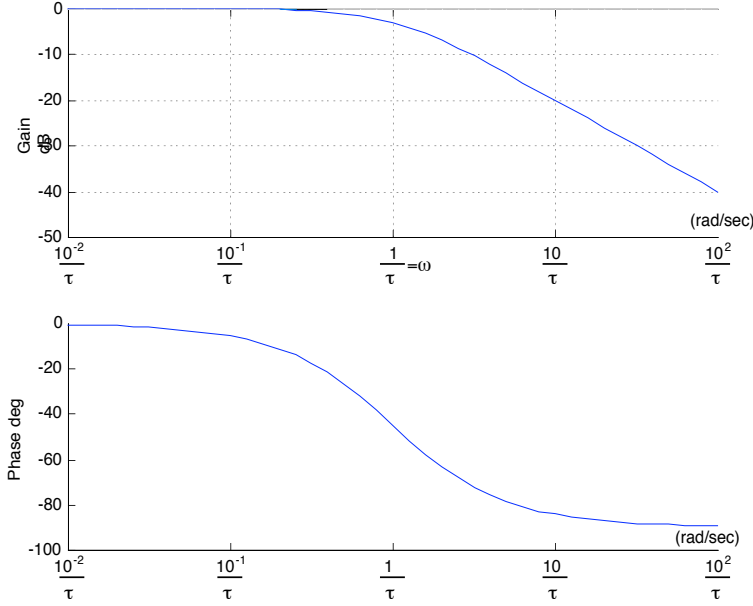


FIG. 4.1: Lieu de Bode d'un système du premier ordre

### 4.2.3 Intégrateur pur

On appelle intégrateur pur les systèmes dont la fonction de transfert est

$$T(p) = \frac{K}{p}$$

Pour ces systèmes, on a :  $s(t) = K \cdot \int u(t) \cdot dt$ . Le gain et la phase de ce système sont :

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\omega); \quad \varphi = -90^\circ$$

### 4.2.4 Système du deuxième ordre

Un système du deuxième ordre est défini par sa fonction de transfert  $T(p)$  :

$$T(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \Rightarrow T(j\omega) = \frac{K}{1 + j \frac{2z\omega}{\omega_n} - (\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

Pour pouvoir tracer ce lieu dans le cas général (nous n'avons pas de valeur numérique pour  $K$  et  $\omega_n$ ), on posera  $u = \frac{\omega}{\omega_n}$  et  $K = 1$ . Si  $K \neq 1$ , il suffira de décaler la courbe de gain de  $20 \log(K)$ .

$$T(ju) = \frac{1}{1 + 2jzu - u^2} \Rightarrow |T(ju)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + (2zu)^2}}$$

$$\arg(T(ju)) = -\arctan\left(\frac{2zu}{1-u^2}\right)$$

- Asymptotes pour  $u \rightarrow 0$  :  $|T| \rightarrow 1 = 0dB$  et le déphasage  $\varphi \rightarrow 0^\circ$ .
- Asymptotes pour  $u \rightarrow \infty$  :  $|T| \approx \frac{1}{u^2} \rightarrow -40dB/decade$  et le déphasage  $\varphi \rightarrow -180^\circ$ .
- Les asymptotes se coupent en  $u = 1$  (cad  $\omega = \omega_n$ ). En ce point,  $|T| = \frac{1}{2z}$  et  $\varphi = -90^\circ$ .
- La recherche d'un extremum sur la courbe de gain donne :

Si  $z > 0,7$  la courbe ne présente pas d'extremum. Elle reste en dessous de  $0dB$ .

Si  $z < 0,7$  la courbe a un maximum en  $u = \sqrt{1-2z^2}$  cad pour

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1-2z^2}$$

On appelle cette pulsation la pulsation de résonance. C'est en mettant en entrée une sinusoïde à cette pulsation que le gain du système sera maximal. On définit le facteur de résonance  $Q$  par :

$$Q = \frac{|T|_{\omega_R}}{|T|_{\omega \rightarrow 0}} \quad |T|_{\omega_R} = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}}$$

Dans les feuilles jointes, vous trouverez un réseau de courbes de bode, pour plusieurs valeurs de  $z$ . La courbe 4.2 représente le lieu de Bode en coordonnées réduites pour  $z = 0,3$ .

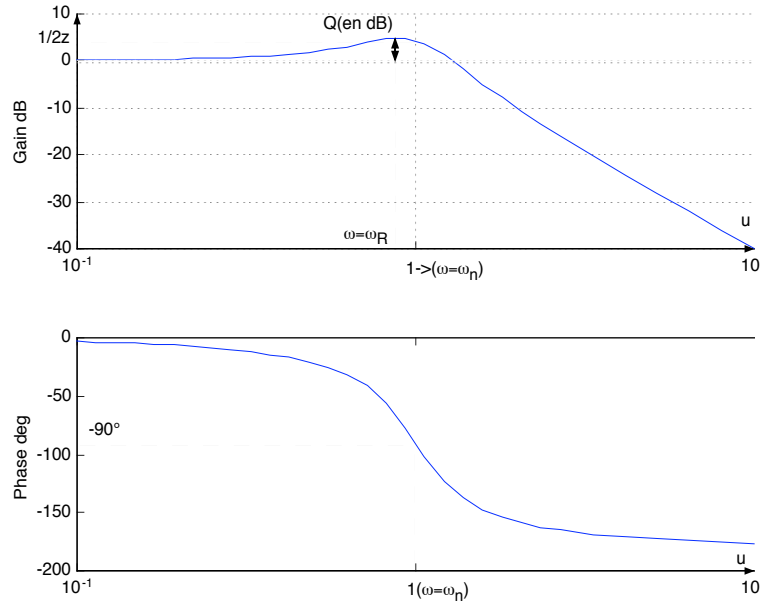


FIG. 4.2: Lieu de Bode d'un système du second ordre

### 4.3 Représentation de BLACK

La courbe de Black représente  $|T(j\omega)|_{dB}$  en fonction du déphasage  $\varphi$ . Cette courbe est graduée en  $\omega$ . Dans les feuilles jointes à ce cours, vous trouverez les courbes de Black pour les systèmes du premier et second ordre.

#### 4.3.1 Systèmes du premier ordre

Ce petit tableau permet de tracer la courbe 4.3.

$\omega\tau$	$ T(j\omega) _{dB}$	$\varphi$
$\rightarrow 0$	0	0
$\rightarrow \infty$	$-\infty$	$-90^\circ$
1	-3	$-45^\circ$
1/2	-1	$-26.5^\circ$
2	-7	$-63.5^\circ$

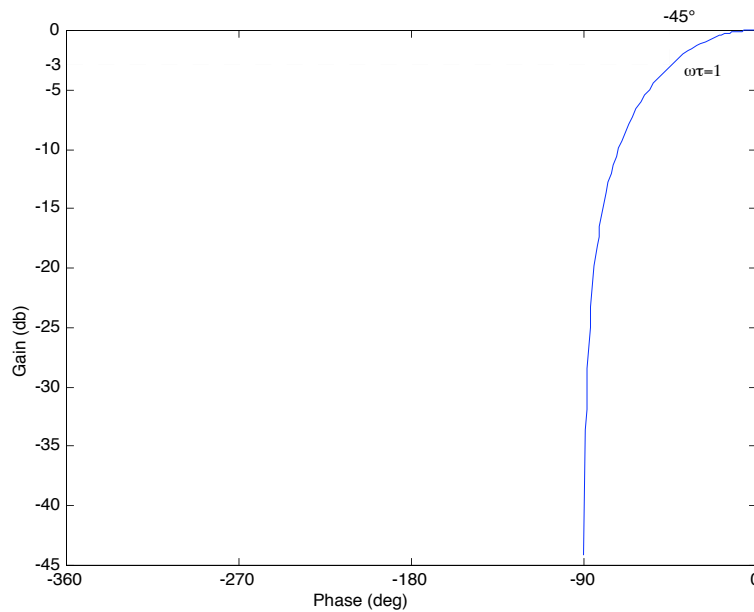


FIG. 4.3: Lieu de Black d'un système du premier ordre

#### 4.3.2 Système du second ordre

Ce tableau permet de tracer la courbe 4.4. Ce tableau est celui d'un système présentant une résonance, c'est à dire pour  $z < 0,7$ .

$\omega$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow \infty$	$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2z^2}$	$\omega_n$
$ T(j\omega) _{dB}$	0	$-\infty$	$-20 \log(2z\sqrt{1 - z^2})$	$-20 \log(2z)$
$\varphi$	0	$-180^\circ$	-	$-90^\circ$

Le lieu de Black représenté en figure 4.4 est tracé pour  $z = 0,3$ . Dans le document joint, vous trouverez des représentations pour plusieurs valeurs de  $z$ .

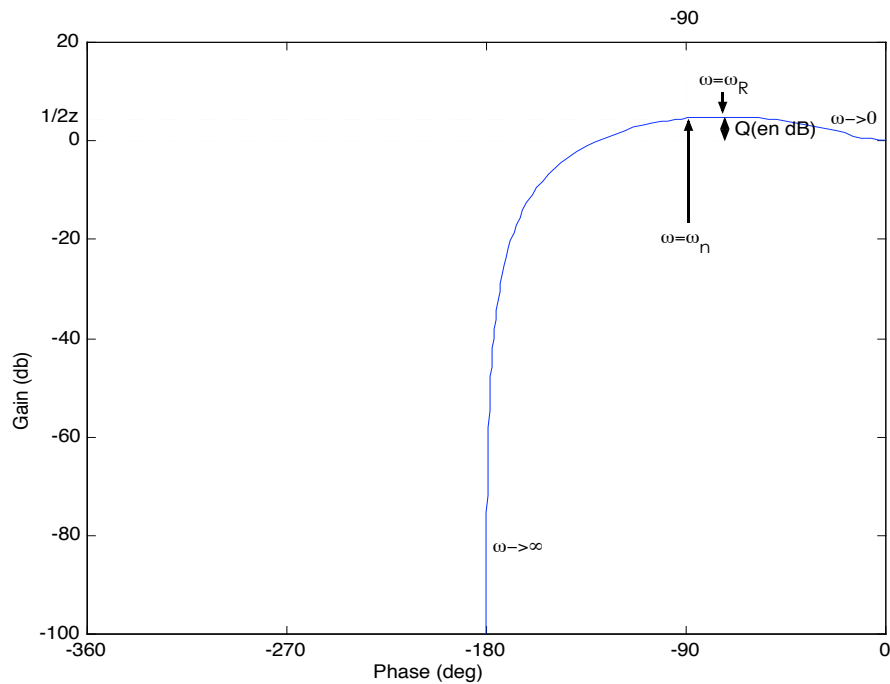


FIG. 4.4: Lieu de Black d'un système du second ordre

### 4.3.3 Remarques pratiques

#### Laisser la fonction de transfert factorisée !

Aussi bien dans la représentation de Bode que celle de Black, le tracé passe par le calcul du gain en  $dB$  et du déphasage de  $T(j\omega)$ . En laissant ce terme factorisé, il sera plus aisé d'étudier le gain et le déphasage de chaque facteur puis de sommer les gains (en  $dB$ ) et les déphasages (car l'argument d'un produit est la somme des arguments).

### Remarque sur la fonction arctangente

La fonction tangente n'est pas bijective. Pour définir et calculer l'arctangente, les calculatrices ne vous donneront qu'un résultat compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ . En fait, le résultat est à  $2k\pi$  près. En automatique, pour trouver la vraie valeur de l'argument, on ne doit pas oublier que :

- à part dans des cas exceptionnels, la sortie est en retard par rapport à l'entrée. Le déphasage devrait donc être négatif.
- Chaque pôle du système apporte un déphasage potentiel de  $-90^\circ$  et chaque zéro, une avance de phase de  $+90^\circ$ .

Par exemple, la fonction de transfert

$$T(p) = \frac{1}{p^3}$$

est d'ordre 3. En voulant calculer le déphasage de ce système, on forme :  $\arg\left(\frac{1}{-j\omega^3}\right)$  ce qui donne  $\pi/2$  ou bien  $-3\pi/2$ , la bonne valeur étant la seconde. Pour s'en persuader, on suit le conseil donné précédemment, et on factorise  $T(p)$  :

$$T(p) = \left(\frac{1}{p}\right) \left(\frac{1}{p}\right) \left(\frac{1}{p}\right)$$

Chacun de ces facteurs est un intégrateur pur qui présente un déphasage constant de  $-90^\circ$ . Le déphasage de  $T(p)$  est la somme des trois, donc  $-270^\circ$ .

## 4.4 Lieu de Nyquist

Le principe de ce lieu est de représenter  $T(j\omega)$  dans le plan complexe. On obtient une courbe paramétrique en fonction de  $\omega$  (voir figure 4.5).

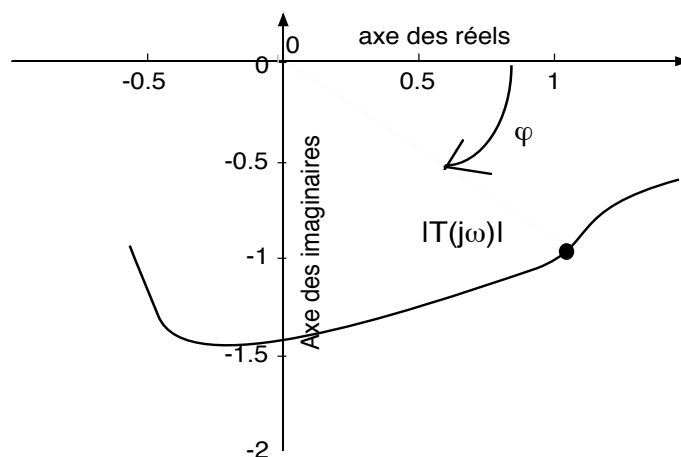


FIG. 4.5: Lieu de Nyquist

#### 4.4.1 Système du premier ordre

$$T(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} = \frac{K(1 - j\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} = x + jy$$

Il reste à tracer  $x(\omega)$  et  $y(\omega)$ . On peut montrer que cette courbe est un cercle. En effet :

$$x^2 + y^2 = Kx \quad \Rightarrow \quad \left(x - \frac{K}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{K^2}{4}$$

Le lieu est donc un demi-cercle de rayon  $K/2$  et de centre  $(K/2; 0)$ .

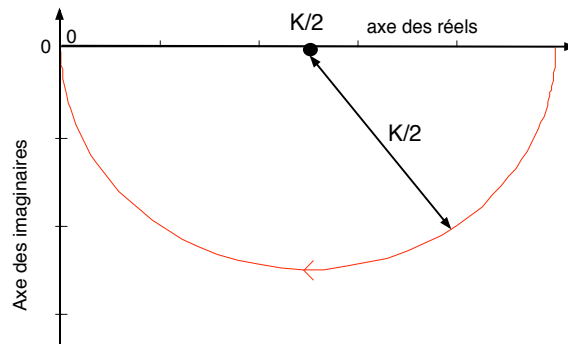


FIG. 4.6: Lieu de Nyquist d'un système du premier ordre

#### 4.4.2 Système du second ordre

Les lieux des systèmes du second ordre ne présentent pas de particularités. Un réseau de courbes pour plusieurs valeurs de  $z$  est fourni en annexe. La figure 4.7 a été tracée pour  $z = 0, 3$ .

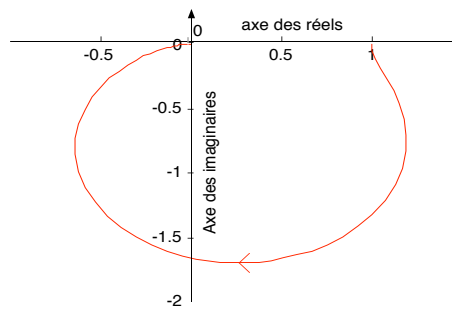


FIG. 4.7: Lieu de Nyquist d'un système du second ordre

## Chapitre 5

# Systèmes bouclés

### 5.1 Fonction de transfert d'un système bouclé

#### 5.1.1 Introduction

Nous rappelons qu'en automatique, le principe fondamental est d'utiliser le *feedback*. La *commande* (ce qui est appliqué au système) est élaborée en fonction de la *consigne* (ce que l'on veut) et de la *sortie*, ce qui peut se représenter par la figure 5.1.

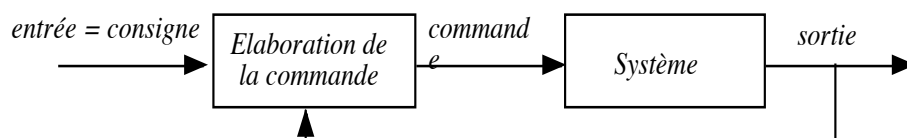


FIG. 5.1: Principe du *feedback*

En général, l'élaboration de la commande est basée sur

- un capteur pour mesurer la sortie
- un comparateur entre la consigne et la sortie
- un correcteur qui élabore la commande en fonction de la comparaison précédente, ce qui peut se représenter par la figure 5.2.

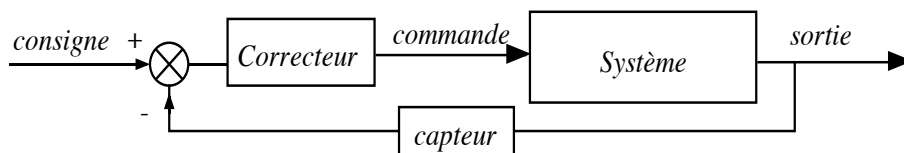


FIG. 5.2: Le correcteur est généralement placé en amont du système

Chaque boîte est représentée par une fonction de transfert. Avant d'étudier les correcteurs (comment les choisir, les régler, les mettre en place),

nous allons étudier les systèmes bouclés dans leur généralité. En particulier, à partir des fonctions de transfert de la chaîne directe et de la chaîne de retour, comment trouver la fonction de transfert équivalente de l'ensemble (voir figure 5.3).

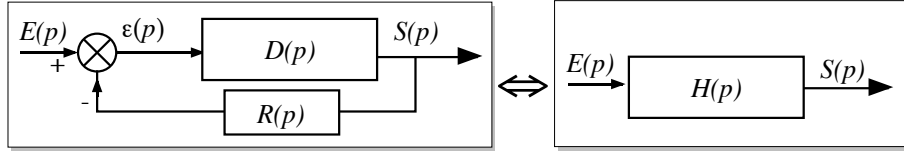


FIG. 5.3: Schéma d'un asservissement avec boucle de retour

### 5.1.2 Cas du retour unitaire

Il s'agit d'un cas particulier que l'on rencontrera souvent puisque même dans le cas où le retour n'est pas unitaire, on peut se ramener au cas d'un retour unitaire (voir plus loin). La représentation de ce système est identique à 5.3 avec  $R(p) = 1$ .

Pour trouver la fonction de transfert  $H(p)$  de l'ensemble, il faut former  $\frac{S(p)}{E(p)}$ . On a :

$$S(p) = D \cdot \varepsilon(p) = D(E(p) - S(p)) \Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{D(p)}{1 + D(p)}$$

### 5.1.3 Cas du retour non unitaire

Dans ce cas,  $R(p) \neq 1$ , ce qui donne :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{D(p)}{1 + R(p) \cdot D(p)}$$

On appellera *Fonction de Transfert en Boucle Ouverte* (FTBO), noté  $T(p)$  (par convention dans ce cours), le produit :

$$T(p) = D(p) \cdot R(p)$$

Par convention également, on notera  $H(p)$  la *Fonction de Transfert en Boucle Fermée* (FTBF). On retiendra :

$$H(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} \cdot \frac{1}{R(p)}$$

Cette relation montre qu'un retour non unitaire est équivalent à un retour unitaire suivi (en cascade) d'une fonction de transfert  $1/R(p)$ . C'est pourquoi, dans ce cours, on s'intéressera surtout aux retours unitaires.

Nous allons voir, dans ce chapitre, l'influence d'un retour unitaire pour les systèmes que nous connaissons.

#### 5.1.4 Bouclage sur un système du premier ordre

Un système du premier ordre est caractérisé par sa fonction de transfert en BO :

$$T(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

En boucle fermée, ce système sera équivalent à un système dont la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} = \frac{K}{1 + K} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\tau}{1+K}p} = \frac{K'}{1 + \tau'p}$$

avec  $K' = \frac{K}{1+K}$  et  $\tau' = \frac{\tau}{1+K}$ . On en conclut qu'un premier ordre en BO reste un premier ordre en BF dont les caractéristiques (gain et constante de temps) sont divisées par  $1 + K$ . Il est donc plus rapide et son gain est toujours plus petit que 1. Si  $K \gg 1$ , le gain  $K'$  tend vers 1 et sa constante de temps est fortement diminuée.

#### 5.1.5 Bouclage sur un système du second ordre

Un système du second ordre est caractérisé par sa fonction de transfert en BO :

$$T(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_n}p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

La fonction de transfert de ce système en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} = \frac{K}{1 + K} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2z}{\omega_n(1+K)}p + \frac{p^2}{\omega_n^2(1+K)}} = \frac{K'}{1 + \frac{2z'}{\omega_n'}p + \frac{p^2}{\omega_n'^2}}$$

avec  $K' = \frac{K}{1+K}$  et  $z' = \frac{z}{\sqrt{1+K}}$  et  $\omega_n' = \omega_n\sqrt{1+K}$ .

On en déduit que le gain est plus faible et inférieur à 1, que l'amortissement est plus faible et que la pulsation naturelle est plus grande qu'en BO. Il est important de noter que le système est toujours un deuxième ordre. La diminution de l'amortissement peut avoir comme conséquence que la réponse à l'échelon peut être oscillante en BF et pas en BO.

## 5.2 Interprétation Géométrique : Abaque de Black

**Définition :** *L'abaque de Black est un réseau de courbes qui permet de déterminer, dans le plan de Black, la courbe de réponse harmonique d'un système en boucle fermée à retour unitaire à partir de sa courbe de réponse harmonique en boucle ouverte*

L'abaque de Black (réseau de courbes) permet d'avoir le lieu de Black d'un système en BF à partir de son lieu de Black en BO, sans avoir à calculer l'expression analytique de la fonction de transfert en BF.

L'utilisation de l'abaque de Black est la suivante : on trace le lieu de Black en BO en ne tenant compte que des échelles sur les axes des abscisses et des ordonnées. L'intersection du lieu en BO avec le réseau de courbes donne les coordonnées d'un point à même pulsation de la courbe de Black en BF.

En fait, on ne trace que rarement le lieu de Black en BF mais on déduit de l'abaque les caractéristiques du système en BF suivantes :

- fréquence de résonance du système bouclé  $\omega'_R$  : c'est la fréquence à laquelle la courbe en BO est tangente à la plus petite courbe de module
- facteur de résonance

$$Q' = \frac{|H(j\omega)|_{\omega=\omega'_R}}{|H(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0}}$$

- pulsation de coupure  $\omega'_c$  et bande passante à  $-3dB$  ou à  $-6dB$  :

$$|H(j\omega'_c)|_{dB} - |H(0)|_{dB} = -3dB \text{ ou } -6dB$$

**Gain réglable :** Il est courant que les fonctions de transfert en BO des systèmes présentent un gain réglable ( $T(p) = K.G(p)$  avec  $K$  le gain réglable). La technique la plus souvent utilisée est de tracer le lieu de Black de  $G(p)$  puis de traduire cette courbe verticalement de  $20 \log(K)$  pour avoir le lieu de Black de  $T(p)$ . Le lieu de Black est aussi souvent utilisé pour savoir comment régler le gain  $K$  pour avoir telle ou telle propriété en BF. Cette fois, on cherche de combien il est nécessaire de traduire la courbe de  $G(p)$  pour avoir ces propriétés. La translation nécessaire donne le gain à afficher pour avoir la propriété désirée.

## 5.3 Structures complexes : algèbre des schémas-blocs

### 5.3.1 Simplification de ces systèmes

Un système est parfois décrit par un ensemble de fonctions de transfert interconnectées par des comparateurs, des points de dérivation, des retours ... Pour trouver la fonction de transfert équivalente à l'ensemble, on peut :

- soit poser des variables intermédiaires puis poser les équations reliant toutes ces variables, puis enfin éliminer par calcul les variables intermédiaires
- soit simplifier pas à pas la représentation en utilisant les transformations décrites dans la feuille jointe à ce poly.

**Exemple :** Un système est décrit dans la figure 5.4 où les  $G_i$  et les  $R_i$  sont des fonctions de transfert. On cherche la fonction de transfert équivalente à l'ensemble.

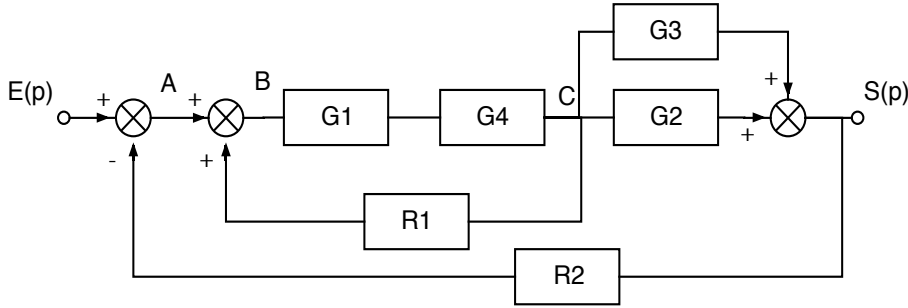


FIG. 5.4: Schéma-bloc d'un système complexe

- On utilise les variables intermédiaires  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Les équations reliant ces variables sont :

$$\begin{aligned} A &= E - R_2 S & S &= (G_2 + G_3)G_1G_4B \\ B &= A + R_1C & B(1 - R_1G_1G_4) &= A \\ C &= G_1G_4B \\ S &= (G_2 + G_3)C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{(G_2 + G_3)G_1G_4A}{(1 - R_1G_1G_4)} \\ S &= \frac{(G_2 + G_3)G_1G_4E}{1 - R_1G_1G_4 + (G_2 + G_3)G_1G_4R_2} \end{aligned}$$

- On peut préférer la méthode par simplifications successives qui génère moins de calculs et donc moins d'erreurs, mais qui nécessite de disposer de la feuille en annexe. Pour le problème posé, on peut voir que le schéma en figure 5.5 est équivalent à la figure 5.4. On en déduit alors directement la fonction de transfert :

$$S = \frac{(G_2 + G_3)G_1G_4E}{1 - R_1G_1G_4 + (G_2 + G_3)G_1G_4R_2}$$

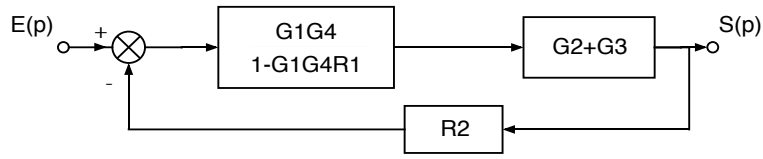


FIG. 5.5: Schéma-bloc après simplifications

### 5.3.2 Cas des entrées multiples

Certains systèmes sont décrits par un schéma-bloc comportant plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties. Donner les fonctions de transfert d'un tel système consiste à écrire chacune des sorties en fonction de toutes les entrées. Pour calculer ces fonctions de transfert, la méthode est d'utiliser le principe de superposition des systèmes linéaires : pour chaque signal d'entrée, on calcule chacune des sorties en ne considérant pas les autres entrées (on fait comme si elles étaient nulles). On somme ensuite pour chaque sortie les fonctions de transfert ainsi trouvées.

**Exemple :** Dans le système décrit en figure 5.6, on remarque deux entrées  $E$  et  $U$  et une sortie  $S$ .

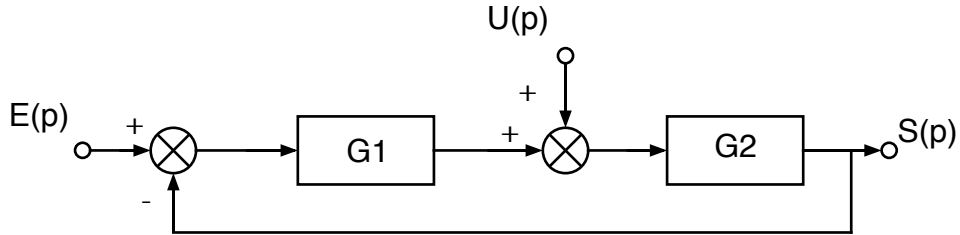


FIG. 5.6: Schéma-bloc d'un système à deux entrées

Calculons  $S$  en fonction de  $U$  (on pose  $E = 0$ ) :

$$S_u(p) = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot U(p)$$

Calculons  $S$  en fonction de  $E$  (on pose  $U = 0$ ) :

$$S_e(p) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot E(p)$$

Ce qui donne :

$$S(p) = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot U(p) + \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot E(p)$$

## Chapitre 6

# Pôles d'un système bouclé - Lieu d'Evans

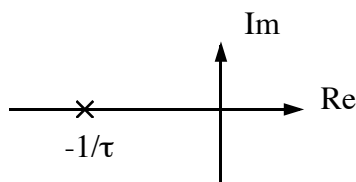
### 6.1 Position des pôles et des zéros d'un système en BO dans le plan complexe

On représente par le symbole  $\times$  les pôles d'un système. Les pôles sont les valeurs qui annulent le dénominateur de la fonction de transfert. On représente par des  $\circ$  les zéros d'un système. Les zéros sont les valeurs qui annulent le numérateur de la fonction de transfert.

#### 6.1.1 Systèmes du premier ordre

$$T(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Ce système a un pôle :  $-1/\tau$ . Plus ce pôle est loin de l'origine, plus le système est rapide.



#### 6.1.2 Système du second ordre

Si  $z > 1$ , il y a deux pôles réels. La constante de temps est liée à la position du pôle le plus près de l'origine (pôle dominant).

Si  $z = 1$ , il y a un pôle double en  $-w_n$ .

Si  $z < 1$ , il y a deux pôles complexes conjugués (voir figure 6.1). On retrouve la valeur de  $\varphi$  :

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z}$$

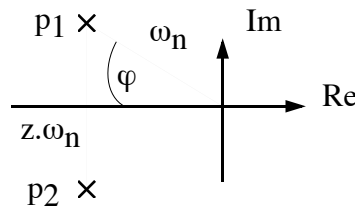
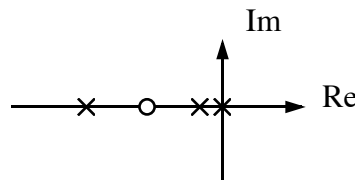


FIG. 6.1: Lieu des pôles d'un deuxième ordre à faible amortissement

### 6.1.3 Autre systèmes

Exemple :

$$T(p) = \frac{K(p+3)}{p(p+1)(p+5)}$$



## 6.2 Principe du lieu d'Evans

Soit un système en BF à retour unitaire tel que la fonction de transfert en BO soit :

$$T(p) = \frac{K.N(p)}{D(p)}$$

où  $N(p)$  et  $D(p)$  sont des polynômes (respectivement numérateur et dénominateur de  $T(p)$ ) et  $K$  est le gain du système. Ce système est équivalent à une fonction de transfert  $H(p)$  :

$$H(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} = \frac{K.N(p)}{D(p) + K.N(p)}$$

Les pôles de ce système en BF vérifient l'équation caractéristique suivante :

$$D(p) + K.N(p) = 0 \quad (6.1)$$

Si le facteur  $K$  est une variable réglable de notre système, la position des pôles en BF va varier en fonction de  $K$ . *Le lieu d'Evans ou lieu des pôles est le lieu géométrique des racines de l'équation 6.1 tracé dans le plan complexe quand on fait varier  $K$  de 0 à l'infini.* La connaissance de ce lieu permet de prévoir le comportement du système en BF quand  $K$  varie car la position des pôles renseigne sur la rapidité et la stabilité du système. Exemple : Si l'un des pôles est à partie réelle positive, le système est instable.

## 6.3 Propriété et construction

### 6.3.1 Symétrie par rapport à l'axe des réels

Quelque soit la valeur de  $K$ , les pôles complexes vont toujours par paires conjuguées.

### 6.3.2 Nombre de branches

Le nombre de pôles en BF est égal au nombre de pôles en BO. C'est l'ordre du système.

### 6.3.3 Points de départ

Pour  $K \rightarrow 0$ , l'équation 6.1 devient  $D(p) = 0$ . On retrouve les pôles en BO.

### 6.3.4 Points d'arrivée

Pour  $K \rightarrow \infty$ , l'équation 6.1 devient  $N(p) = 0$ . On retrouve les zéros de la fonction de transfert en BO. Ils sont donc les points d'arrivée de certaines branches (car il y a souvent moins de zéros que de pôles).

### 6.3.5 Branches infinies

Les branches qui ne vont pas vers un point d'arrivée partent à l'infini. Si  $n$  est le nombre de pôles et  $m$  le nombre de zéros du système en BO, les caractéristiques des asymptotes sont :

- Directions asymptotiques : les multiples impairs de  $\frac{\pi}{n-m}$

- Point de concours des asymptotes sur l'axe des réels a pour abscisse :

$$\frac{\sum \text{pôles} - \sum \text{zéros}}{n - m}$$

### 6.3.6 Position du lieu appartenant à l'axe des réels

Un point  $M$  de l'axe des réels appartient au lieu si et seulement si le nombre de pôles et de zéros réels situés à droite de  $M$  est impair. Exemple : voir schéma 6.2

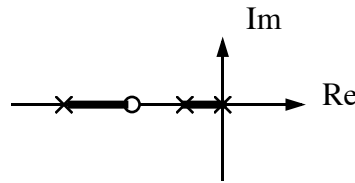


FIG. 6.2: portion de l'axe des réels appartenant au lieu

### 6.3.7 Points de branchements

Ce sont les points où le lieu quitte ou rejoint l'axe des réels. Cela correspond à des valeurs de  $K$  telles que le système en BF présente des pôles doubles. Pour trouver ces points, il y a deux méthodes possibles :

1. on cherche les solutions de l'équation :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{p - z_j}$$

où les  $p_i$  et  $z_j$  sont respectivement les pôles et les zéros de la fonction de transfert en BO,  $n$  est le nombre de pôles (ordre) et  $m$ , le nombre de zéros du système en BO.

2. on pose  $y(x) = \frac{D(x)}{N(x)}$  et on cherche les valeurs de  $x$  qui annule  $\frac{dy}{dx}$ .

### 6.3.8 Intersection avec l'axe des imaginaires

Si le lieu coupe l'axe des imaginaires, c'est que pour certaines valeurs de  $K$ , la fonction de transfert en BF a des pôles imaginaires purs. Pour trouver ces points, on pose  $p = jy$  puis on sépare la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation caractéristique 6.1 pour trouver la valeur de  $y$  et de  $K$ .

### 6.3.9 tangente en un point de départ ou d'arrivée

Si ce point est réel, la tangente est horizontale sauf s'il s'agit d'un point de séparation auquel cas, la tangente est verticale. La tangente au départ d'un pôle complexe est donné par :

$$\theta_d = \pi + \sum \alpha_i - \sum \beta_j$$

La tangente au point d'arrivée sur un zéro complexe est donné par :

$$\theta_\alpha = \pi + \sum \beta_j - \sum \alpha_i$$

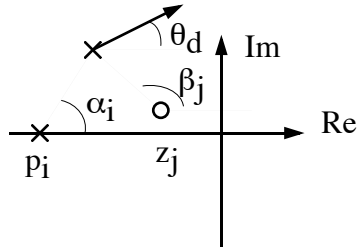


FIG. 6.3: Construction d'une tangente à un point de départ ou d'arrivée

### 6.3.10 Construction détaillée du lieu

Dans certains cas, en posant  $p = x + jy$  et en reportant dans l'équation caractéristique, on peut faire apparaître des portions du lieu.