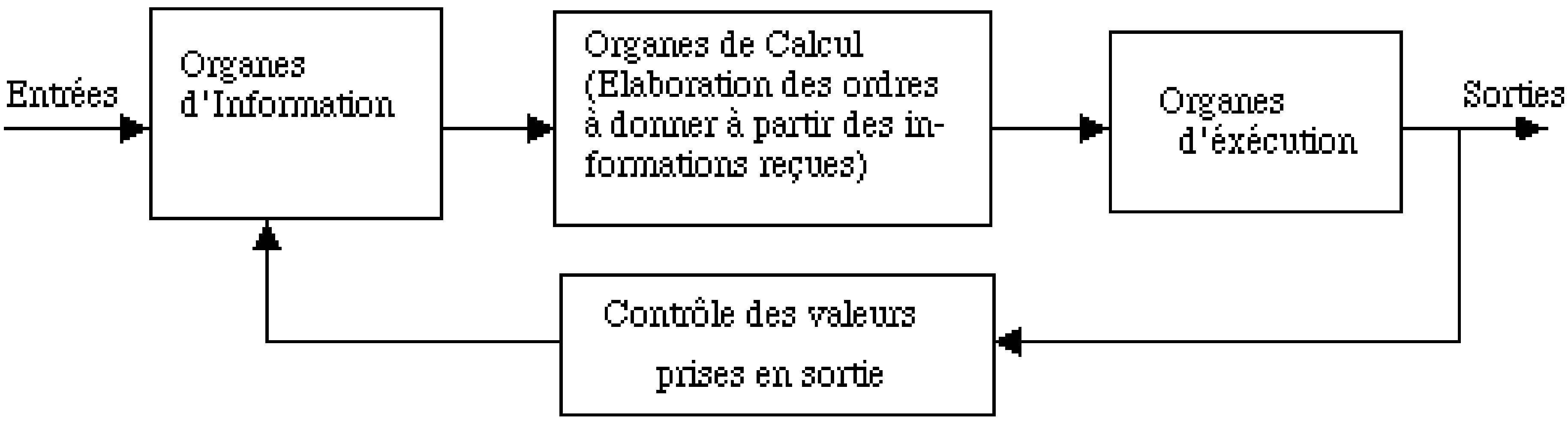
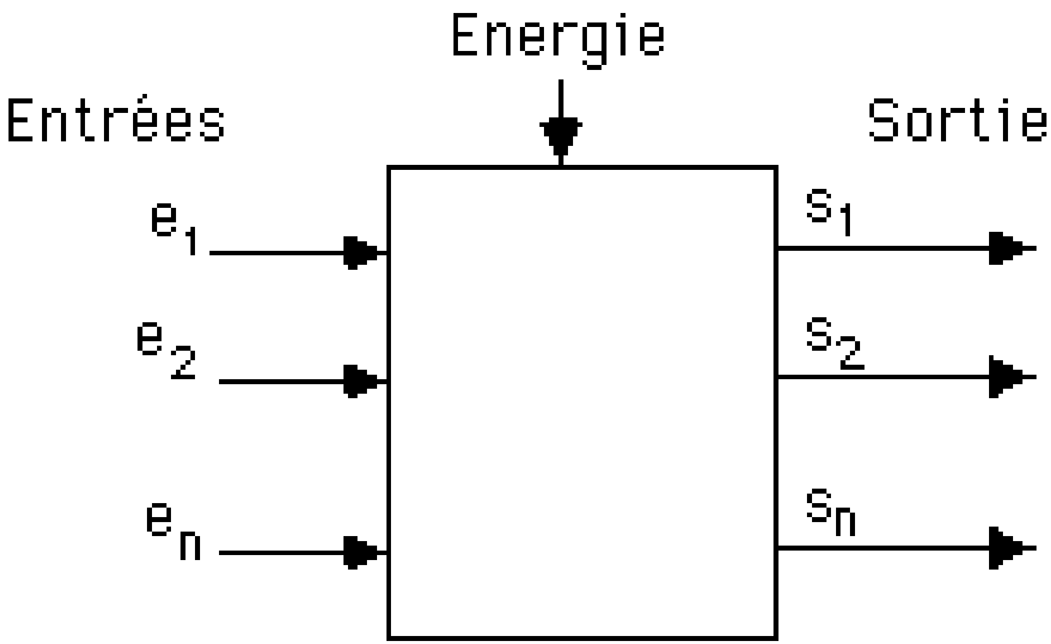
Introduction à l'étude des Systèmes Asservis Linéaires

Généralités



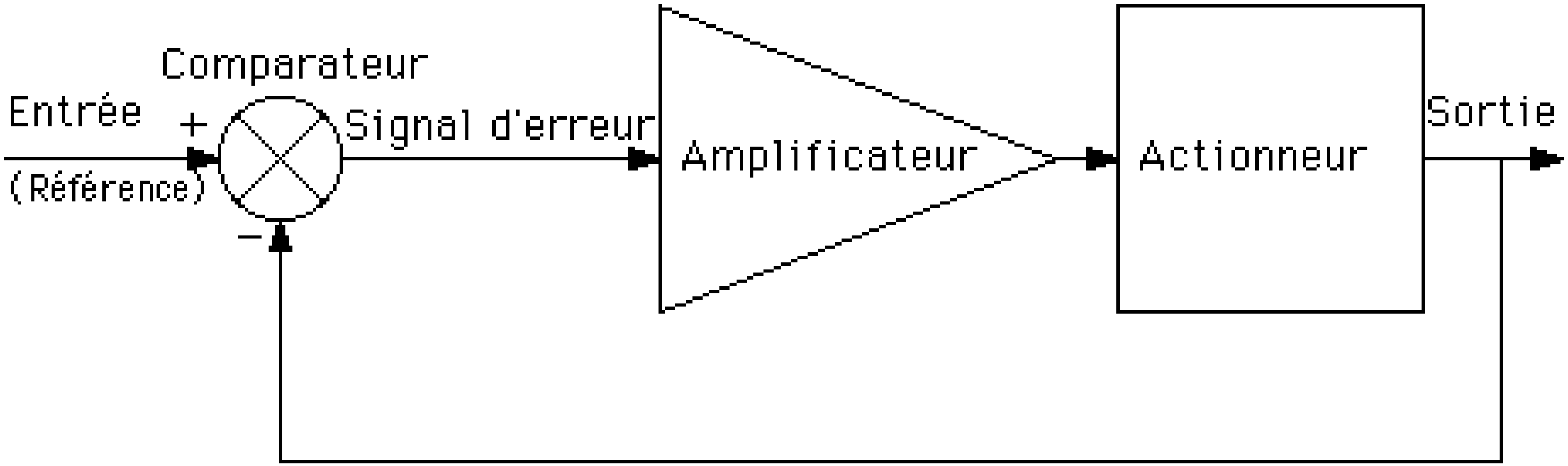
Définitions

Système de commande



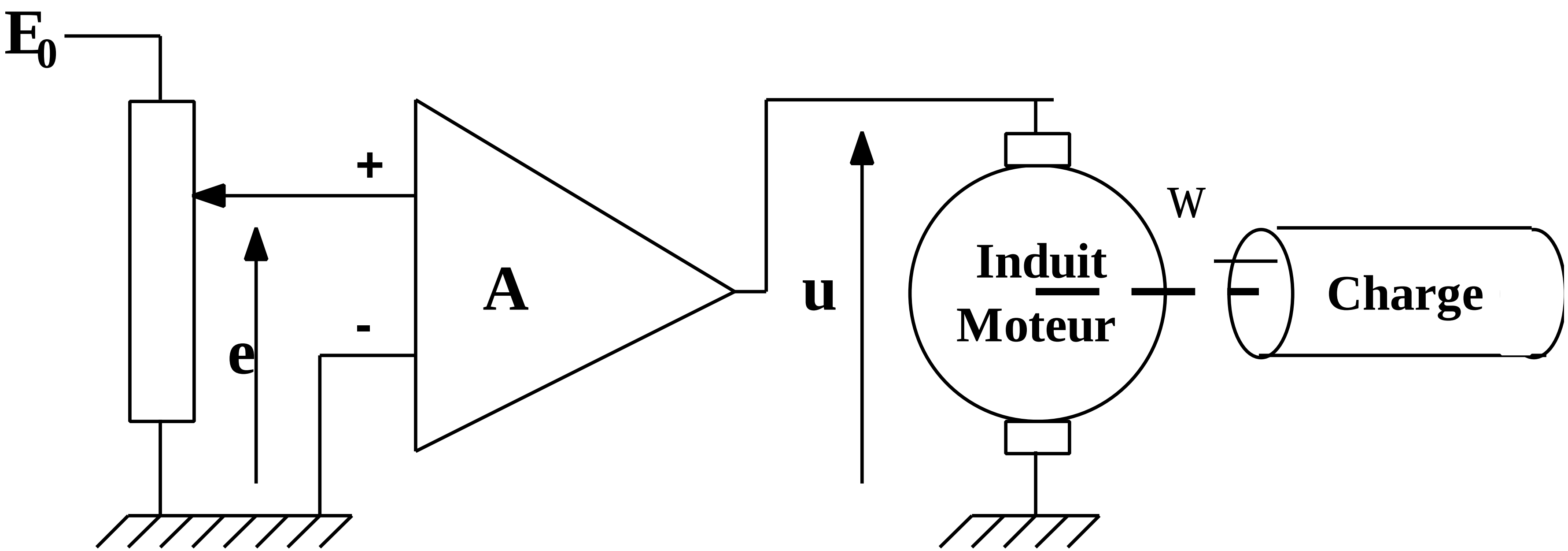
Définitions

Système asservi



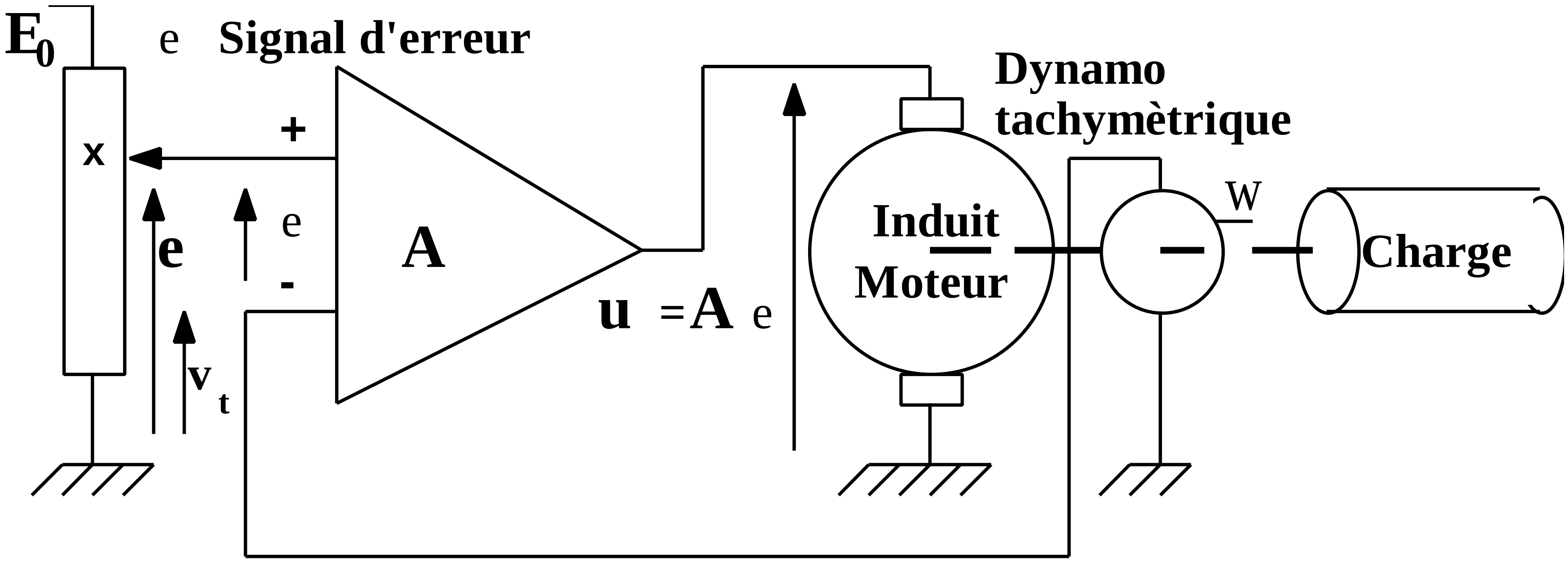
Définitions

Exemple : commande de la vitesse de rotation d'un moteur



Définitions

Exemple : asservissement de la vitesse de rotation d'un moteur (suite)



Constitution d'un système asservi

Capteur

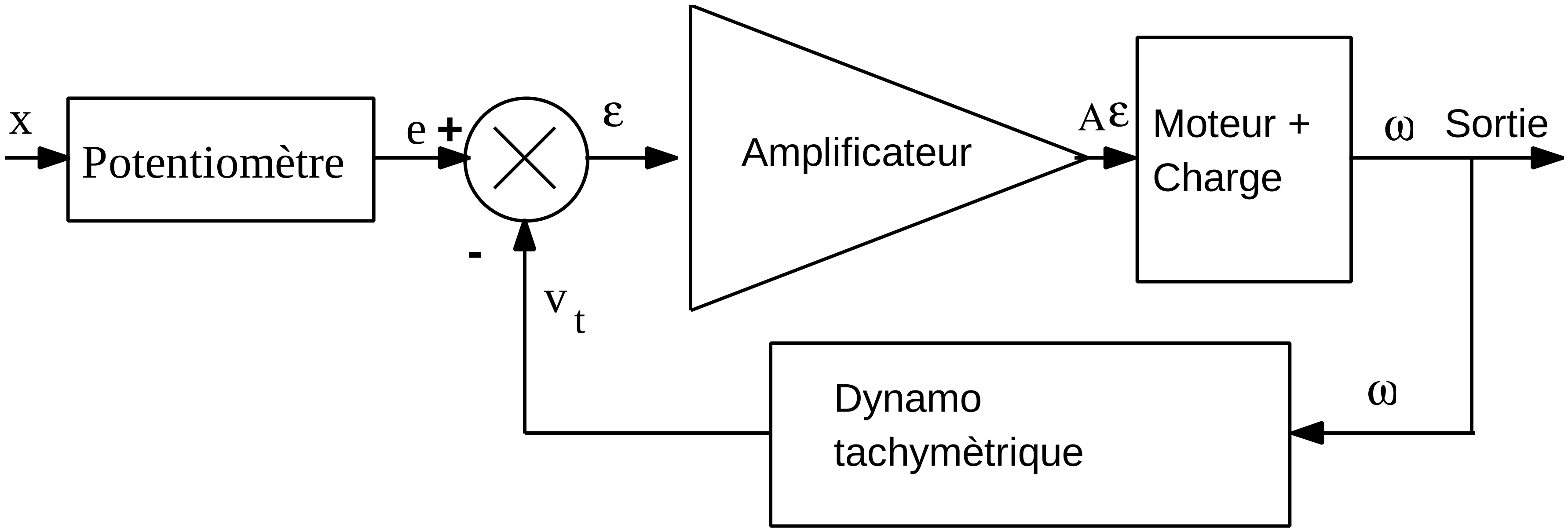
Comparateur

Amplificateur

Actionneur

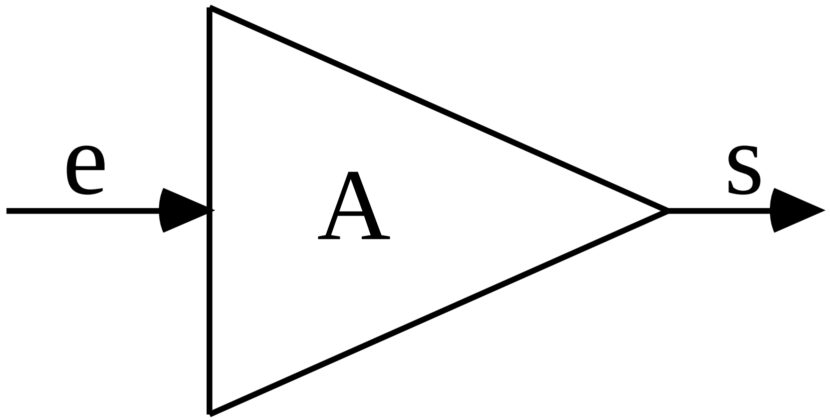
Réseau correcteur

Schéma fonctionnel



Transmittance des systèmes linéaires

Introduction



$$s = A\,e$$

Transmittance des systèmes linéaires

Linéarité

[1]

$$b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_0\, s(t) = a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots + a_0\, e(t)$$

en régime permanent, e = cte → s = cte . C’est une droite passant par l’origine. s/e = ao/bo = k, gain statique du système

Théorème de superposition

Linéarisation d’un système non linéaire

Transmittance des systèmes linéaires

Equation différentielle du 1^er ordre

$$t \frac{ds}{dt} + s = e \qquad [2] \qquad \text{sgessm} \qquad s(t) = s_0(t)\exp(-\frac{t}{t})$$

$$s_0(t) = \int_0^t e(x) \frac{\exp(\frac{x}{t})}{t} \, dx$$

$$s(t) = \int_0^t e(x) \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{t-x}{t}\right] dx \qquad [3]$$

$$h(t) = \frac{1}{t}\exp(-\frac{t}{t})\, u(t) \qquad s(t) = \int_0^t e(x)\, h(t-x)\, dx = \int_0^\infty e(x)\, h(t-x)\, dx = e(t) * h(t)$$

Transmittance des systèmes linéaires

Recherche d'un opérateur

Réponse à l'impulsion de Dirac

$$d(t) = 0 \quad si \quad t \neq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} d(t)\, dt = 1 \qquad s(t) = \frac{1}{t}\exp(-\frac{t}{t})\int_0^t d(x)\exp(\frac{x}{t})\, dx = h(t)$$

Est-ce suffisant pour caractériser un système ?

$$TF[\, d(t)] = \int_0^{\infty} d(t)\, \exp(-jwt)\, dt = 1$$

Existe-t-il un opérateur dans le cas d'un signal d'entrée e(t) quelconque ?

$$TL[s(t)] = \int_0^{+\infty} s(t)\, \exp(-pt)\, dt = \int_0^{+\infty} [e(t) * h(t)]\exp(-pt)\, dt = \int_{t=0}^{+\infty} [\int_{x=0}^{+\infty} [e(x)\, h(t-x)\, dx]\exp(-pt)\, dt$$

$$\int_{x=0}^{+\infty} e(x)[\int_{t=0}^{+\infty} [\, h(t-x)\;\; \exp(-pt)\, dt]\, dx \qquad u = t - x \qquad S(p) = E(p)\,.\,H(p)$$

Transmittance des systèmes linéaires

Transformée de Laplace

$$TL[\frac{df(t)}{dt}] = \int_0^{+\infty} f(t)\exp(-pt)\,dt = pF(p) - f(0+)$$

$$TL[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}] = p\,(TF[\frac{df(t)}{dt}] - f(0+)) = p^2F(p) - pf(0+) - f^{'}(0+)$$

$$TL[\frac{d^n f(t)}{dt^n}] = p^nF(p) - p^{n-1}f(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+)$$

$$TL[\frac{d^n f(t)}{dt^n}] = p^nF(p)$$ si les conditions initiales sont nulles

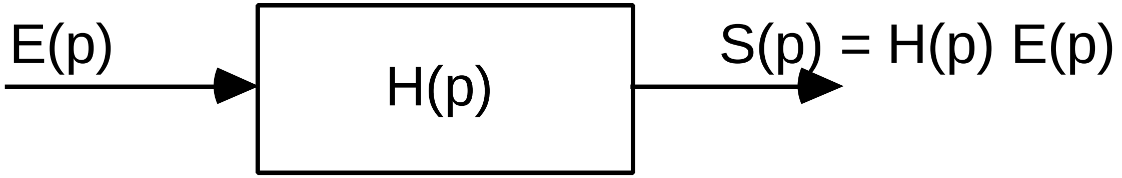
Transmittance des systèmes linéaires

Définition de la Transmittance d'un système

L'équation différentielle [1] donne

$$\left(b_n\, p^{n} + b_{n-1}\, p^{n-1} + \ldots\ldots + b_1\, p + b_0\right) S(p) = \left(a_m\, p^{m} + a_{m-1}\, p^{m-1} + \ldots\ldots + a_1\, p + a_0\right) E(p)$$

$$S(p) = \left(\frac{a_m\, p^{m} + a_{m-1}\, p^{m-1} + \ldots + a_1\, p + a_0}{b_n\, p^{n} + b_{n-1}\, p^{n-1} + \ldots + b_1\, p + b_0}\right) E(p) \;=\; H(p)\, E(p)$$

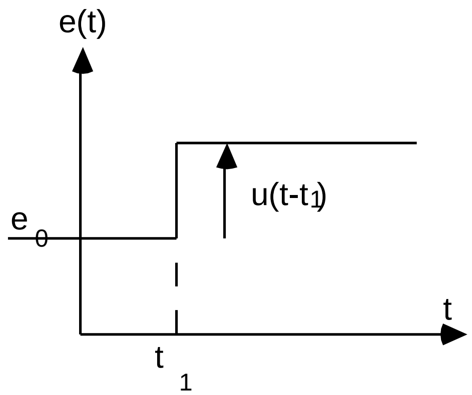


Transmittance des systèmes linéaires

Cas ou les conditions initiales ne sont pas nulles

$$\left(b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots\ldots + b_1 p + b_o\right) S(p) - I(p) = \left(a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \ldots\ldots + a_1 p + a_o\right) E(p) - J(p)$$

$$S(p) = \frac{\left(a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \ldots + a_1 p + a_0\right) E(p) + I(p) - J(p)}{\left(b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0\right)} = H(p)\, E(p) + \frac{\left(I(p) - J(p)\right)}{\left(b_n p^n + \ldots + b_1 p + b_0\right)}$$



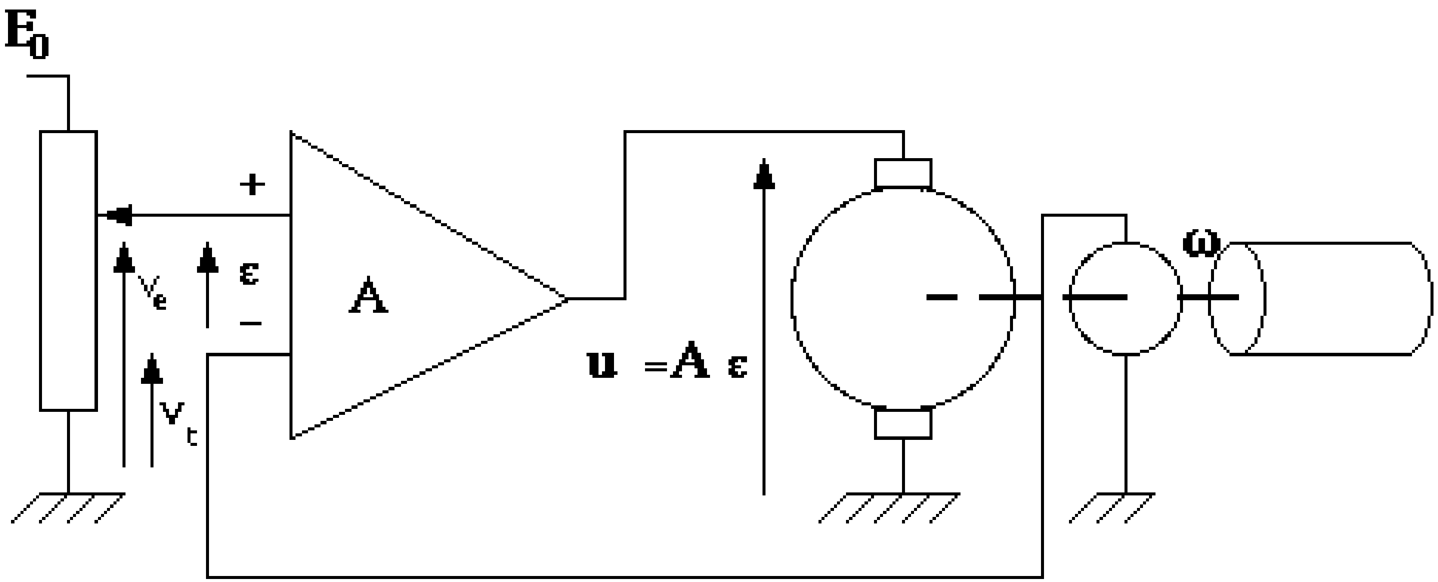
Théorème de superposition:

$e(t) = e_0 + u(t-t_1)$

$s(t) = s_0 + s_1(t)$

Transmittance des systèmes linéaires

Exemples d'utilisation de la transmittance dans un schéma fonctionnel



Transmittance des systèmes linéaires

Exemples d’utilisation de la transmittance dans un schéma fonctionnel (suite)

Equations électromagnétiques et mécaniques classiques

$v_e = E_0\ x$ $\quad v_t = k_t w$ $\quad e = v_e - v_t$ $\quad u = Ae$

$u = e^{'} + rI$ $\quad e' = k_e w$: fcem du moteur $\quad$ r : résistance de l’induit $\quad$ l # 0

$ui = e'I + rI^2$: puissance électrique mise en jeu dans l’induit

rI^2 : pertes par effet joule $\quad e'I \rightarrow$ couple moteur $\quad e'I = C_m w$ $\quad C_m = \dfrac{e'I}{w} = k_m I$

$$J\frac{d^2q}{dt^2} = J\frac{dw}{dt} = \sum couples = C_{moteur} - C_{\text{résistant}} = C_m$$

Transmittance des systèmes linéaires

Exemples d'utilisation de la transmittance dans un schéma fonctionnel (suite)

Transformées de Laplace des équations électromagnétiques et mécaniques

$$v_e(p) = E_0\ x(p) \qquad v_t(p) = k_t w(p) \qquad e(p) = v_e(p) - v_t(p) \qquad u(p) = Ae(p)$$

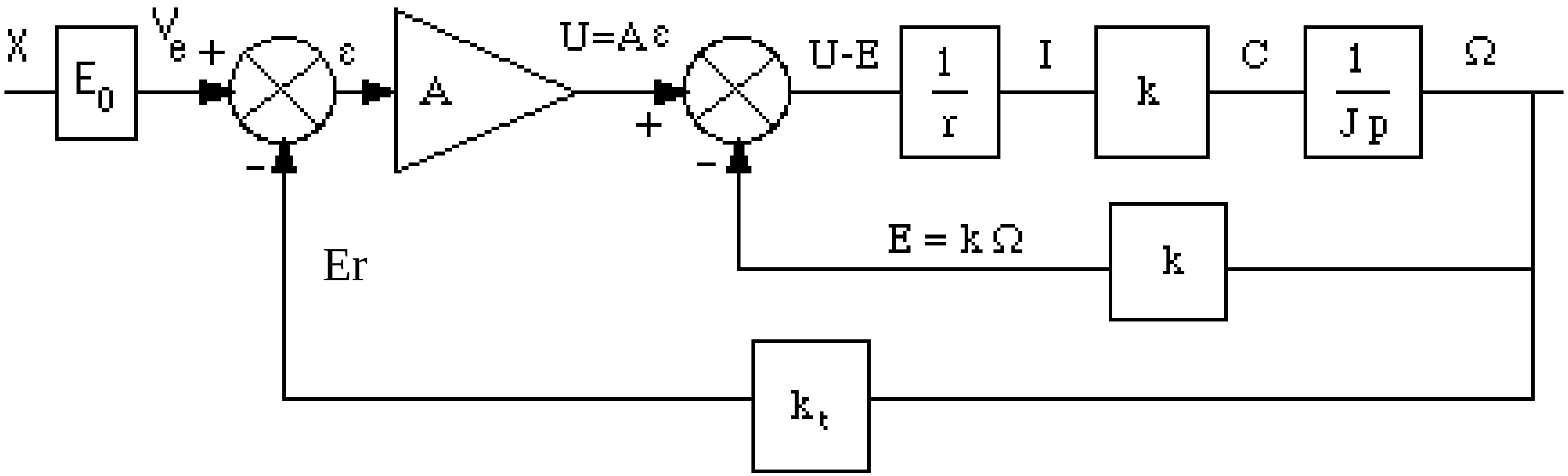
$$I(p) = \frac{u(p) - e'(p)}{r} \qquad e'(p) = k_e w(p)$$

$$C_m(p) = k_m I(p)$$

$$J\ p^2 q(p) = J\ p w(p) = C_m(p)$$

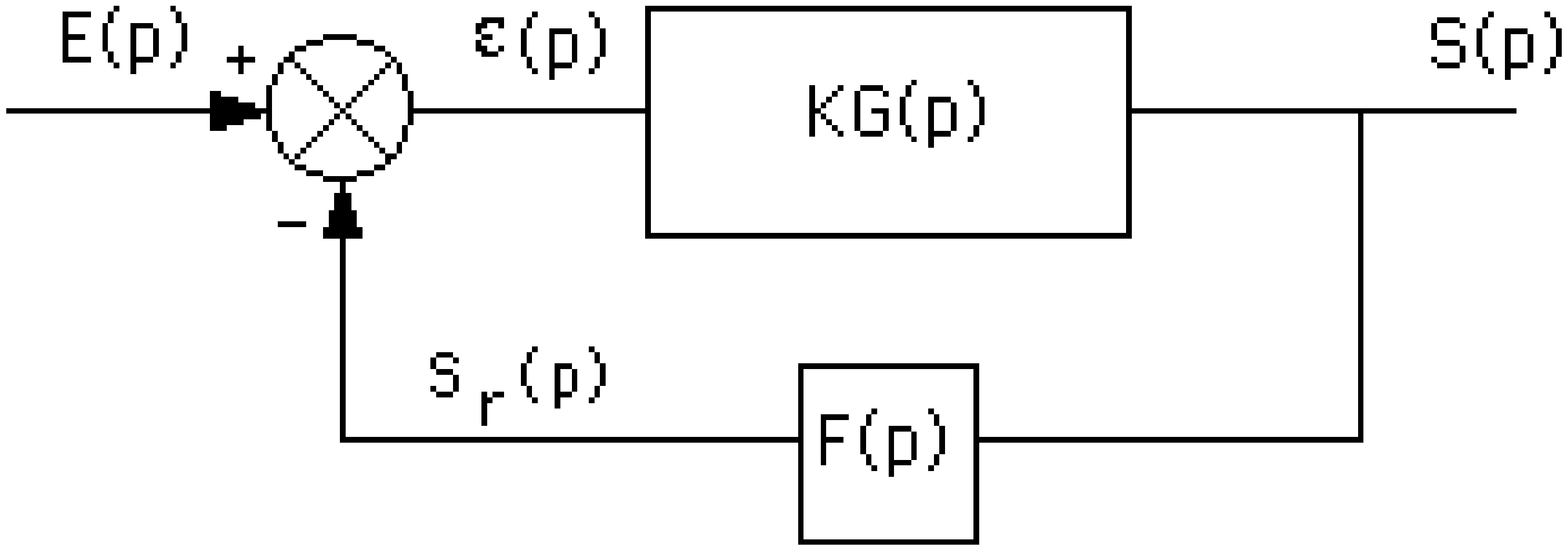
Transmittance des systèmes linéaires

Exemples d'utilisation de la transmittance dans un schéma fonctionnel (suite)



Relations fondamentales dans les systèmes asservis

1 – Calcul des transmittances



Relations fondamentales dans les systèmes asservis

Calcul des transmittances (suite)

$K\,G(p)$: transmittance de la chaîne directe

$F(p)$: transmittance de la chaîne de retour

$H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}$: transmittance de la chaîne fermée

$T(p)=\dfrac{S_r(p)}{e(p)}=K\,G(p)\,F(p)$: transmittance de la chaîne ouverte

$\dfrac{e(p)}{E(p)}$: transmittance relative au signal d’erreur

Relations fondamentales dans les systèmes asservis

Calcul des transmittances (suite)

$$S(p) = K\,G(p)\,e(p) = K\,G(p)\left[E(p) - S_r(p)\right] = K\,G(p)\left[E(p) - F(p)\,S(p)\right] = \frac{K\,G(p)\,E(p)}{1 + K\,G(p)\,F(p)}$$

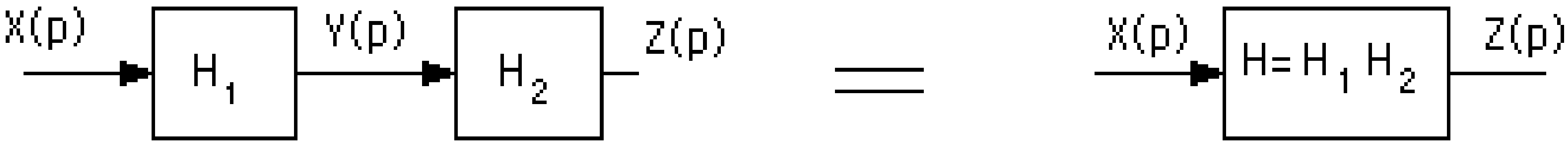
$H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{K\,G(p)}{1 + K\,G(p)}$: transmittance de la chaîne fermée

$\dfrac{e(p)}{E(p)} = \dfrac{1}{1 + K\,G(p)\,F(p)}$: transmittance relative au signal d'erreur

cas particulier important : $F(p) = 1$ $\qquad \dfrac{e(p)}{E(p)} = \dfrac{1}{1 + K\,G(p)}$

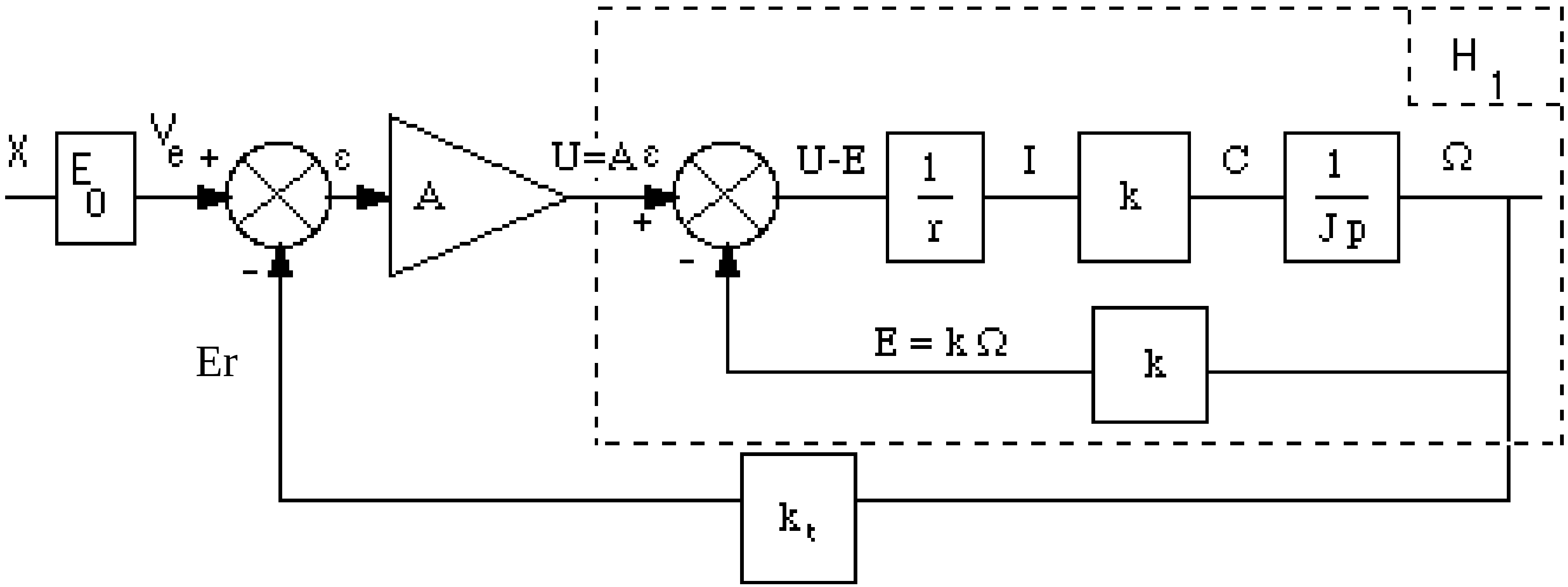
Relations fondamentales dans les systèmes asservis

Calcul des transmittances (suite)



Relations fondamentales dans les systèmes asservis

2 - Simplification des systèmes à boucles multiples

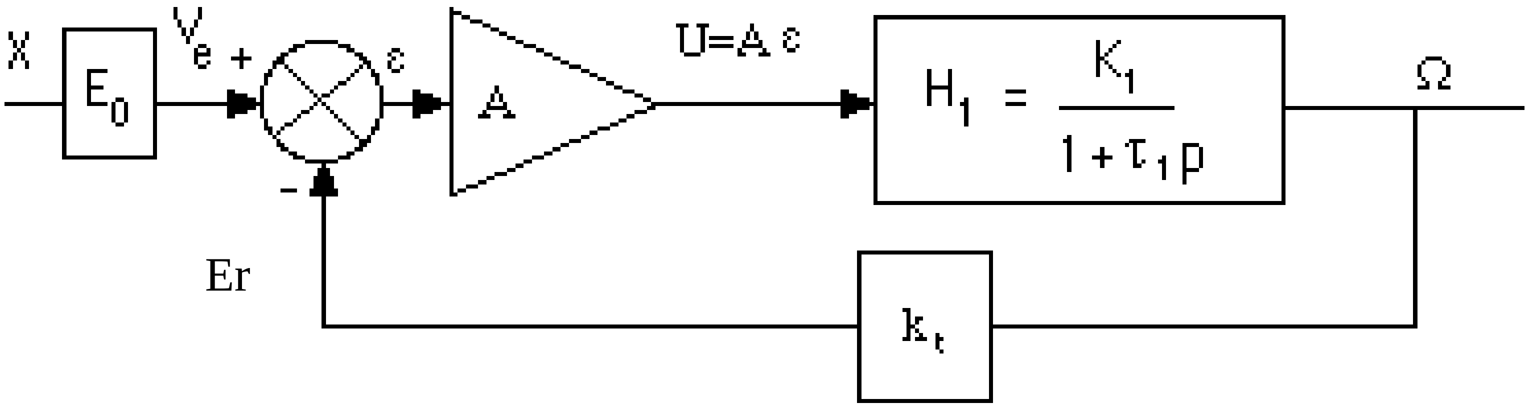


$$H_1(p) = \frac{\dfrac{k}{rJp}}{1 + \dfrac{k^2}{rJp}} = \frac{K_1}{1 + t_1 p}$$

K_1 : gain statique, t_1 : constante de temps

Relations fondamentales dans les systèmes asservis

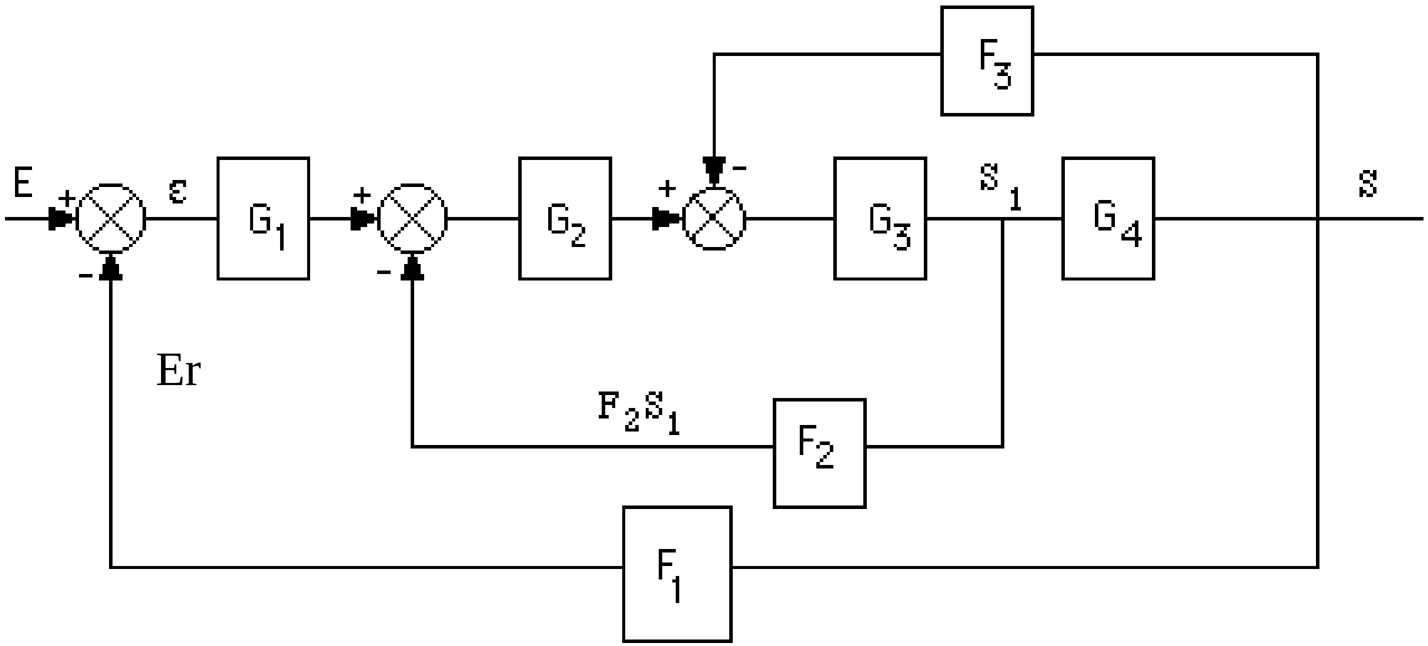
Simplification des systèmes à boucles multiples (suite)



$$H(p) = E_0 \frac{AH_1}{1+AH_1k_t} = E_0 \frac{\dfrac{AK_1}{1+t_1p}}{1+\dfrac{AK_1k_t}{1+t_1p}} = \frac{E_0AK_1}{1+AK_1+t_1p} = \frac{K}{1+t\ \ p}$$

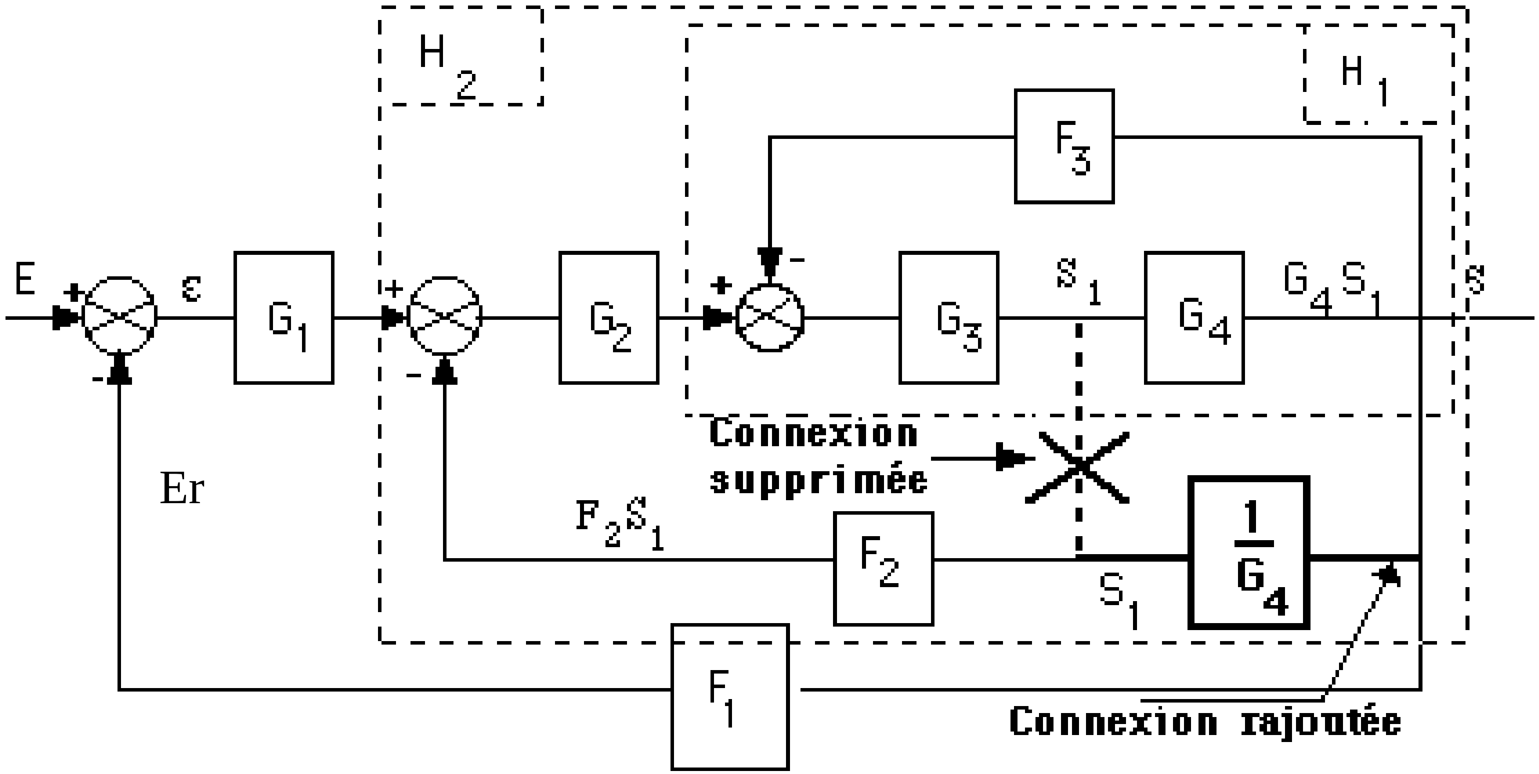
Relations fondamentales dans les systèmes asservis

3 – Boucles imbriquées



Relations fondamentales dans les systèmes asservis

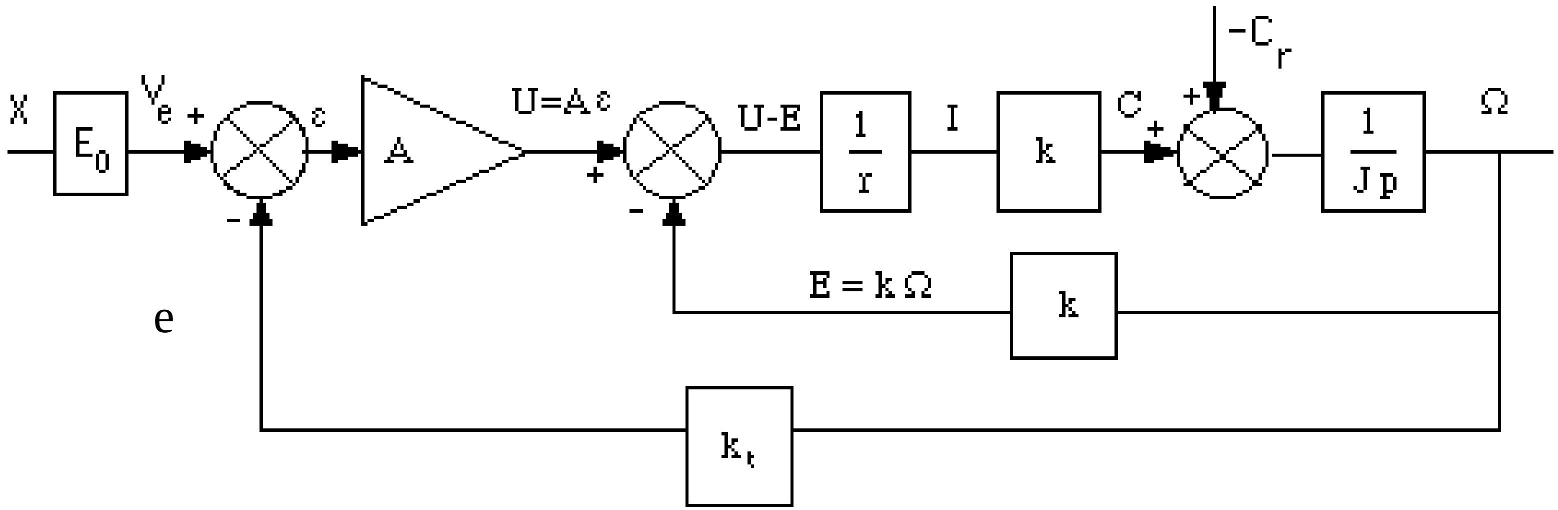
Boucles imbriquées (suite)



Réponse à une perturbation

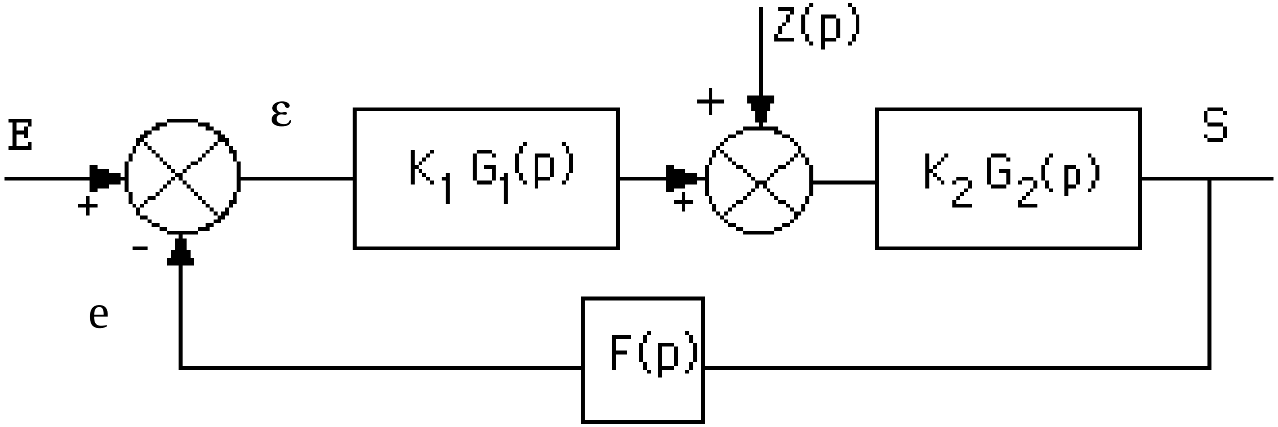
1 – Qu’est ce qu’une perturbation ?

$$C - C_r = J\,\frac{dw}{dt}$$



Réponse à une perturbation

2 – Transmittances relatives à perturbation



$$S(p) = \frac{K_1G_1(p)K_2G_2(p)}{1 + K_1G_1(p)K_2G_2(p)F(p)}E(p) + \frac{K_2G_2(p)}{1 + K_1G_1(p)K_2G_2(p)F(p)}Z(p)$$

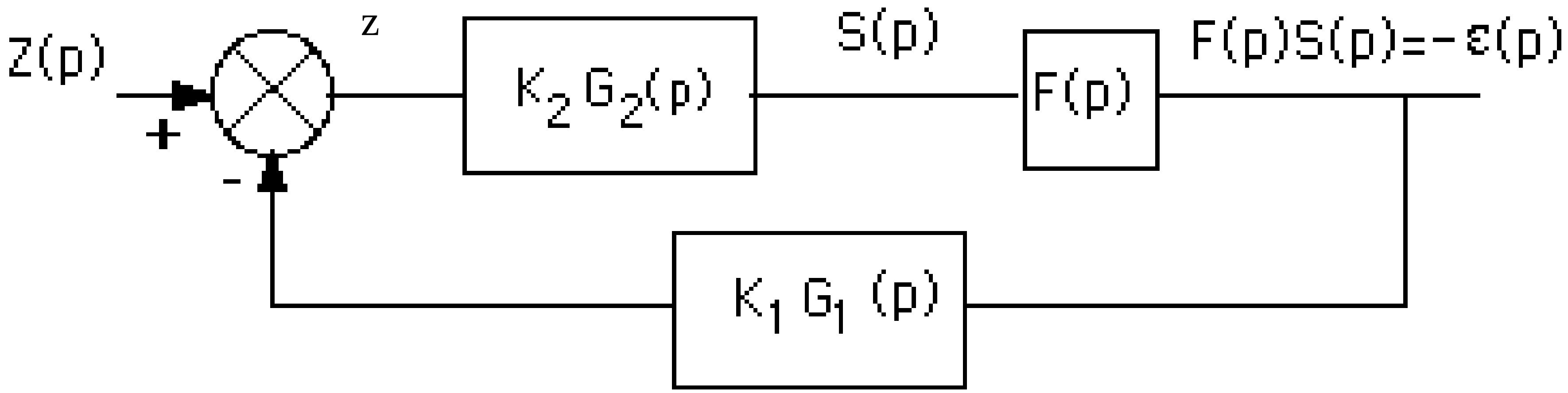
$Z(p) = 0$: transmittance en chaîne fermée

$E(p) = 0$, $\dfrac{S(p)}{Z(p)} = \dfrac{K_2G_2(p)}{1 + KG(p)F(p)}$ transmittance de sortie relative à la perturbation

Réponse à une perturbation

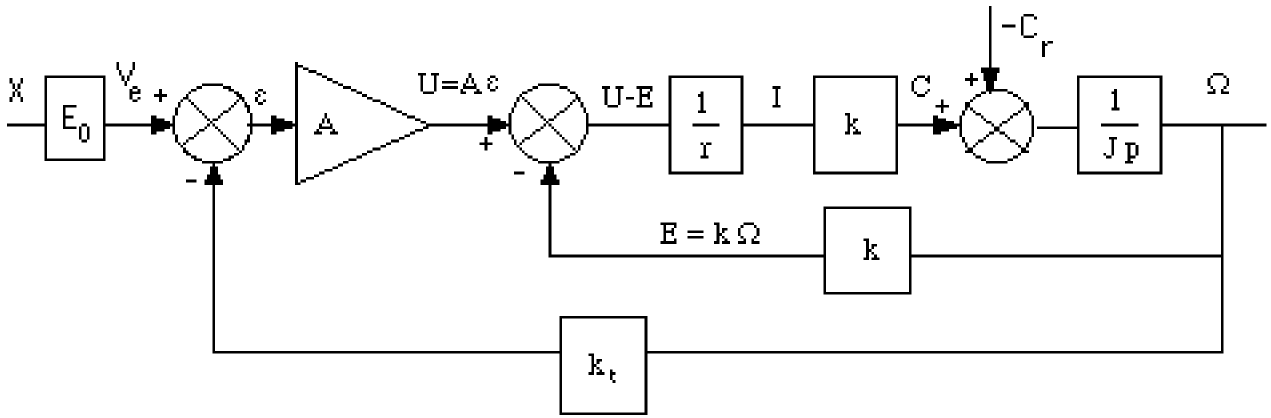
Schéma relatif à l'étude de la précision du système

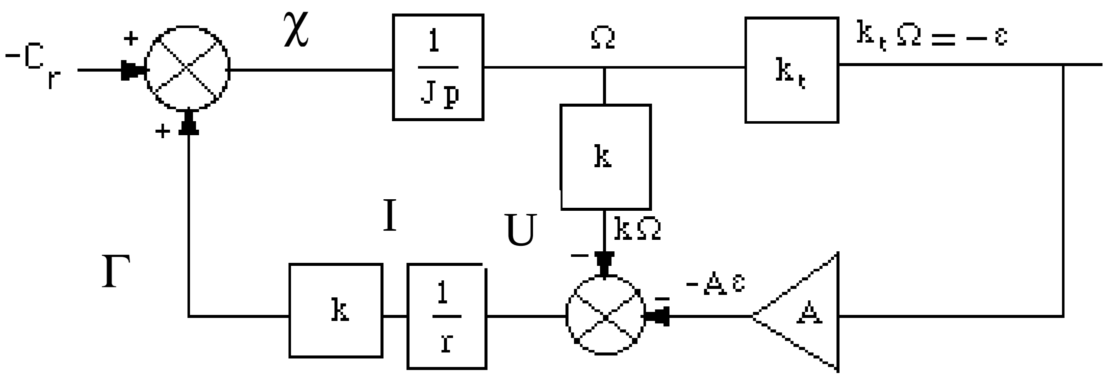
$$\frac{e(p)}{Z(p)} = \frac{-KG_2(p)F(p)}{1+KG(p)F(p)}$$ transmittance de l'erreur relative à la perturbation



Réponse à une perturbation

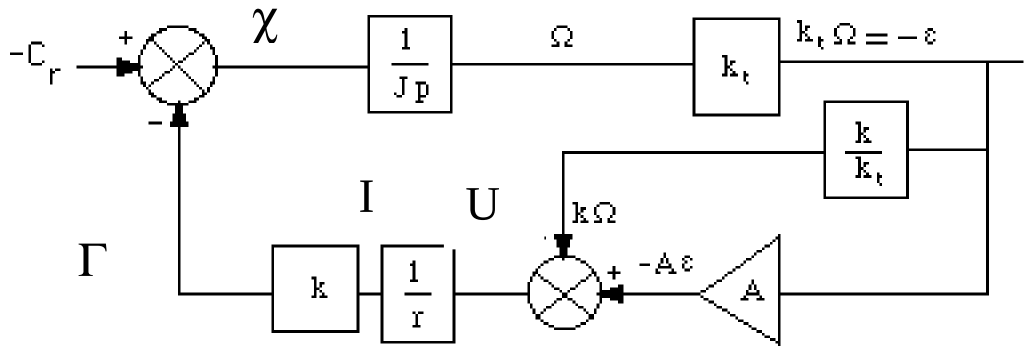
Exemple de l'asservissement de vitesse

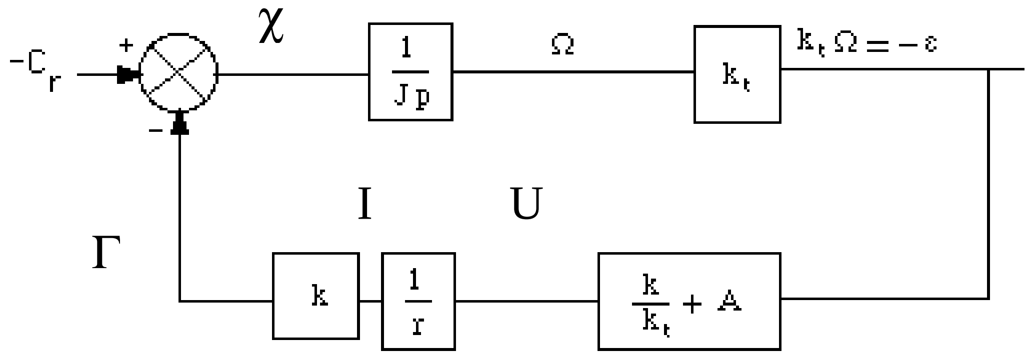




Réponse à une perturbation

Exemple de l'asservissement de vitesse (suite)





Remarques

1 – Limites de la validité de la notion d'impédance

2 – Rôle de la chaîne de retour

$$S(p) = \frac{E(p)}{F(p)} \quad \text{si} \quad K\,G(p)F(p) \gg 1$$

effets de la chaîne de retour :

- diminution du gain qui passe de $KG(p)$ à $\dfrac{1}{F(p)}$
- augmentation de la bande passante
- augmentation de l'impédance d'entrée
- diminution de l'impédance de sortie