Etude expérimentale des transmittances

Etude transitoire

1 – Introduction : comment identifier un système ?

si $e(t) = d(t)$ alors $E(p) = 1$ et $H(p) = S(p)$

La transmittance d'un système est égale à la transformée de Laplace
de la réponse à l'impulsion de Dirac

si $e(t) = u(t)$ alors $E(p) = \dfrac{1}{p}$ et $H(p) = p\,S(p)$

La transmittance d'un système est égale à la dérivée de la transformée de Laplace
de la réponse à l'échelon de Heaviside

Problème : on ne dispose en général que de quelques points de mesure.

Etude expérimentale des transmittances

Etude transitoire

2 – Etude des systèmes du 1er Ordre : généralités

$$b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_0\, s(t) = a_0\, e(t) \qquad t\,\frac{ds}{dt} + s = k\,e \qquad H(p) = \frac{k}{1 + t\ p}$$

réponse indicielle (réponse à un échelon)

$$e(t) = e_0 u(t) \qquad E(p) = \frac{e_0}{p} \qquad S(p) = H(p)E(p) = \frac{ke_0}{p(1 + t\ p)} = ke_0\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{t}}\right)$$

$$s(t) = ke_0(1 - e^{-\frac{t}{t}})u(t)$$

valeur initiale, valeur à l'infini, constante de temps $\quad v(t) = [v_\infty - (v_\infty - v_i)e^{-\frac{t}{t}}]u(t)$

pente à l'origine

Etude transitoire

2 – Etude des systèmes du 1er Ordre : réponse indicielle

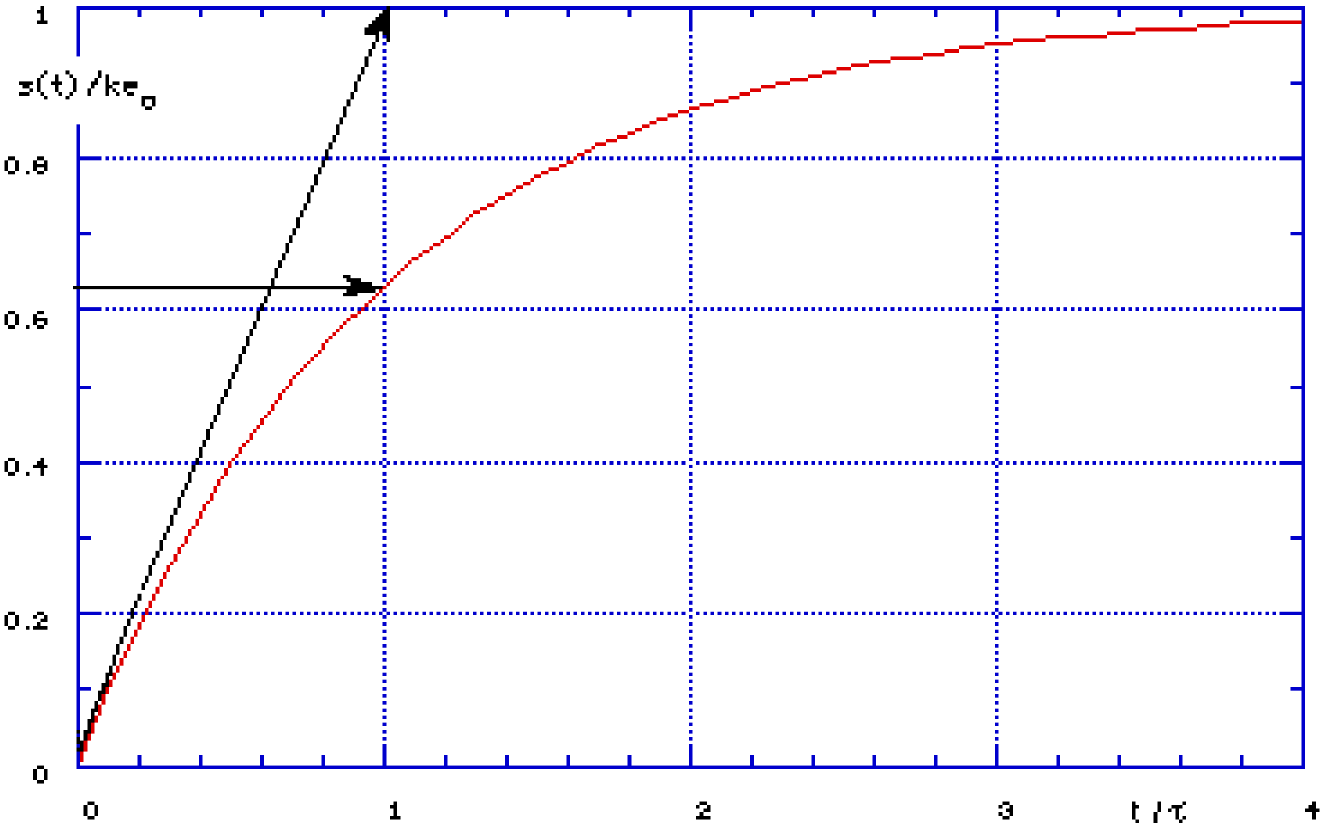


diagramme en coordonnées réduites

Etude transitoire

2 – Etude des systèmes du 1^er^ Ordre : réponse à un lâcher

$$e(t) = e_0(1-u(t)) \qquad s(t) = ke_0 - ke_0(1-e^{-\frac{t}{\tau}})u(t) = ke_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

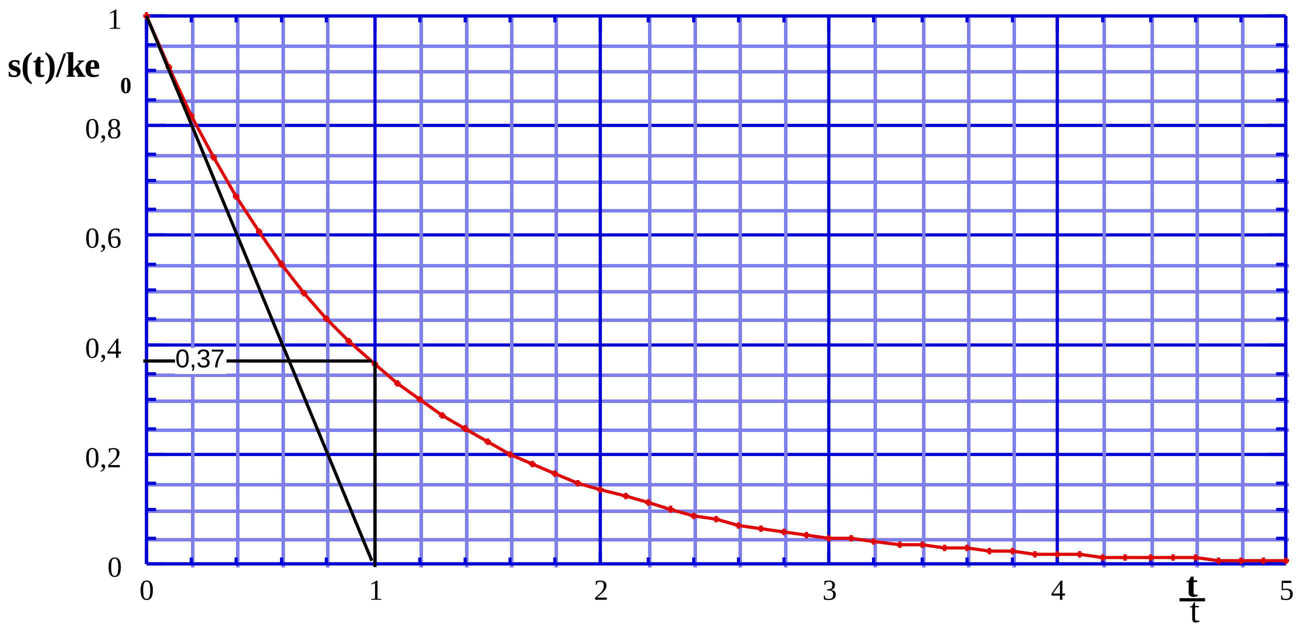


diagramme en coordonnées réduites

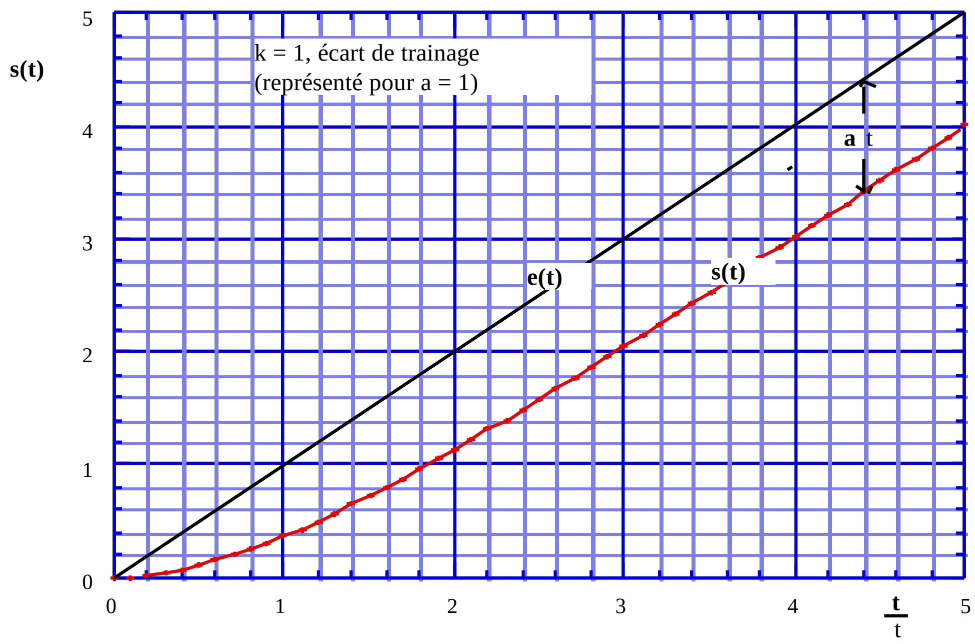
Etude expérimentale des transmittances

Etude transitoire

2 – Etude des systèmes du 1er Ordre : *réponse à un échelon de vitesse*

$$e(t) = a\,t\,u(t) \qquad E(p) = \frac{a}{p^2} \qquad S(p) = \frac{ka}{p^2(1+t\,p)} = ka\left(\frac{1}{p^2} - \frac{t}{p} + \frac{t}{p+\frac{1}{t}}\right)$$

$$s(t) = [ka(t - t) + ka\,t\,e^{-\frac{t}{t}}]\,u(t)$$



Etude transitoire

3 – Etude des systèmes du Second Ordre : généralités

$$b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_0\, s(t) = a_0\, e(t) \qquad \frac{1}{w_n^2}\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{2z}{w_n}\frac{ds}{dt} + s = k\, e$$

$$H(p) = \frac{k}{1 + 2z\dfrac{p}{w_n} + \dfrac{p^2}{w_n^2}}$$

cas d'une excitation sinusoïdale $x = \dfrac{w}{w_n}$ $\qquad H(x) = \dfrac{k}{1 + j\,2z\,x - x^2}$

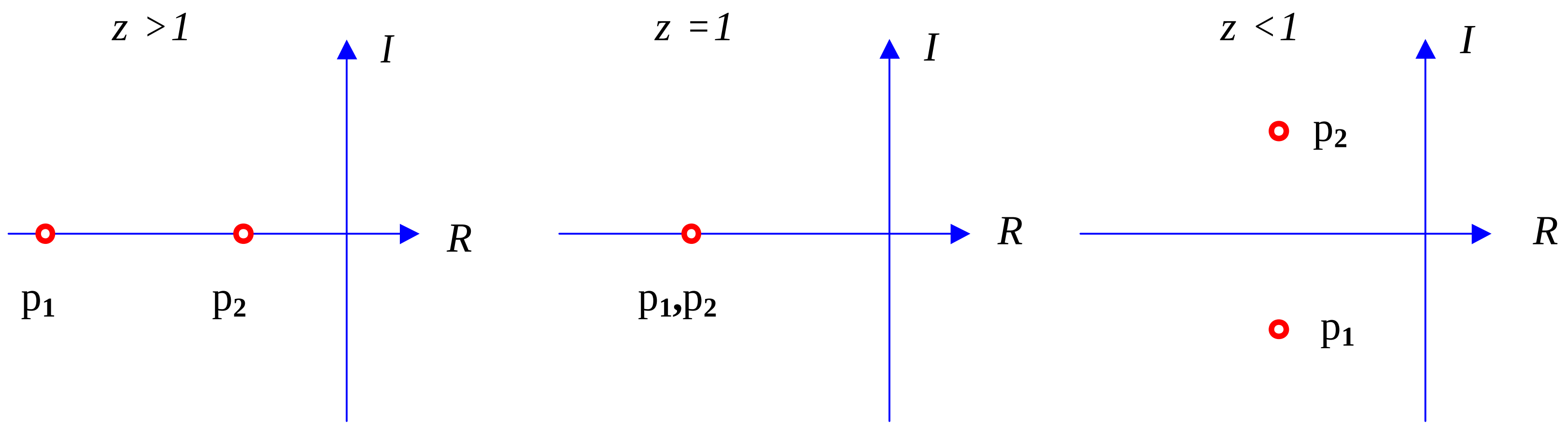
cas d'une excitation quelconque $s = \dfrac{p}{w_n}$ $\qquad 2z = \dfrac{1}{Q}$ $\qquad H(s) = \dfrac{k}{1 + \dfrac{s}{Q} + s^2}$

Etude transitoire

3 – Etude des systèmes du Second Ordre : réponse indicielle

$$e(t) = e_0 u(t) \qquad E(p) = \frac{e_0}{p} \qquad S(p) = \frac{k w_n^2 e_0}{p(p^2 + 2 z w_n p + w_n^2)} = \frac{k w_n^2 e_0}{p(p - p_1)(p - p_2)}$$

$$p_1 p_2 = w_n^2 \qquad p_1 + p_2 = -2 z w_n \qquad \Delta' = w_n^2 (z^2 - 1)$$



Etude transitoire

z >1 ***régime hyper amorti*** ***p_1 et p_2 réelles***

$$S(p) = kw_n^2 e_0 \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p-p_1} + \frac{C}{p-p_2}\right) \qquad p_1 = -zw_n - w_n\sqrt{z^2-1} = \frac{-1}{t_1} \quad p_2 = -zw_n + w_n\sqrt{z^2-1} = \frac{-1}{t_2}$$

$$A = \frac{1}{w_n^2} = \frac{1}{p_1 p_2} = t_1 t_2 \qquad B = \frac{1}{p_1(p_1-p_2)} \qquad C = \frac{1}{p_2(p_2-p_1)}$$

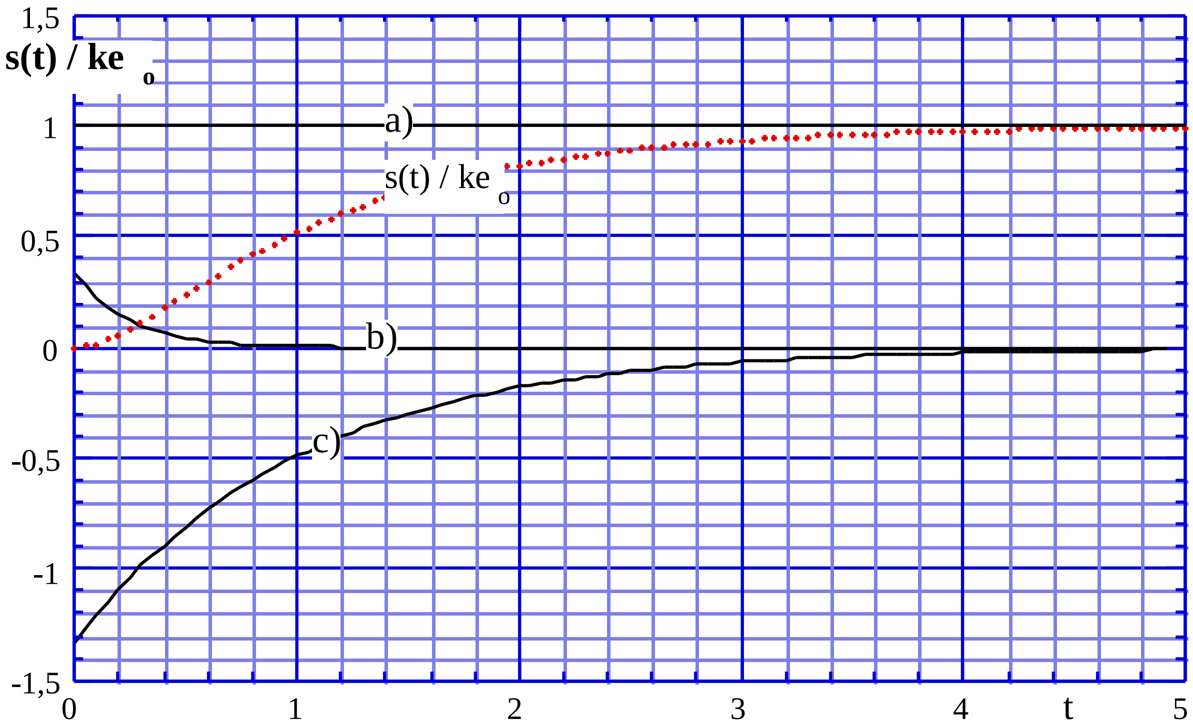
$$S(p) = ke_0\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{(\frac{p_1}{p_2}-1)}\frac{1}{(p-p_1)} + \frac{1}{(\frac{p_2}{p_1}-1)}\frac{1}{(p-p_2)}\right]$$

$$s(t) = ke_0\left\{1 + \frac{1}{t_2-t_1}\left[t_1\exp(\frac{-t}{t_1}) - t_2\exp(\frac{-t}{t_2})\right]\right\}u(t)$$

Etude transitoire

z >1 *quand z* **-** *le rapport* $\frac{t_2}{t_1}\uparrow$ *si* ***z>2*** *courbe b négligeable* $\left[\frac{ds}{dt}\right]_0 = 0$

présence d'un point d'inflexion



$$t_1 = 0.25s \quad t_2 = 1s$$

Etude transitoire

z < 1 ***régime oscillatoire*** ***p_1 et p_2 imaginaires***

$$\Delta' = w_n^2(z^2 - 1) < 0 \qquad p = -zw_n \pm jw_n\sqrt{1-z^2}$$

$$S(p) = \frac{kw_n^2 e_0}{p\left((p+zw_n)^2 + (1-z^2)w_n^2\right)}$$

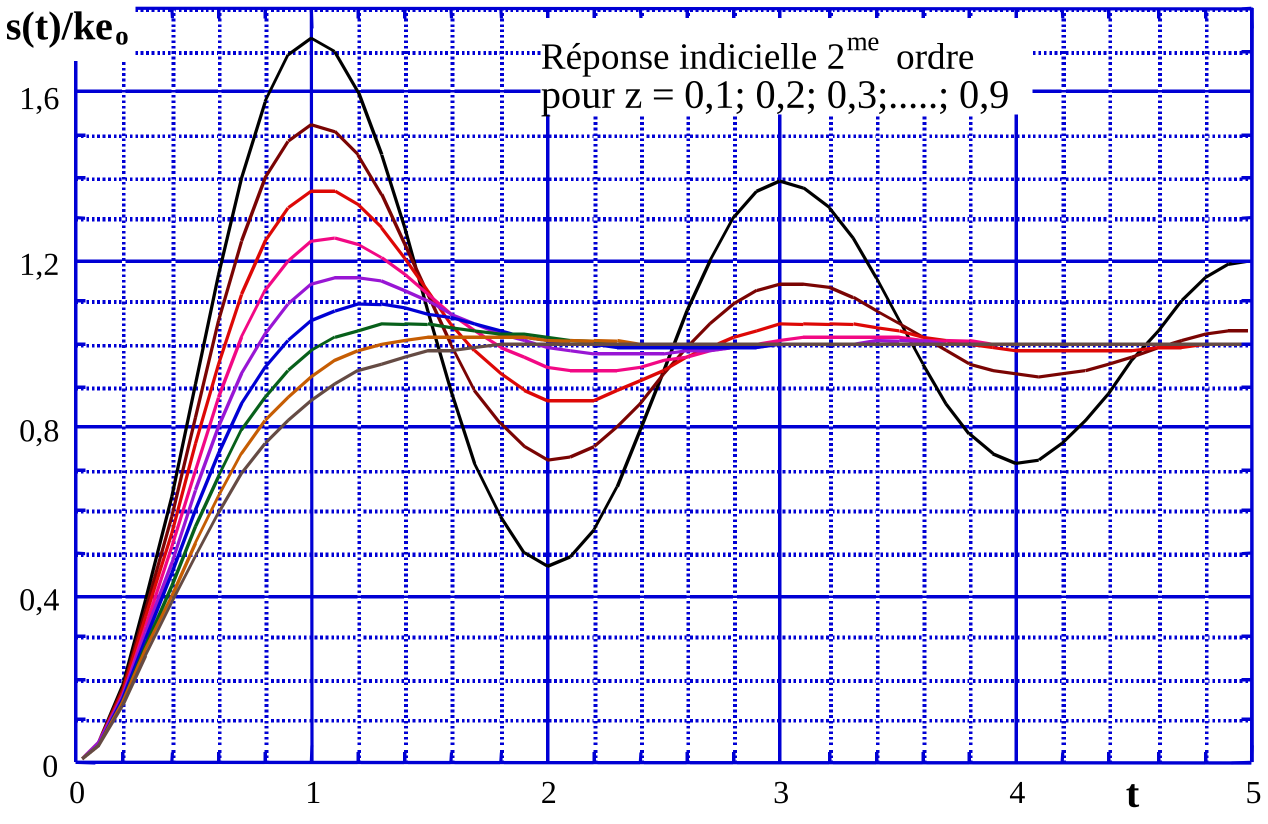
$$s(t) = ke_0\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\, e^{-zw_n t}\, \sin[(w_n\sqrt{1-z^2})\, t + arctg\,\frac{\sqrt{1-z^2}}{z})]\right\} u(t)$$

valeur moyenne **amortissement** **pulsation d'oscillation**

pente à l'origine nulle

Etude transitoire

z < 1   régime oscillatoire p_1 et p_2 imaginaires



Etude transitoire

z = 1 ***régime critique*** ***$p_1 = p_2$ réelles, S(p) à une racine double***

$$\Delta' = w_n^2(z^2 - 1) = 0 \qquad p_1 = p_2 = -w_n = -\frac{1}{t}$$

$$S(p) = \frac{k w_n^2 e_0}{p(p+\frac{1}{t})^2} = k w_n^2 e_0 \left[\frac{t^2}{p} - \frac{t}{(p+\frac{1}{t})^2} - \frac{t^2}{(p+\frac{1}{t})} \right] = k e_0 \left[\frac{1}{p} - \frac{\frac{1}{t}}{(p+\frac{1}{t})^2} - \frac{1}{(p+\frac{1}{t})} \right]$$

$$s(t) = k e_0 \left[1 - (1 + \frac{t}{t}) \exp(\frac{-t}{t}) \right] u(t)$$

régime permanent **régime transitoire rapide**

Etude expérimentale des transmittances

Etude transitoire

z = 1   ***régime critique***   ***$p_1 = p_2$ réelles, S(p) à une racine double***

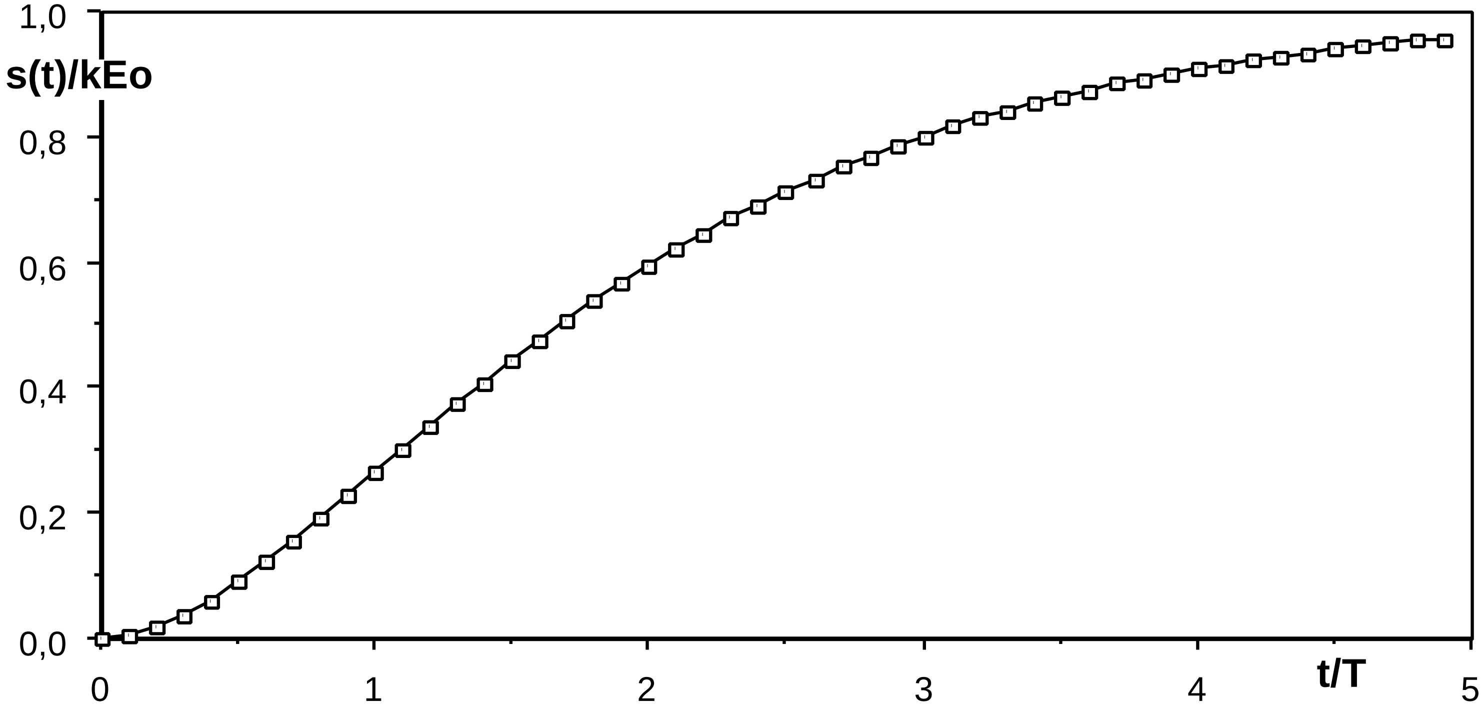
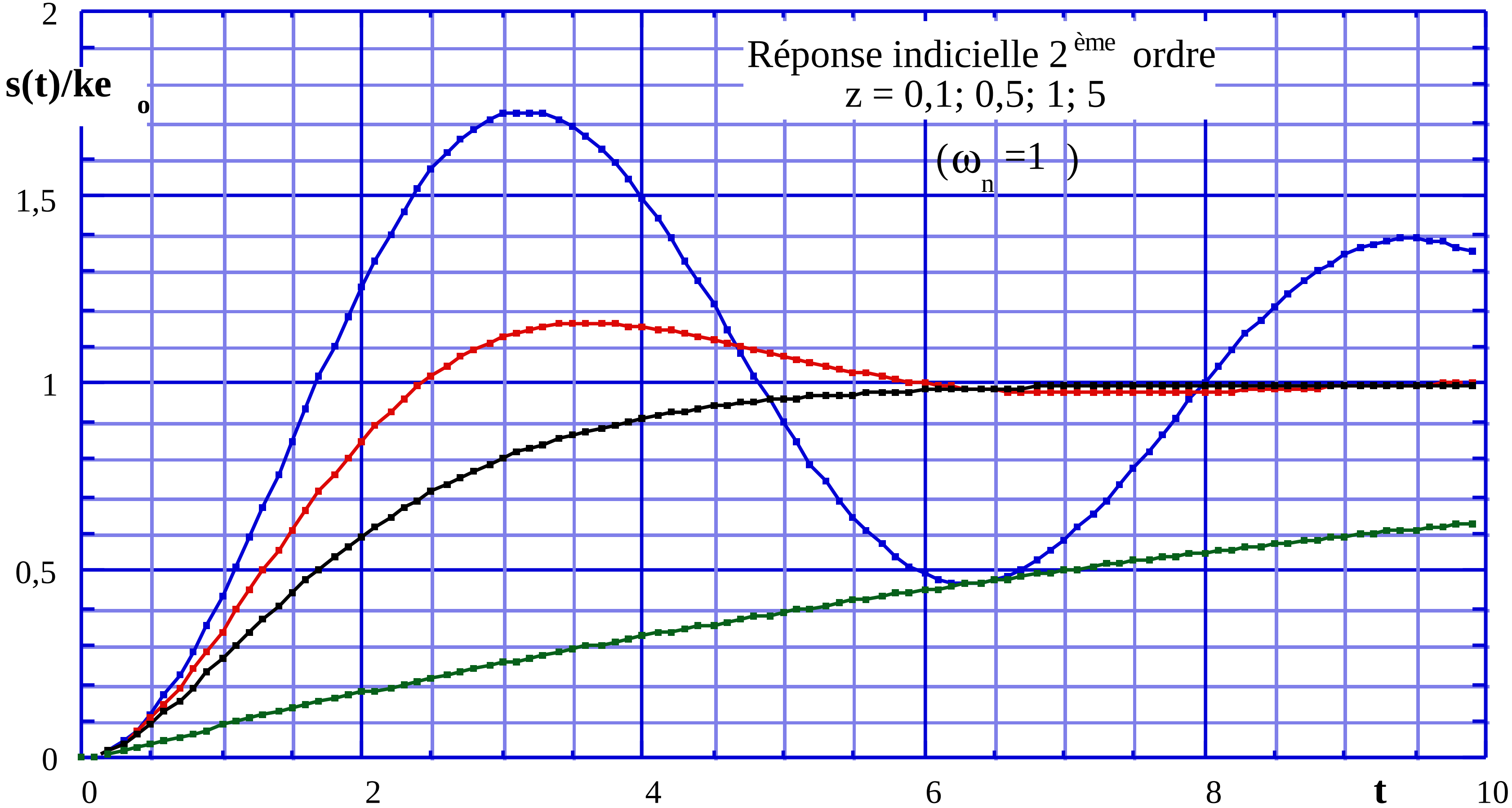


diagramme en coordonnées réduites

Etude expérimentale des transmittances

Etude transitoire

Evolution de la réponse indicielle avec la valeur de z



Etude transitoire

4 – Identification

Détermination du gain statique k

En régime permanent, avec $e_{(t)} = e_0 \quad s_{(t)} = ke_0 = s_0$ d'où le gain statique mesuré.

Identification 1^er^ Ordre

La réponse indicielle ne présente pas de point d'inflexion et la pente à l'origine n'est pas nulle

$\downarrow$

Système du 1^er^ Ordre

$s_{(t)} = ke_0(1 - \exp(-\frac{t}{t}))$ On connaît $k, v_{\infty}, v_i \Rightarrow t$?

Etude expérimentale des transmittances

Système du 1er Ordre

première méthode $s_{(t)} = ke_0(1 - \frac{1}{e}) = 0.63 s_0$

deuxième méthode tracer la tangente à l'origine dont la pente vaut $\frac{s_0}{t}$

troisième méthode $\ln(1 - \frac{s_{(t)}}{s_0}) = -\frac{t}{t}$ $e.\log(1 - \frac{s_{(t)}}{s_0}) = -\frac{t}{t}$ $\log(1 - \frac{s_{(t)}}{s_0}) = -0.43\frac{t}{t}$

tracer, en fonction du temps, sur papier semi-log, la droite $\log(1 - \frac{s_{(t)}}{s_0})$ de pente $-\frac{0.43}{t}$

Etude expérimentale des transmittances

Identification 2ème Ordre

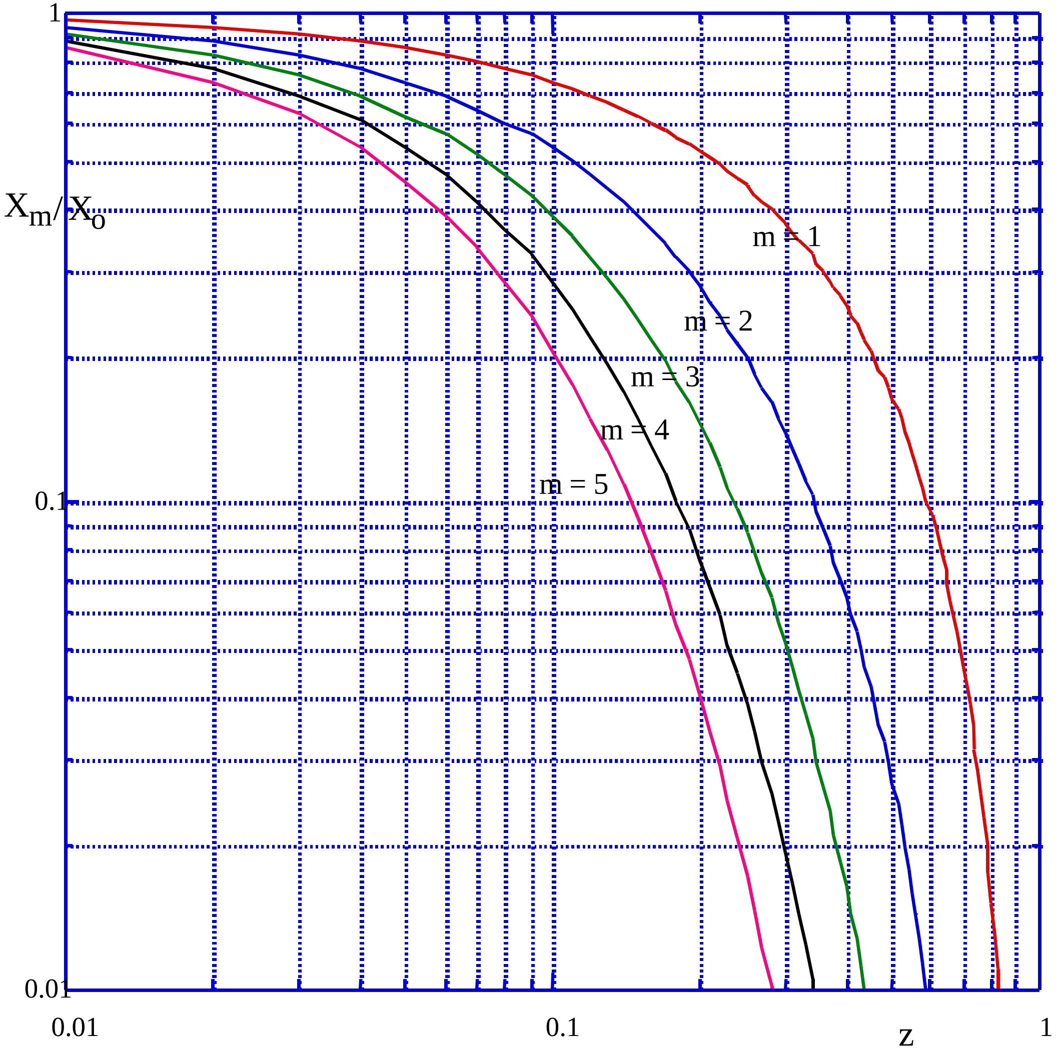
La réponse indicielle présente un point d'inflexion et la pente à l'origine est nulle

↓

Système du 2ème Ordre (ou plus)

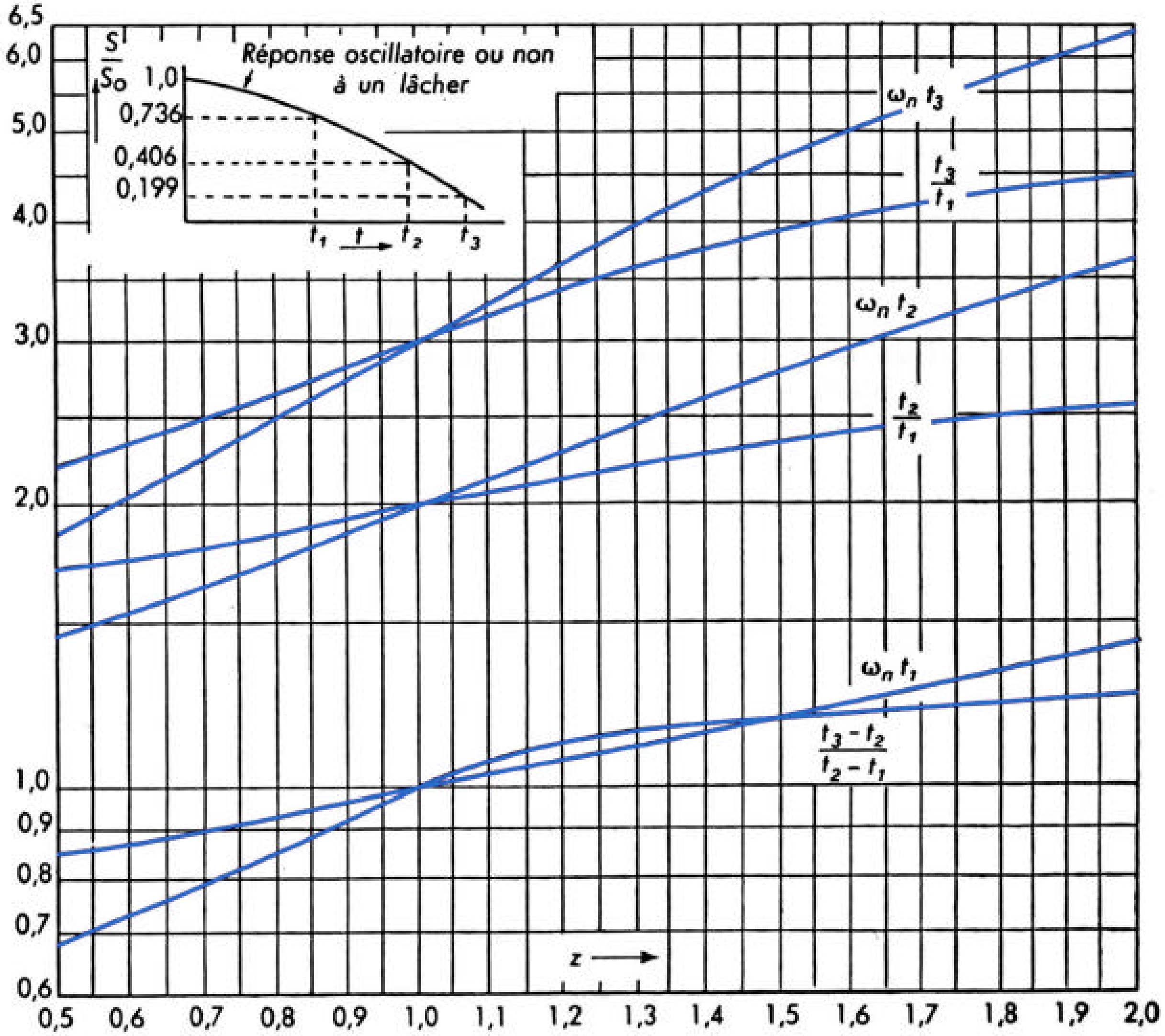
Régime oscillatoire	1	Régime hyper amorti
z ω_N ?	0.5 z ω_N ?	2 z τ1 τ2 ?
Mesurer les amplitudes et T S_0 $S_1 \ldots S_n$ $T = \frac{2p}{w_0} = \frac{2p}{w_N\sqrt{1-z^2}}$	Tracer $s(t)/ke_0$ Déterminer t_n tels que $s(t_n)/ke_0 = 1-(n+1)/e^n$	Tracer $\log(1-s(t)/ke_0)$ Extrapoler jusqu'à t = 0 $\rightarrow s_1$
Calculer $\frac{S_1}{S_0}, \frac{S_2}{S_0}, ..$ Abaque 1 $\rightarrow$ z T $\rightarrow$ w_N	Calculer $\frac{t_2}{t_1}\ \frac{t_3}{t_1}\ \frac{t_3-t_2}{t_2-t_1}$ Abaque 2 $\rightarrow$ z et w_N	Pente de la droite $-\frac{0.43}{t_2}$ $\log\frac{t_2}{t_2-t_1} = s_1 \rightarrow t_1$

Identification 2ème Ordre ***abaque 1 (fig. 8-6)*** ***z < 0.5***



Etude expérimentale des transmittances

Identification 2ème Ordre **abaque 2 (fig. 8-14)** **0.5 < z < 2**



Etude expérimentale des transmittances

Etude fréquentielle

1 – Introduction

$$b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + b_0 s(t) = a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + a_0 e(t)$$

dans le cas d'un régime permanent sinusoïdal

$e(t) = e_0 . e^{jw t} = e(jw)$ système linéaire $\rightarrow$ $s(t) = s_0 . e^{j(w t + \Psi)} = s(jw)$

$$s(jw)\left[b_n (jw)^n + b_{n-1} (jw)^{n-1} + \ldots + b_0\right] = e(jw)\left[a_m (jw)^m + a_{m-1} (jw)^{m-1} + \ldots + a_0\right]$$

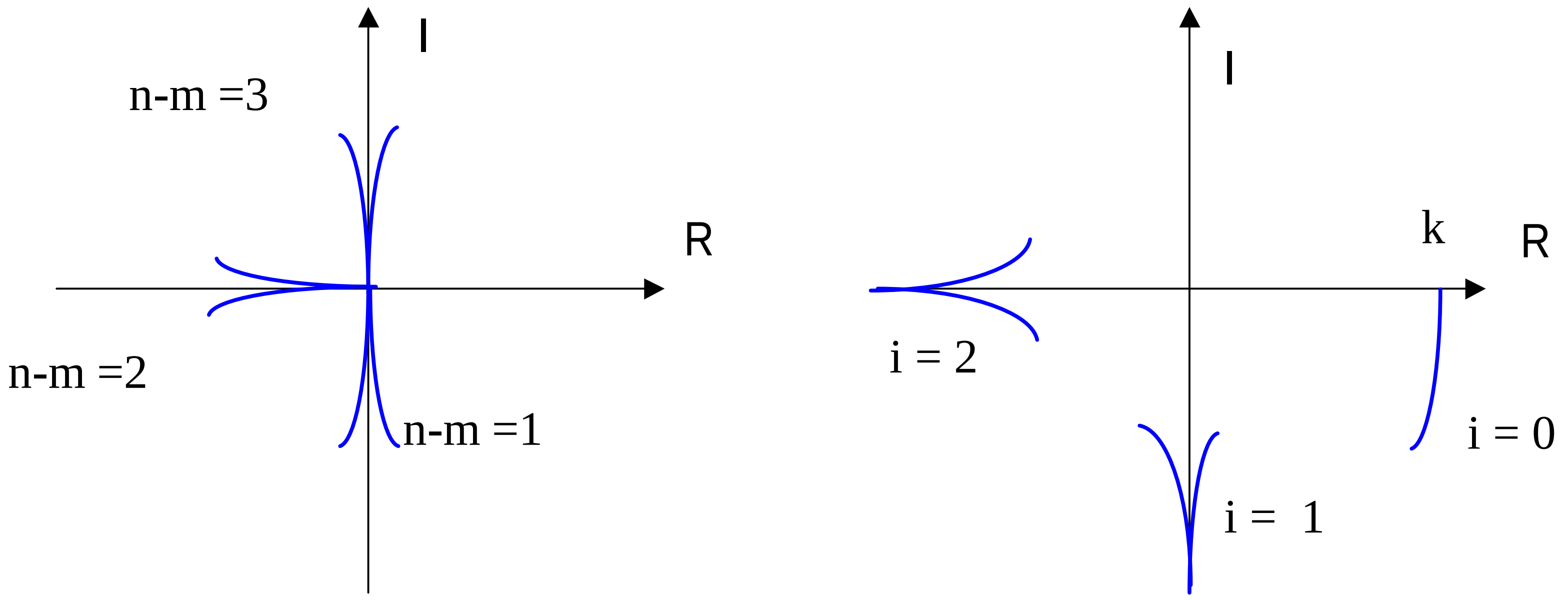
transmittance isochrone $H(jw) = \dfrac{s(jw)}{e(jw)} = \dfrac{a_m (jw)^m + a_{m-1} (jw)^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n (jw)^n + b_{n-1} (jw)^{n-1} + \ldots + b_0} = G_{(w)} e^{j\Phi(w)}$

Etude fréquentielle

2 – Représentations graphiques des transmittances isochrones

Diagramme de Nyquist

$$\lim_{w \to \infty} H_{(jw)} = \frac{a_m}{b_n}(jw)^{m-n} \qquad \lim_{w \to 0} H_{(jw)} = \frac{a_0}{b_i.(jw)^i}$$



Etude fréquentielle

2 – Représentations graphiques des transmittances isochrones

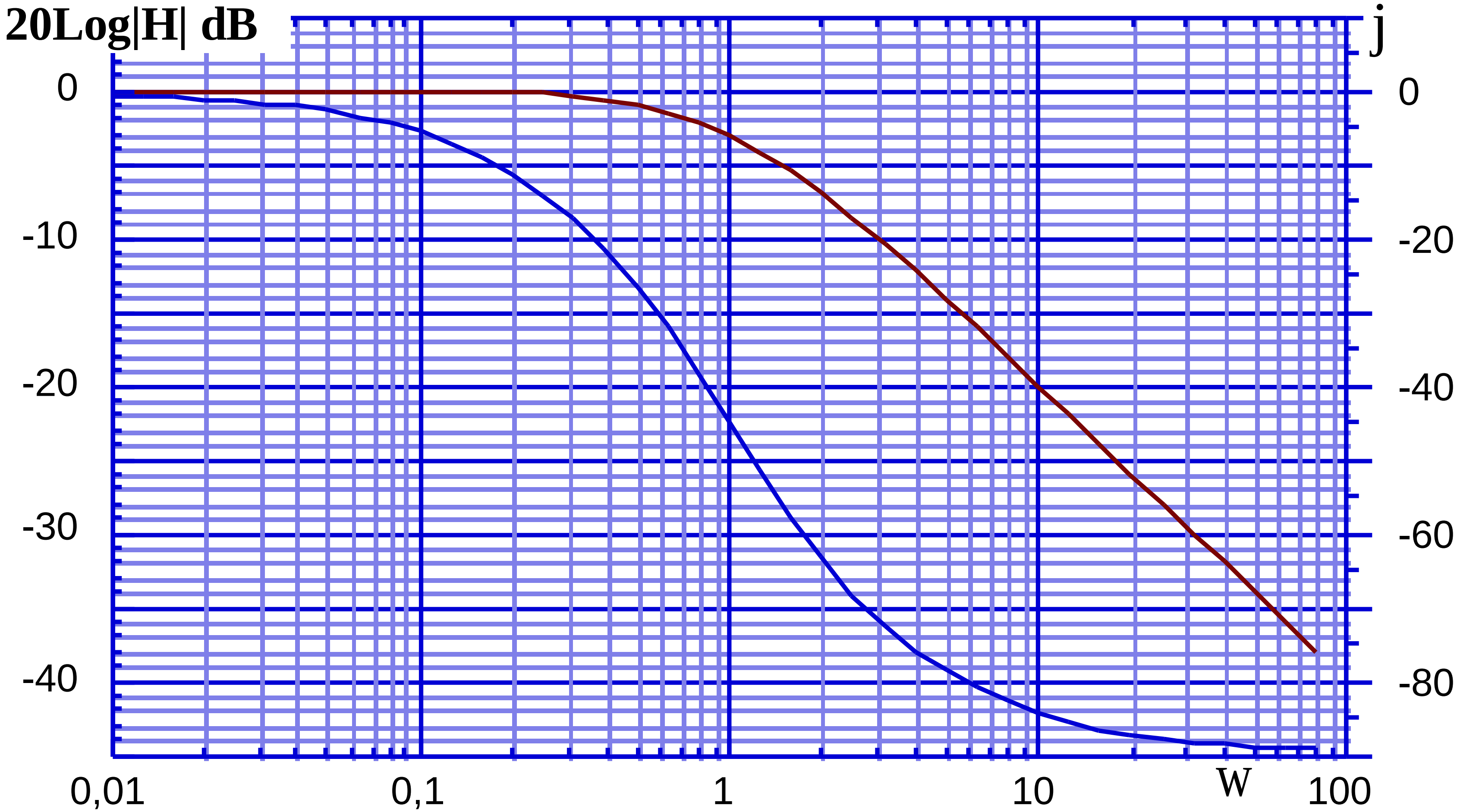
Diagrammes de Bode

1 diagramme d'amplitude $20.\log\left|H_{(jw)}\right|_{(dB)}$ en fonction de $\log w$

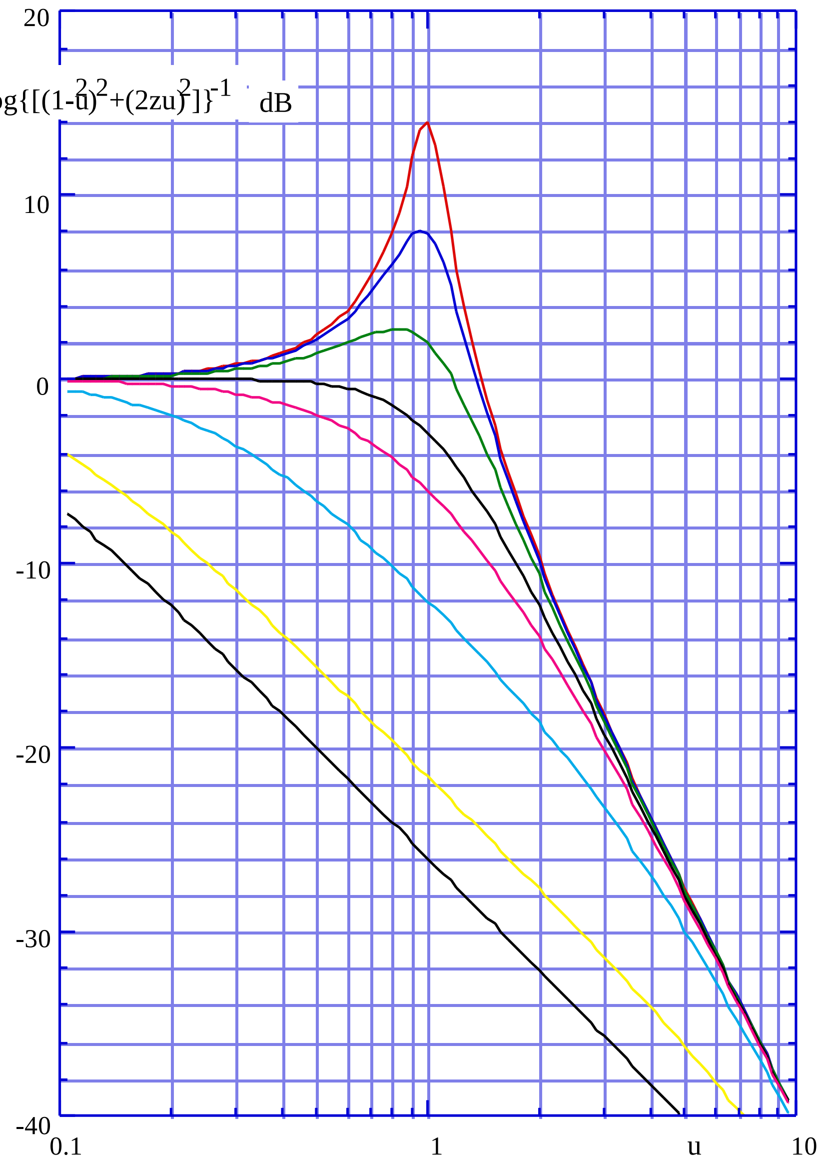
1 diagramme de phase $\arg\left[H_{(jw)}\right]$ en fonction de $\log w$

représentations des diagrammes de Bode de transmittances isochrones élémentaires

Diagrammes de Bode d'une fonction du 1er Ordre



Etude expérimentale des transmittances



Diagrammes de Bode d'une fonction de transfert du 2ème ordre

Etude expérimentale des transmittances

Etude fréquentielle

2 – Représentations graphiques des transmittances isochrones

Diagramme de Black