Critère de Routh Hurwitz -> Stabilité ou Instabilité du système

- Les racines d'un système en boucle fermée sont positive et réelles (Divergence – ou instabilité non – oscillatoire !!!) et
- Les racines d'un système en boucle fermée sont complexes conjuguées avec les parties réelles et positives (Battement – ou instabilité oscillatoire).

- N'oubliez pas que la démonstration du critère est très longue !

Procédure suivante

1) On va exprimer le polynôme caractéristique sous la forme suivante

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + ... + a_{n-1}s + a_n = 0 \quad (1)$$

où a_0, a_1, a_2, …, a_n sont réelles. On assume a_n # 0, ce qui donne s # 0.

2) Condition nécessaire pour la stabilité du système

Tous les coefficients sont positifs ou ils ont le même signe. Si un des coefficients est zéro ou négatif, et au moins un autre coefficient est positif, il existe au moins une racine imaginaire avec une partie réelle positive.

3) Condition suffisante pour la stabilité du système

Tous les éléments de la première colonne de Routh sont positifs ou ils ont le même signe. La condition nécessaire et suffisante pour la stabilité du système en boucle fermée est que les coefficients du polynôme caractéristique et les éléments de la première colonne de Routh - Hurwitz doivent être positives ou doivent avoir le même signe.

Si chaque coefficient du polynôme caractéristique ou n'importe quel élément dans la première colonne de Routh est zéro, ceci va remplacer ce terme par un élément positif petit ε. Pour un polynôme d'ordre 4, le critère de Routh va devenir :

1) Tous les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4 sont positifs.
2) Le déterminant de Routh est :

$$(a_1a_2 - a_0a_3)a_3 - a_1^2a_4 > 0 \quad (2)$$

<u>Exemple 1</u>

Par le critère de Routh Hurwitz, déterminer la stabilité du système représenté par l'équation suivante :

$$s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 2s + 2 = 0 \qquad (3)$$

On compare l'équation (3) avec l'équation (1) et on obtient :

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_3 = 2,\ a_4 = 2\ .$$

- Tous les coefficients a sont > 0 -> ***<u>Condition nécessaire</u>*** pour la stabilité du système.

On va former la colonne de Routh comme suite :

s^4	1	5	2
s^3	2	2	0
s^2	4	2	0
s^1	1	0	
s^0	2		

- Tous les coefficients de la $1^{\text{ière}}$ colonne Routh sont > 0 ->
  <u>Condition suffisante</u> pour la stabilité du système.

Alternative : Éq. (2) donne : (10 - 2)*2 - 4*2 = 8 > 0 -> **Système stable**.

Exemple 2

Par le critère de Routh Hurwitz, déterminer la stabilité du système représenté par l'équation suivante :

$$s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 4s + 1 = 0 \qquad (4)$$

On compare l'équation (4) avec l'équation (1) et on obtient :

$$a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ a_4 = 1.$$

- Tous les coefficients a sont > 0 -> ***Condition nécessaire*** pour la stabilité du système.

La colonne de Routh est la suivante :

s^4	1	2	1
s^3	3	4	0
s^2	2/3	1	0
s^1	-1/2	0	
s^0	2		

Il y a deux changements de signe dans la 1^{iere} colonne de Routh, donc le système est instable.

Alternative : Éq. (2) donne : (6 - 4)*4 - 9*4 < 0 -> **Système instable**.

Exemple 3

Par le critère de Routh Hurwitz, déterminer la stabilité du système représenté par l'équation suivante :

$$s^4 + 2s^2 + 5s + 2 = 0 \tag{5}$$

On compare l'équation (5) avec l'équation (1) et on obtient :

$$\boldsymbol{a_0 = 1}, a_1 = \varepsilon, \ \boldsymbol{a_2 = 2}, \ a_3 = 5, \boldsymbol{a_4 = 2}.$$

- Tous les coefficients a sont > 0 -> ***Condition nécessaire*** pour la stabilité du système.

La colonne de Routh est la suivante :

s^4	1	2	2
s^3	ε	5	0
s^2	-50,000	2	0
s^1	5	0	
s^0	2		

Il y a deux changements de signe dans la 1^{iere} colonne de Routh, donc le système est instable.

Alternative : Éq. (2) donne : $(2\varepsilon - 5)*5 - 2\varepsilon^2 < 0$ -> **Système instable**.

Exemple 4
Le critère de Routh Hurwitz appliqué sur un avion

Le mouvement longitudinal (période longue et période courte) de Navion est représenté par la matrice ***A*** suivante (dépendante de vecteur **x** d'état) :

$$A = \begin{bmatrix} -0.0453 & 0.0363 & 0 & -0.183 \\ -0.3717 & -2.0354 & 0.9723 & -0.0323 \\ 0.3398 & -7.0301 & -2.9767 & 0.0295 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Les valeurs propres λ_i sont calculées par l'équation $|\lambda I - A| = 0$ - qui va donner :

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -0.0453 & 0.0363 & 0 & -0.183 \\ -0.3717 & -2.0354 & 0.9723 & -0.0323 \\ 0.3398 & -7.0301 & -2.9767 & 0.0295 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

L'équation caractéristique a la forme suivante :

$$\mathbf{0.3739}\,\lambda^4 + 1.9002\,\lambda^3 + \mathbf{4.9935}\,\lambda^2 + 0.1642\,\lambda + \mathbf{0.2296} = 0 \tag{8}$$

d'où $a_0 = 0.3739$, $a_1 = 1.9002$, $a_2 = 4.9935$, $a_3 = 0.1642$, $a_4 = 0.2296$.

- Tous les coefficients a sont > 0 -> ***Condition nécessaire*** pour la stabilité du système.

La colonne de Routh est la suivante :

s^4	0.3739	4.9935	0.2296
s^3	1.9002	0.1642	0
s^2	4.9612	0.2296	
s^1	0.0763		
s^0	0.2296		

- Tous les coefficients de la 1$^{\text{ière}}$ colonne Routh sont > 0 ->
  Condition suffisante pour la stabilité du système.

Alternative : Éq. (2) donne : (1.9*4.99-0.37*0.16)*0.16-1.9*1.9*0.23 > 0 -> **Système stable**.