2. Transformée de Laplace

Les processus étudiés seront caractérisés par des fonctions régies par **signaux continus** (l'évolution du temps au niveau du système étudié s'effectue de façon continue).

Les fonctions f(t) étudiées sont supposées nulles pour t < 0 et vérifient :

$$\exists \alpha \in R, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t).e^{-\alpha.t} \right| .dt < +\infty$$

Dans ces conditions, elles admettent une transformée de Laplace.

1. Définition

Soit f une fonction vérifiant la condition précédente, sa transformée de Laplace est :

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f(t).e^{-p.t}.dt$$

avec la variable complexe $p = \sigma + j.\omega$, $\quad \sigma \geq 0$

Cette transformation est bijective et la transformée de Laplace inverse est définie par :

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi.j} \int_{\sigma - j.\infty}^{\sigma + j.\infty} F(p).e^{p.t}.dp$$

avec $p = \sigma + j.\omega$, $\quad \sigma \in$ domaine de convergence de l'intégrale

Lors de l'étude des systèmes en automatique, les signaux des fonctions étudiées, qu'ils caractérisent soit l'entrée, le système ou la sortie de celui-ci, sont représentés par des fonctions causales, c'est à dire nulle pour toute variable t < 0. On peut donc écrire :

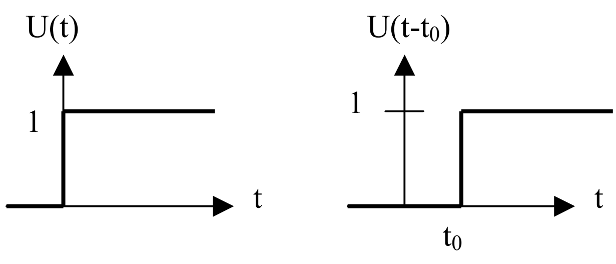
Si $t < 0$, $f(t) = 0$,

Si $t \geq 0$, $f(t) = f(t) \times U(t)$

Avec $U(t)$ fonction échelon unité (fonction de Heaviside) telle que :

$U(t) = 1$ si $t \geq 0$

$U(t) = 0$ si $t < 0$



2. Propriétés de la transformée de Laplace

- **Linéarité** (a réel, F et G sont les transformées de Laplace respectivement de f et g)

$$L[f(t)+a.g(t)]=F(p)+a.G(p)$$

- **Facteur d'échelle** (k un réel non nul)

$$L[f(k.t)]=\frac{1}{k}.F(\frac{p}{k})$$

- **Théorème du retard** (τ un réel positif non nul)

$$L[f(t-\tau)]=e^{-\tau.p}.F(p)$$

- **Théorème du décalage fréquentiel** (ω_0 un réel positif)

$$L\left[f(t).e^{-\omega_0.t}\right]=F(p+\omega_0)$$

- **Théorème de la dérivation**
  $f(0^+)=$ valeur initiale de f(t) et $f'(0^+)=$ valeur initiale de f'(t)

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=p.F(p)-f(0^+)$$

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right]=p.[p.F(p)-f(0^+)]-f'(0^+)$$

Remarque : on suppose ici que $\lim\limits_{t\to\infty} f(t).e^{-p.t}=0$

- **Théorème de l'intégration** (avec les conditions initiales nulles)

$$L\left[\int_0^{t\geq 0} f(u).du\right]=\frac{F(p)}{p}$$

Remarque : si les conditions initiales sont nulles, dériver en temporel revient à multiplier par p en Laplace ; De la même manière, Intégrer en temporel revient à diviser par p en Laplace.

- **Théorème de la valeur initiale** (résultat valide que si les deux limites existent)

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{p\to\infty} p.F(p)$$

- **Théorème de la valeur finale** (résultat valide que si les deux limites existent)

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p.F(p)$$

- **Produit de convolution**

Soit $y(t) = \int_0^\infty f(\tau).x(t-\tau).d\tau$ avec $\tau > 0$ ($y(t) = f(t) \underset{\tau}{\otimes} x(t)$)

Alors :

$$L[y(t)] = Y(P) = F(p).X(p)$$

La transformée de Laplace d'un produit de convolution de deux signaux est égal au produit des transformées de Laplace de ces signaux.

3. tableau des transformées de Laplace usuelles

En calculant les intégrales de Laplace pour les fonctions les plus utilisées, on dresse une table (formulaire) des transformées de Laplace usuelles. Pour utiliser correctement ce formulaire, il faut remarquer que les fonctions temporelles sont toutes causales même si le terme U(t) n'est pas rappelé a chaque ligne du tableau.

Cf. table suivante :

Table des transformées de Laplace usuelles

<table>
<tr><th>f(t)</th><th>F(p)</th><th>f(t)</th><th>F(p)</th></tr>
<tr><td>$a.U(t)$</td><td>$\dfrac{a}{p}$</td><td colspan="2" rowspan="4">$f(t)=\dfrac{\omega_0.e^{-z.\omega_0.t}}{\sqrt{1-z^2}}\sin\left[\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}\right).t\right]$

$F(p)=\dfrac{1}{1+2.z.\dfrac{p}{\omega_0}+\left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2}$</td></tr>
<tr><td>t</td><td>$\dfrac{1}{p^2}$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$</td><td>$\dfrac{1}{p^n}$</td></tr>
<tr><td>$\delta(t)$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$e^{-a.t}$</td><td>$\dfrac{1}{p+a}$</td><td colspan="2" rowspan="6">$f(t)=1-\dfrac{e^{-z.\omega_0.t}}{\sqrt{1-z^2}}\sin\left[\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}\right).t-\varphi\right]$

avec $\varphi=\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-z^2}}{-z}\right)$

$F(p)=\dfrac{1}{p.\left[1+2.z.\dfrac{p}{\omega_0}+\left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2\right]}$

avec $z<1$</td></tr>
<tr><td>$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$</td><td>$\dfrac{1}{p.(1+\tau.p)}$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\dfrac{e^{-t/\tau}}{\tau^n}$</td><td>$\dfrac{1}{(1+\tau.p)^n}$</td></tr>
<tr><td>$1-\left(1+\dfrac{t}{\tau}\right).e^{-t/\tau}$</td><td>$\dfrac{1}{p.(1+\tau.p)^2}$</td></tr>
<tr><td>$t-\tau+\tau.e^{-t/\tau}$</td><td>$\dfrac{1}{p^2.(1+\tau.p)}$</td></tr>
<tr><td>$1+\left(\dfrac{a}{\tau}-1\right).e^{-t/\tau}$</td><td>$\dfrac{1+a.p}{p.(1+\tau.p)}$</td></tr>
<tr><td>$\sin(\omega.t)$</td><td>$\dfrac{\omega}{\omega^2+p^2}$</td><td>$e^{-at}\sin(\omega.t)$</td><td>$\dfrac{\omega}{\omega^2+(p+a)^2}$</td></tr>
<tr><td>$\cos(\omega.t)$</td><td>$\dfrac{p}{\omega^2+p^2}$</td><td>$e^{-at}\cos(\omega.t)$</td><td>$\dfrac{p+a}{\omega^2+(p+a)^2}$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{1}{a-b}\left[e^{-t/a}-e^{-t/b}\right]$</td><td>$\dfrac{1}{(1+a.p).(1+b.p)}$</td><td rowspan="2">$1-\cos(\omega.t)$</td><td rowspan="2">$\dfrac{1}{p.\left(1+\dfrac{p^2}{\omega^2}\right)}$</td></tr>
<tr><td>$1+\dfrac{1}{b-a}\left[a.e^{-t/a}-b.e^{-t/b}\right]$</td><td>$\dfrac{1}{p.(1+a.p).(1+b.p)}$</td></tr>
<tr><td>$1+\left(\dfrac{a-\tau}{\tau^2}.t-1\right).e^{-t/\tau}$</td><td>$\dfrac{1+a.p}{p.(1+\tau.p)^2}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$t+(a-\tau).(1-e^{-t/\tau})$</td><td>$\dfrac{1+a.p}{p^2.(1+\tau.p)}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$e^{-a.t}.\sin(\omega.t)$</td><td>$\dfrac{\omega}{\omega^2+(p+a)^2}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$e^{-a.t}.\cos(\omega.t)$</td><td>$\dfrac{p+a}{\omega^2+(p+a)^2}$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

4. Résolution d'équations différentielles

Soit l'équation différentielle suivante :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 . y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \ldots + b_0 . x(t)$$

Par application de la transformée de Laplace, cette équation devient :

$$Y(p).\left[a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + \ldots + a_0\right] = X(p).\left[b_m.p^m + b_{m-1}.p^{m-1} + \ldots + b_0\right] + C(p)$$

avec $C(p)$ le polynôme dépendant des conditions initiales

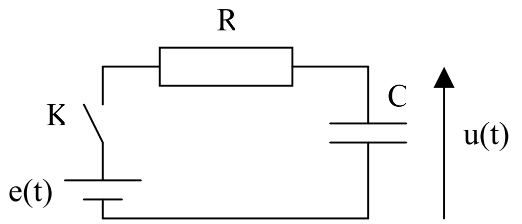
On pose alors : $D(p) = a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + \ldots + a_0$ et $N(p) = b_m.p^m + b_{m-1}.p^{m-1} + \ldots + b_0$

Ce qui donne : $Y(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}.X(p) + \dfrac{C(p)}{D(p)}$

Pour retrouver l'original y(t), on utilise la table de transformées de Laplace ou alors on décompose Y(p) en éléments simples.

Exemple :

Soit le circuit électrique représenté sur la figure ci- contre. A t = 0,
- la charge du condensateur est nulle,
- on ferme l'interrupteur K.



On veut déterminer l'allure de la tension de sortie en passant par la représentation de Laplace

On a : $e(t) = R.i(t) + u(t)$ avec $Q = CU$ $\rightarrow$ $i(t) = \dfrac{dQ(t)}{dt} = C\dfrac{du(t)}{dt}$

D'où : $e(t) = RC.\dfrac{du(t)}{dt} + u(t)$ on a : e(t) = 5 V (constante), alors E(p) = $\dfrac{5}{p}$

On obtient alors : $E(p) = RCpU(p) + U(p)$ et $U(p) = E(p).\dfrac{1}{(1+RC.p)} = \dfrac{5}{p.(1+RC.p)}$

En utilisant la table des transformées de Laplace usuelles, il est possible de trouver la réponse temporelle de la sortie. On obtient alors :

$$u(t) = 5.\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$