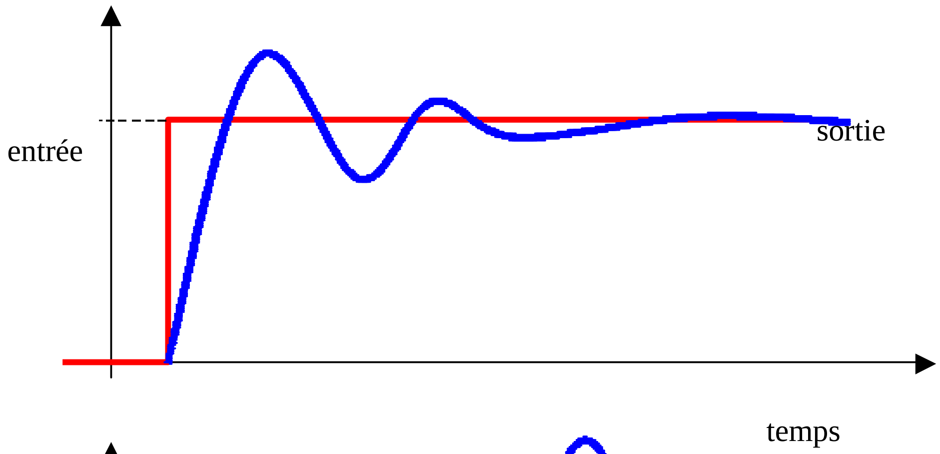
Stabilité d'un systéme asservi

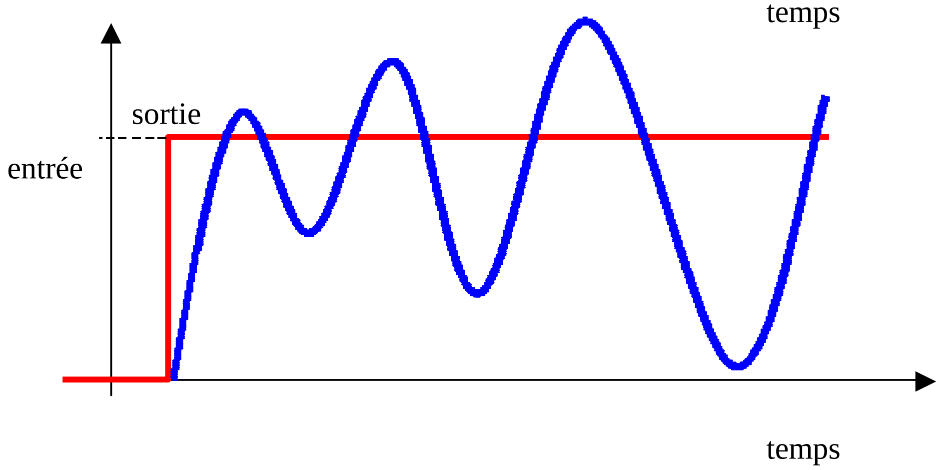
1. Notion de stabilité et définition.

Définition n° 1 : on dit que le système est stable si pour une entrée bornée, la sortie reste bornée quelles que soient les perturbations.

Système stable



Système instable



Définition n° 2 : un système est stable si la réponse libre du système tend vers zéro quand t tend vers l’infini.

Remarque : ces deux définitions sont équivalentes dans le cas de systèmes linéaires. Quelle définition choisir ?

Un système réel instable oscille jusqu’à la destruction. Ces oscillations peuvent, dans le cas général, être limitées par les différentes saturations (limites des ampli-OP, butées physiques) et laisser croire que la sortie du système est bornée, *mais le système ne peut plus être considéré comme linéaire*. **La première définition ne peut pas être utilisée**.

Etudier la réponse libre d’un système revient à écarter le système de sa position d’équilibre et à analyser sa réponse.

- Un système stable a tendance à revenir dans sa position d’équilibre.
- Un système instable à tendance à s’en écarter.
- Un système qui ne revient pas dans sa position d’équilibre mais qui ne s’en écarte pas est dit juste instable.

2. Condition fondamentale de stabilité d'un système asservi.

Etudions la stabilité du système en considérant la deuxième définition : ce qui revient à considérer que le système est soumis à l'instant t = 0 à une impulsion.

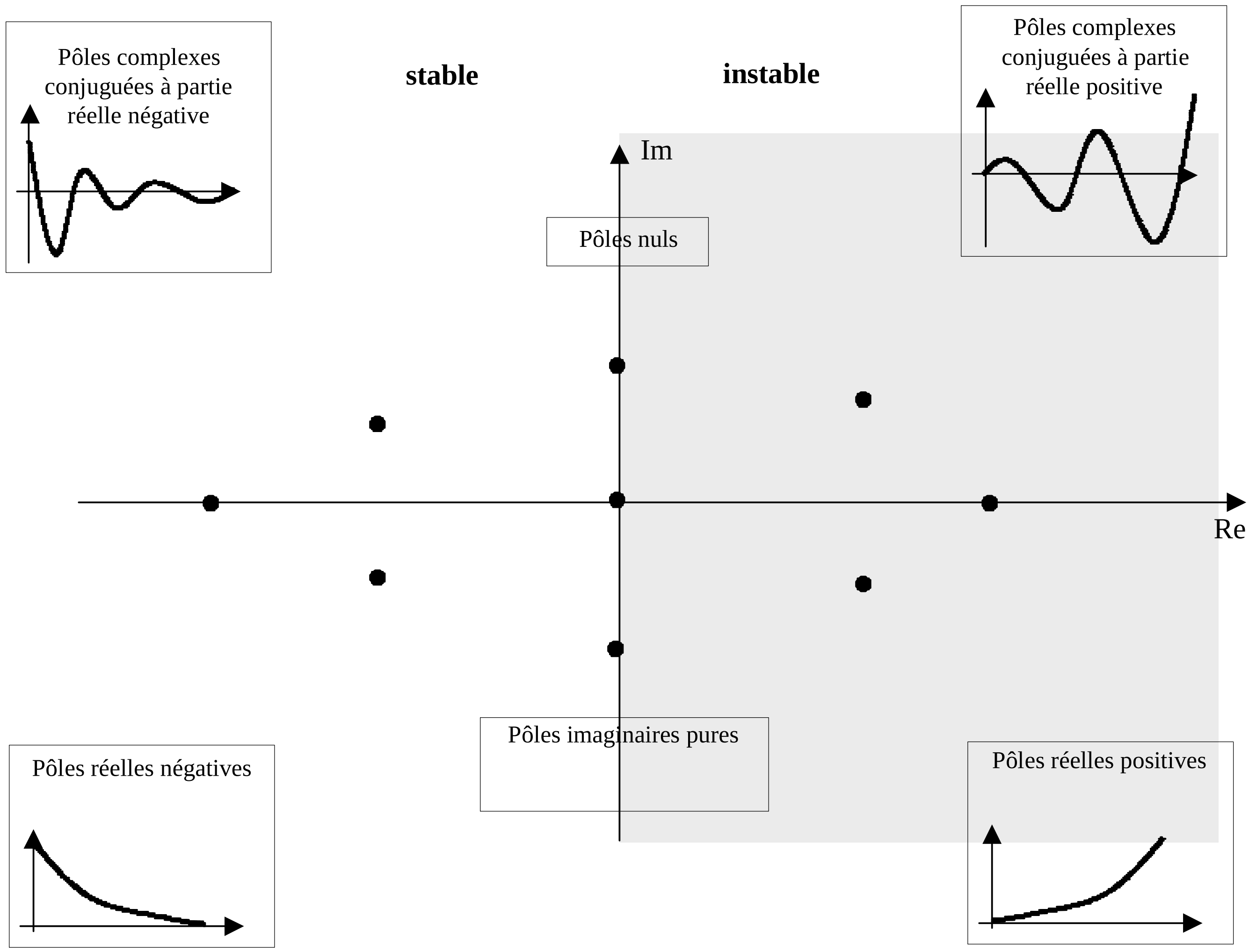
$$S(p) = H(p) \text{ car } E(p) = 1$$

$$\text{Avec FTBF} = H(p) = \frac{T(p)}{1 + G(p).T(p)}$$

- **Condition nécessaire et suffisante de stabilité :**

Un système linéaire invariant est stable si est seulement si tous ses pôles ont une partie réelle négative.

- **Position des <u>pôles de H(p)</u> dans le repère complexe (ou des zéros de FTBO + 1).**



*Il suffit donc d'avoir une méthode pour déterminer le signe des parties réelles **des pôles** de la fonction de transfert du système*

3. Critères de stabilité.

3.1 Critère algébrique : Routh.

Le critère de **Routh** est un critère permettant de déterminer à partir du polynômes dénominateur de la fonction de transfert le signe des racines de ce polynôme sans avoir à résoudre l'équation

$$1 + G(p).T(p) = 0$$

qui peut se mettre aussi sous la forme :

$$b_0 + b_1.p + b_2.p^2 + \dots + b_n.p^n = 0$$

$$\text{avec } b_n > 0$$

- **Présentation du critère de Routh :**

Créons un tableau :

p^n	b_n	b_{n-2}	b_{n-4}	…
p^{n-1}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	…

Ces deux lignes regroupent tous les coefficients du polynôme dénominateur de la FTBF

Créons les lignes suivantes jusqu'à p^0 :

p^{n-2}	c_1	c_2	c_3	…
p^{n-3}	d_1	d_2	d_3	…
…				
p^0				

Avec :

$$c_1 = \frac{-1}{b_{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} b_n & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix} \qquad c_2 = \frac{-1}{b_{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} b_n & b_{n-4} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$d_1 = \frac{-1}{c_1} \cdot \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-3} \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \qquad d_2 = \frac{-1}{c_1} \cdot \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-5} \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

La première colonne de coefficient (noire) est appelées la **colonne des pivots**.

- **Enoncé du critère de Routh :**

Le système est stable si tous les termes de la colonne des pivots sont du même signe que b_n.

Il y a autant de racines à partie réelles positives que de changement de signe.

Une ligne de zéro indique l'existence de racines imaginaires pures.

- **Conclusion :**

Le critère de Routh est un **critère de stabilité absolue**. Il ne permet pas de préciser les marges de stabilité du système.

Sachant qu'une fonction de transfert est toujours le modèle d'un système réel (qui vieilli), et que ce modèle est toujours obtenu à partir d'approximations ou d'hypothèses plus ou moins fortes (linéarisation etc.…), montrer la stabilité du modèle ne prouve pas toujours celle du système : en effet, l'instabilité peut

être très proche, et une erreur sur un coefficient de la FTBF peut tout faire changer.
Les critères graphiques permettent de déterminer une marge de stabilité.

3.2 Critères graphique s.

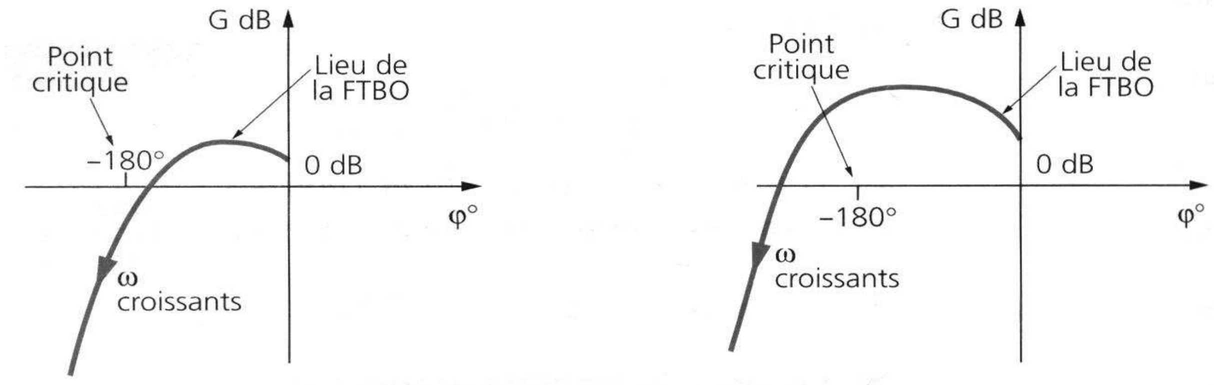
Les critères graphiques permettent d'étudier la stabilité d'un système en boucle fermée (FTBF) à partir de l'analyse fréquentielle de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO).

Remarque : bien que l'analyse se fasse dans le domaine fréquentielle, le résultat est valables pour tous les signaux d'entrée (voir séries de Fourier).

Règle du revers (non démontrée) : Exploitable dans les deux graphiques Bode et Black de la FTBO :

(attention on trace les diagrammes de la FTBO pour étudier la stabilité de la FTBF)

Stabilité dans Black : un système asservi linéaire est stable si en décrivant le lieu de transfert en boucle ouverte dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique (-180°,0 dB) à droite. Dans le cas contraire, il est instable. Utilisé en entreprise.

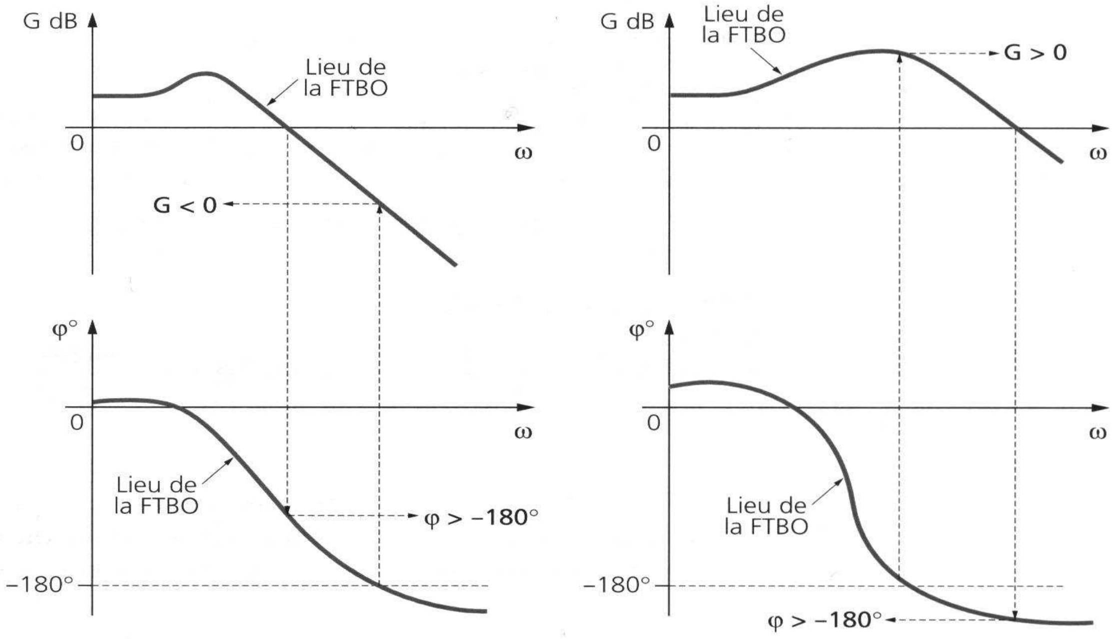


Le point critique est à **droite**
Le système est **stable**
en boucle fermée

Le point critique est à **gauche**
Le système est **instable**
en boucle fermée

Stabilité dans Bode :

G = 0 pour $\omega = \omega_{(G0)}$ et $\varphi = -180°$ pour $\omega = \omega_{(-180°)}$



Si pour $\omega = \omega_{(G0)}$ $\varphi > -180°$
ET que pour $\omega = \omega_{(-180°)}$ $G < 0$
ALORS le système est **STABLE**
en boucle fermée

Si pour $\omega = \omega_{(G0)}$ $\varphi < -180°$
OU que pour $\omega = \omega_{(-180°)}$ $G > 0$
ALORS le système est **INSTABLE**
en boucle fermée

Remarques :

- on voit bien qu'un gain trop important peut rendre le système instable
- On montre alors que les systèmes qui ont une FTBO du 1° ordre et du second ordre sont toujours stables en FTBF (diagramme de Black)

4. Marges de stabilité.

La force des méthodes graphiques est dans la possibilité de définir des réserves de stabilité sous forme de distances entre le lieu de la FTBO et le point critique.

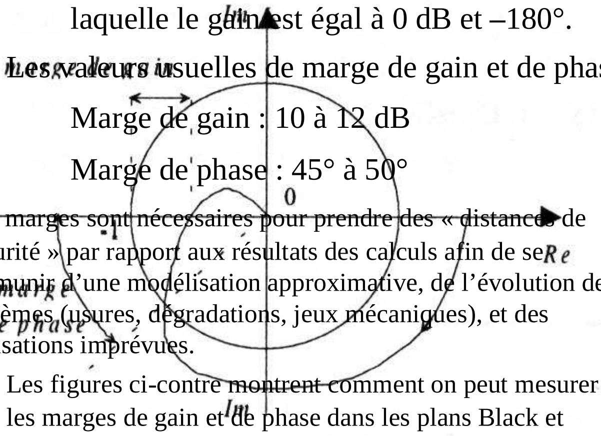
- On définit la marge de Gain et la marge de Phase.
  1. **Marge de gain** (en dB) : c'est la différence entre 0 dB et la valeur du gain pour lequel la phase est égale à -180°
  2. **Marge de phase** (en degré) : c'est la différence entre la valeur de la phase pour laquelle le gain est égal à 0 dB et –180°.
- Les valeurs usuelles de marge de gain et de phase sont :

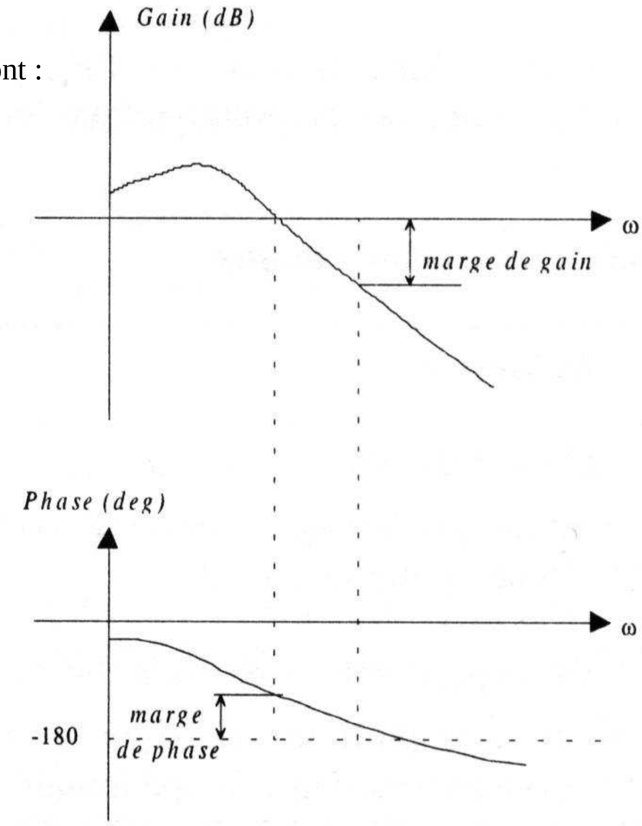
  Marge de gain : 10 à 12 dB

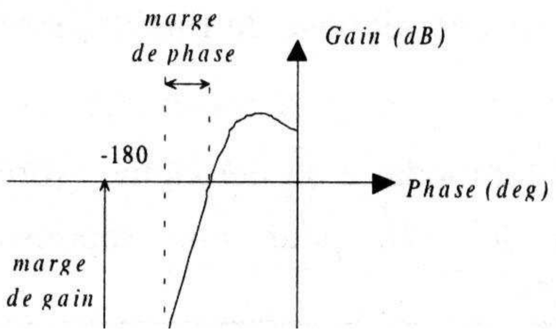
  Marge de phase : 45° à 50°

Ces marges sont nécessaires pour prendre des « distances de sécurité » par rapport aux résultats des calculs afin de se prémunir d'une modélisation approximative, de l'évolution des systèmes (usures, dégradations, jeux mécaniques), et des utilisations imprévues.

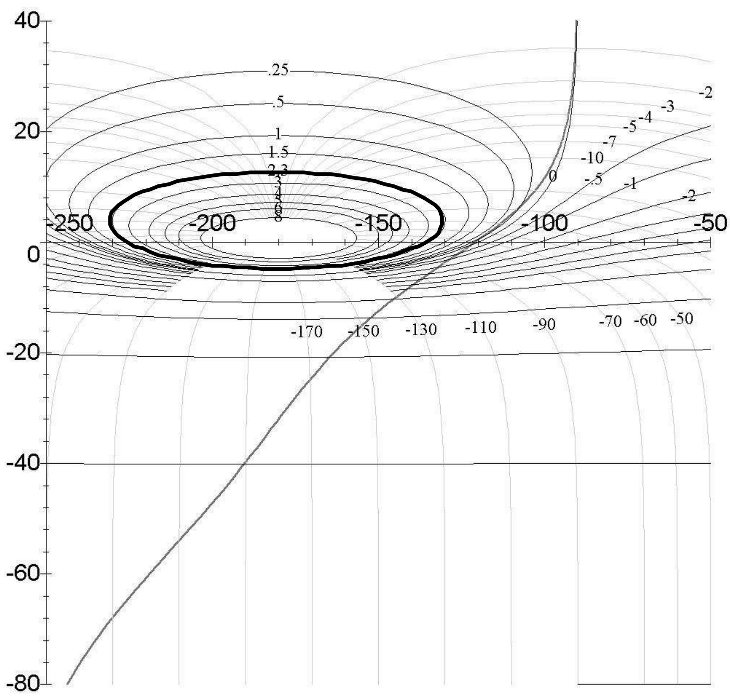
- Les figures ci-contre montrent comment on peut mesurer les marges de gain et de phase dans les plans Black et Bode.







Facteur de résonance.



Il est possible d'ajouter aux critères de marges une **limite à la résonance** :

La valeur usuelles de réglage est :

$Q_{dB} = 2.3$ dB

Le diagramme de Black permet de déterminer l'amplitude de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) à partir du lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO).

Le réglage du système asservi sera correct si le contour de la FTBO est tangent au contour à 2.3 dB.

Le point de tangence de la FTBO avec un contour d'amplitude est le point de résonance du système.