3. Systèmes linéaires

1. Introduction

Un système linéaire d'entrée x(t) et de sortie y(t) est régi par une équation différentielle à coefficients constants du type :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 . y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \ldots + b_0 . x(t), \quad n \geq m \ (\Sigma \text{ Physique})$$

Par transformation de Laplace (voir Chapitre 2 : transformée de Laplace, résolution des équa. diff.), on obtient :

$$Y(p) = \frac{N(p)}{D(p)} . X(p) + \frac{C(p)}{D(p)}$$

L'étude adoptée ici étant uniquement liées aux variations autour d'un état stable, les conditions initiales seront considérées comme nulles.

On pose alors : $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$

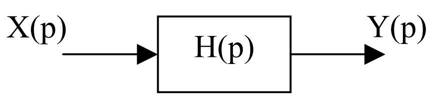
d'où :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

où H(p) est appelé ***fonction de transfert*** ou ***transmittance*** du système.

On peut alors représenter cette relation par le schéma fonctionnel ci-après (appelé aussi schéma bloc) qui exprime la relation :

$$Y(p) = H(p) . X(p) \ :$$



Remarque : La fonction H(p) est aussi qualifiée de fonction de transfert en boucle ouverte car elle ne comporte pas de réaction.

2. Types de réponse d'un système

Théorème de convolution :

> *Toute réponse y(t) d'un système causal à n'importe quelle sollicitation x(t) se détermine par l'expression suivante (produit de convolution) :*

$$y(t) = h(t) \underset{\tau}{\otimes} x(t) = \int_0^{\infty} h(\tau).x(t-\tau).d\tau\,, \quad \tau > 0$$

Le calcul de cette intégrale est souvent fastidieux. Par contre, l'étude dans le domaine de Laplace est de pouvoir déterminer facilement les caractéristique de la sortie y(t) connaissant la fonction de transfert H(p) du système et le signal d'entrée x(t). En effet, la relation dans le domaine de Laplace ne fait intervenir qu'une multiplication : $Y(p) = H(p).X(p)$

A partir de x(t), on détermine X(p). Puis à partir de H(p), on trouve l'expression de Y(p) par multiplication de H(p) avec X(p). Et enfin, par la transformée inverse de Laplace, on obtient y(t).

Définitions :

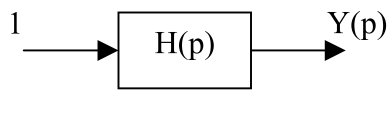
La sortie y(t) dépendant de l'entrée x(t) par une équation différentielle, on peut décomposer y(t) en une somme de 2 fonctions yl(t) et y2(t), soit y(t) = yl(t) + y2(t) expression dans laquelle y1(t) est la réponse libre et y2(t) est la réponse forcée :

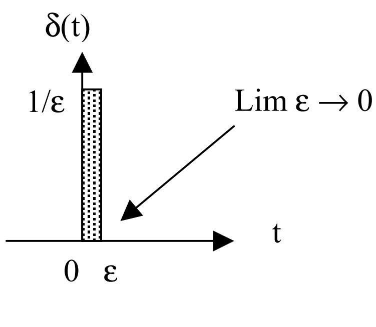
- y1(t) : réponse libre ou transitoire, est solution de l'équation différentielle sans second membre, dépend des conditions initiales et s'annule au bout d'un certain temps,

- y2(t) : réponse forcée ou régime permanent, est la solution particulière de l'équation différentielle avec second membre, et est du même type que l'entrée appliquée au système.

2.1. Réponse impulsionnelle

$x(t) = \delta(t)$: impulsion de Dirac



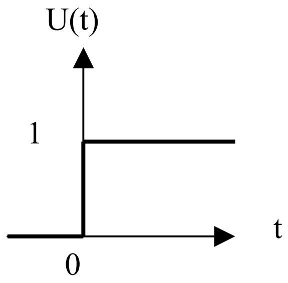


La transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est : $L[\delta(t)] = 1$.

Alors, la sortie devient : $Y(p) = H(p).X(p) = H(p)$ et $y(t) = h(t)$

$\Rightarrow$ *h(t) est appelée réponse impulsionnelle du système*

2.2. Réponse indicielle



$x(t) = U(t)$: entrée de type échelon unité.

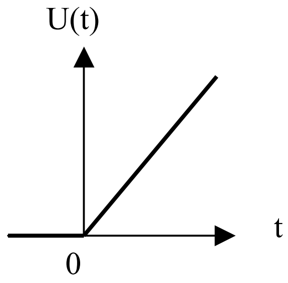
La sortie y(t) est appelée réponse indicielle unitaire.

Si $x(t) = 1.\mathrm{U(t)}$, alors $X(p) = U(p) = \dfrac{1}{p}$

Alors, la sortie devient : $Y(p) = \dfrac{H(p)}{p}$

Si $x(t) = A.U(t)$: entrée de type échelon d'amplitude A.

2.3. Réponse à une rampe



$x(t) = t$: entrée de type rampe

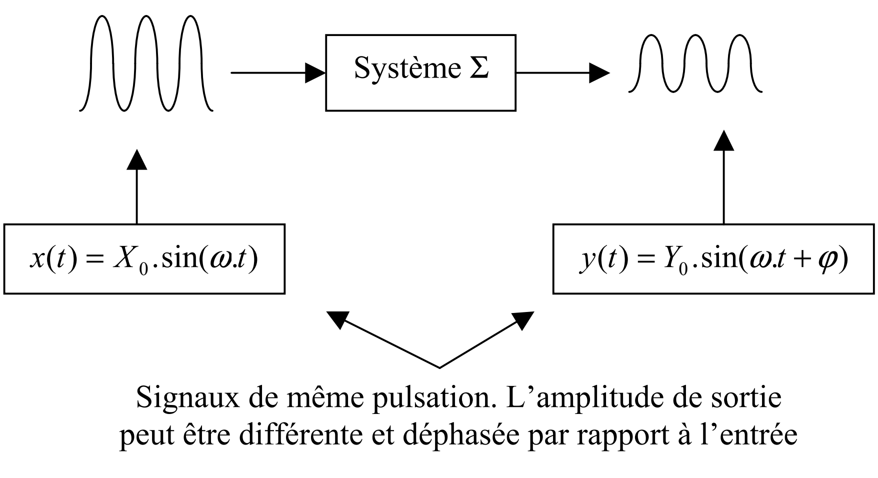
La sortie y(t) est appelée réponse en vitesse,

Si $x(t) = t.U(t)$, alors $X(p) = \dfrac{1}{p^2}$

Alors, la sortie devient : $Y(p) = \dfrac{H(p)}{p^2}$

2.4. Réponse harmonique

Si $x(t) = X_0.\sin(\omega.t)$ (entée sinusoïdale), on obtient la réponse harmonique $Y(p = j\omega)$



3. Influence des pôles sur le système

Soit H(p) la fonction de transfert du système. On peut mettre H(p) se met sous la forme d'un quotient de polynôme en p :

$$H(p) = \frac{b_m.p^m + b_{m-1}.p^{m-1} + ... + b_0}{a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + ... + a_0} \qquad n \geq m \ (\Sigma \text{ Physique})$$

ou encore :

$$H(p) = K_0.\frac{(p-z_1).(p-z_2)....(p-z_m)}{(p-p_1).(p-p_2)....(p-p_n)},$$

l'ensemble des z_i forme les ***zéros*** de H(p),
l'ensemble des p_i forme les ***pôles*** de H(p),
n est l'ordre du système.

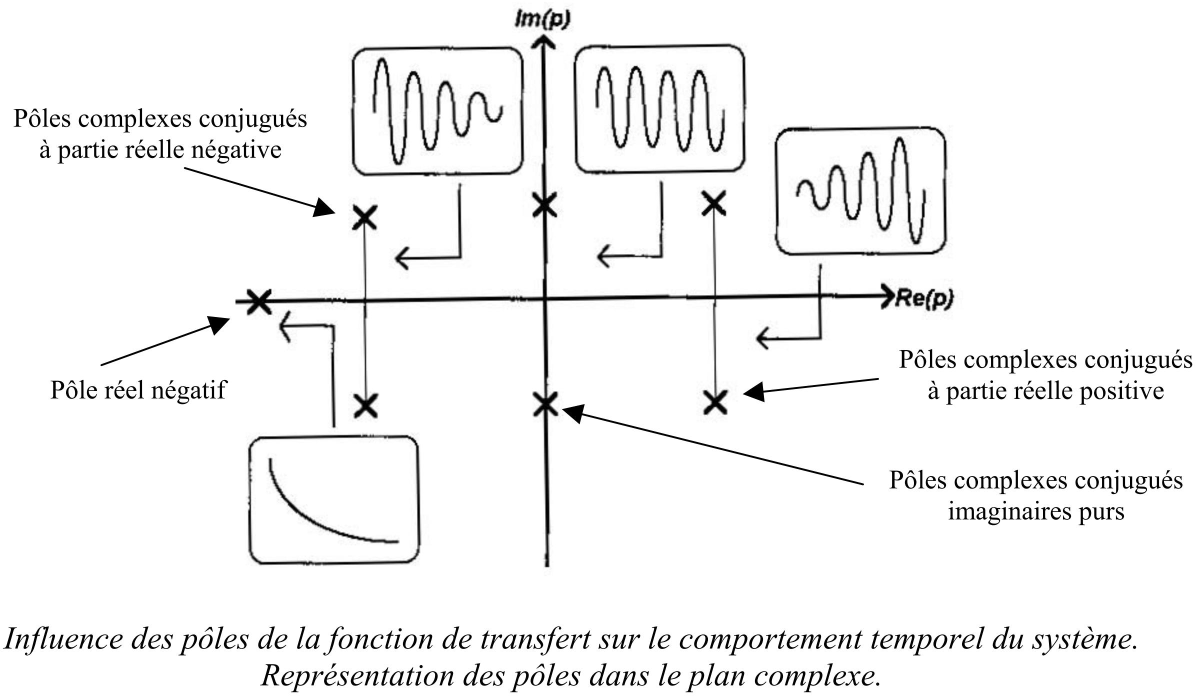
ou encore :

$$H(p) = \frac{k}{p^N}.\frac{1+c_1.p+c_2.p^2+...}{1+d_1.p+d_2.p^2+...},$$

N représente le type ou la classe du système,
k est le gain statique.

Définitions :

un système ne sera stable que si la partie réelle de tous ses pôles de sa fonction de transfert est négative,
Plus cette partie réelle sera grande en valeur absolue, plus l'amortissement sera rapide et donc plus le système sera rapide.
Les pôles dominants sont ceux dont la partie réelle est la plus faible en valeur absolue, donc ceux qui ont le plus d'influence sur la réponse temporelle.

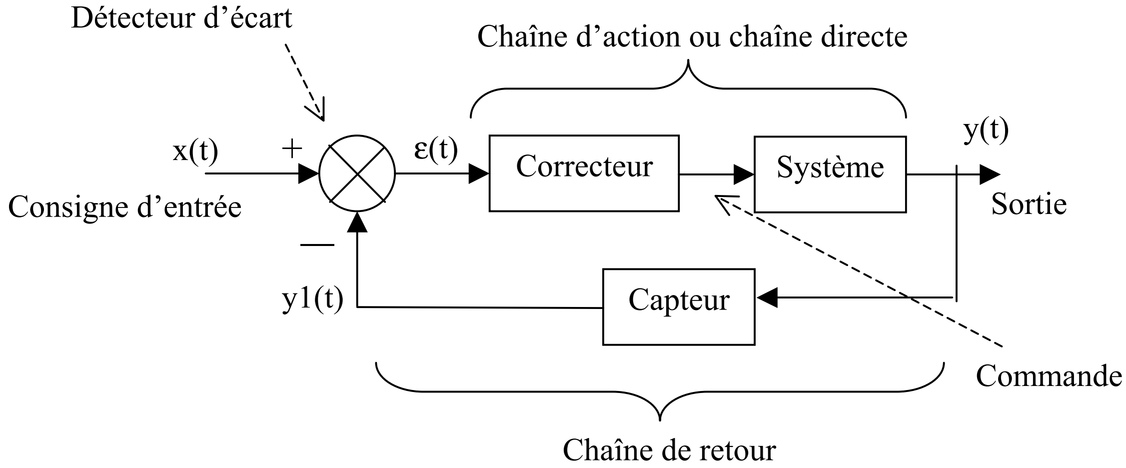


Influence des pôles de la fonction de transfert sur le comportement temporel du système. Représentation des pôles dans le plan complexe.

4. Système en boucle fermée

Le but d'une boucle d'asservissement est de faire en sorte que la sortie du système suive la consigne d'entrée. Pour cela, au travers d'un capteur, la sortie est réinjectée à l'entrée dans un comparateur (soustracteur idéal). La différence entre l'entrée et la sortie (appelée erreur) est calculée et forme le signal de commande de la chaîne directe (correcteur + système). On réalise alors une contre-réaction (rétroaction)

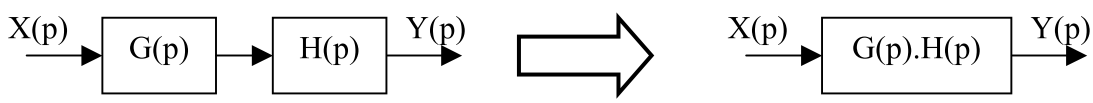
- Si l'entrée est constante ou varie par palier, on parle de Régulation.
- Si l'entrée est variable, on parle d'asservissement



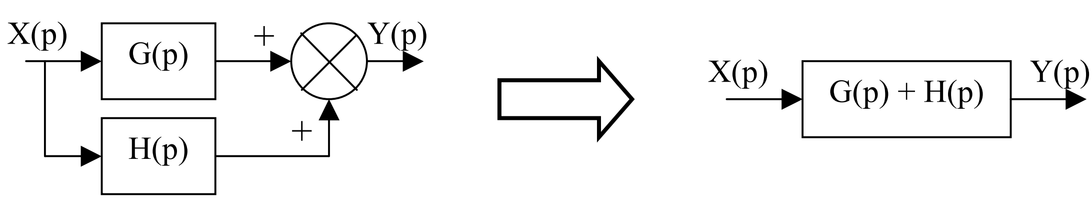
⇒ La transmittance du système ainsi **bouclé** est appelée **transmittance en boucle fermée**

5. Opérations sur les schémas fonctionnels

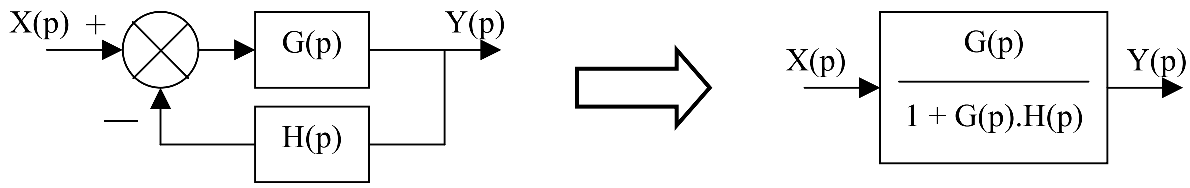
- règle 1 :



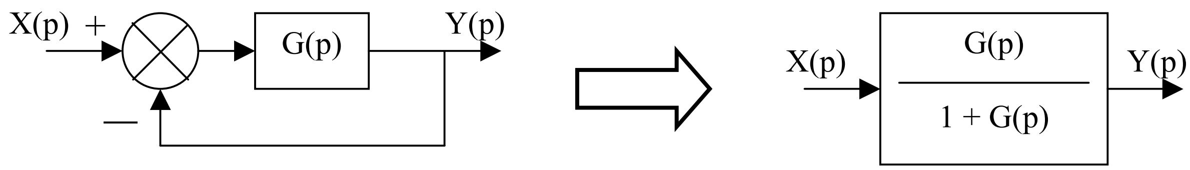
- règle 2 :



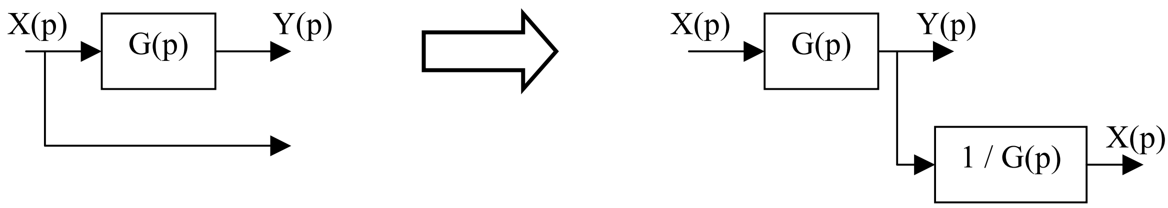
- règle 3 :



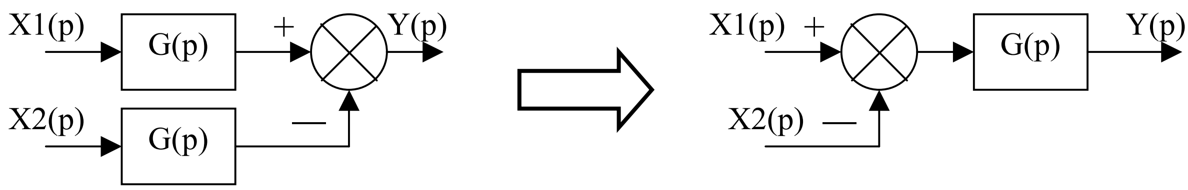
- règle 4 :



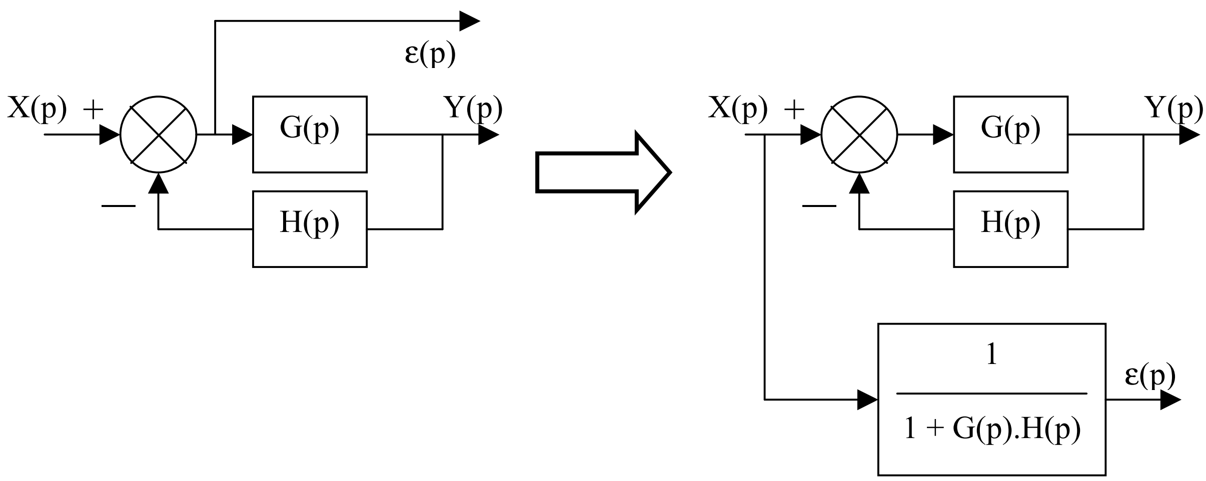
- règle 5 :



- règle 6 :



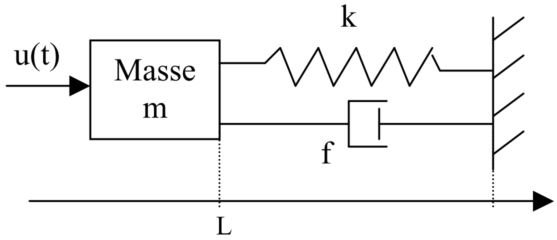
- règle 7 :



6. Modélisation des systèmes réels

Exemples de systèmes mécaniques

- Soit une masse m (kg) sur laquelle on applique une force u(t). Elle est retenue par un ressort de raideur k (N/m) et un amortisseur de frottement visqueux f (N/m/s).

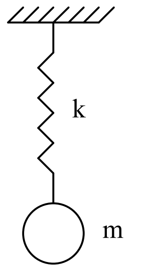


  On appelle L la position de la masse. L'origine de ce repère est prise au niveau de la position du point de repos de la masse m.

  L'équation du mouvement de la masse s'écrit: $m.\frac{d^2L}{dt^2}+f.\frac{dL}{dt}+k.L=u(t)$

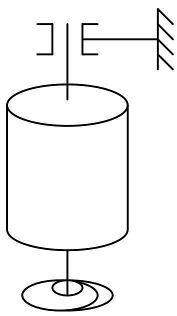
- Soit une bille de masse m (kg) suspendue à un ressort de raideur k (N/m). Soit x qui l'altitude référencée par rapport à la position du point de repos de la bille.

  L'équation du mouvement de la masse s'écrit: $m.\frac{d^2x}{dt^2}+k.x=0$



- Soit un cylindre de mouvement d'inertie J (kg.m^2) suspendu à un fil de torsion. Il est soumis à un couple de torsion de constante élastique C (mN/rd) et à un couple de frottement visqueux de constante f (mN/rd/s). Soit θ la valeur de l'angle de rotation, alors

  le couple auquel est soumis le cylindre est: $\Gamma_m = J.\frac{d^2\theta}{dt^2}+f.\frac{d\theta}{dt}+C.\theta$



Exemples de systèmes électriques

Voir TD