6. Système du 1^{er} ordre

1. Définition

Un système physique d'entrée x(t) et de sortie y(t) est dit du premier ordre s'il est régi par une équation différentielle du premier ordre du type :

$$\tau.\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k.x(t)$$

ce qui correspond à une transmittance en boucle ouverte :

$$X(p) \longrightarrow \boxed{G(p)} \longrightarrow Y(p)$$

$$\boxed{G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{1+\tau.p}}$$

avec :

$$\begin{cases} \text{- } k \text{ : gain statique du système,} \\ \text{- } \tau \text{ : constante de temps } (\tau > 0) \text{ : caractérise la vitesse d'évolution de } y(t) \end{cases}$$

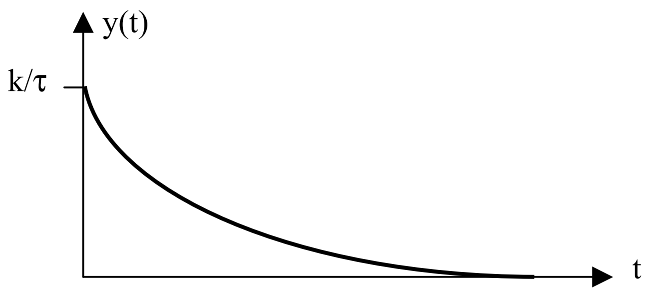
2. Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est obtenue avec une entrée de type Dirac, x(t) = δ(t),

D'où : $Y(p) = X(p).G(p) = 1 \times \frac{k}{1+\tau.p} = \frac{k}{1+\tau.p}$

Ce qui donne :

$$s(t) = \frac{k}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$



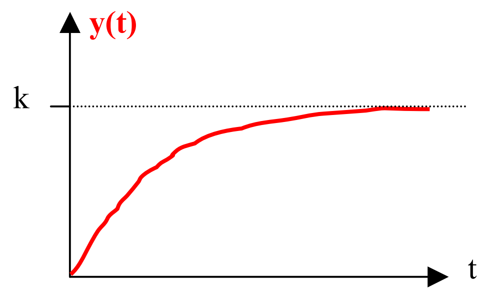
3. Réponse indicielle

La réponse indicielle est obtenue avec une entrée de type échelon, x(t) = U(t),

D'où : $$Y(p) = X(p).G(p) = \frac{1}{p} \times \frac{k}{1+\tau.p} = \frac{k}{p.(1+\tau.p)}$$

Ce qui donne :

$$y(t) = k.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



Quelques valeurs remarquables :

t =	y(t) =
τ	0,63.k
$3 \times \tau$	0,95.k
$5 \times \tau$	0,99.k

Temps de réponse à 5% :
$Tr_{5\%} = 3.\tau$

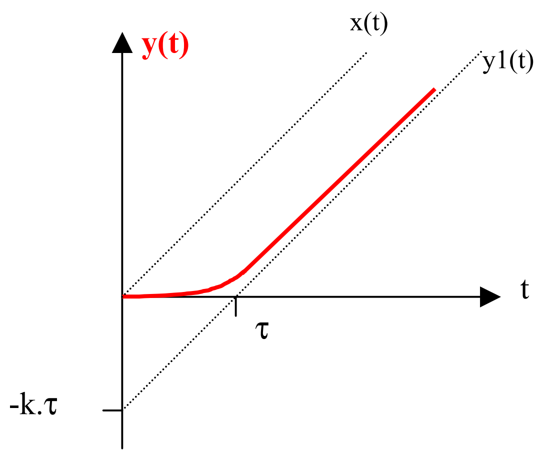
4. Réponse de vitesse

La réponse de vitesse est obtenue avec une entrée de type rampe : e(t) = t × U(t)

D'où : $$Y(p) = X(p).G(p) = \frac{1}{p^2} \times \frac{k}{1+\tau.p} = \frac{k}{p^2.(1+\tau.p)}$$

Ce qui donne :

$$y(t) = k.\left(t - \tau + \tau.e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



On note :

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y1(t) = k.(t-\tau)$$

$y1(\tau) = 0$; $y1(0) = -k.\tau$

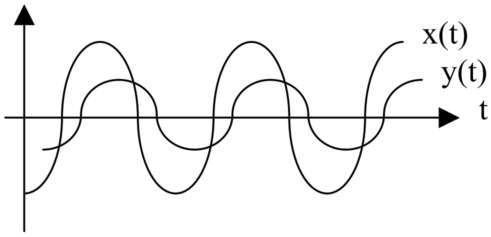
5. Réponse harmonique

La réponse harmonique est obtenue avec une entrée de type sin ou cos : x(t)= cos(ω.t)

Ce qui donne :

$$y(t) = \frac{k}{1+\tau^2.\omega^2}.(\cos(\omega.t) + \omega.\tau.\sin(\omega.t))$$

ou encore : $y(t) = \alpha.\cos(\omega.t + \varphi)$



6. Lieux de Bode

- *Etude théorique du Gain*

$$G_{dB} = 20.\log_{10}\left|\frac{Y(j.\omega)}{X(j.\omega)}\right| = 20.\log_{10}|G(j.\omega)| \qquad \text{avec} \qquad G(j.\omega) = \frac{k}{1+j.\tau.\omega}$$

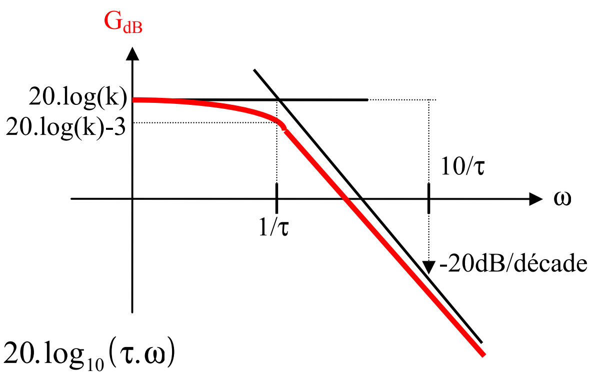
d'où:

$$\boxed{G_{dB} = 20.\log_{10}\frac{k}{\sqrt{1+\tau^2.\omega^2}}}$$

- *Étude asymptotique du gain*

L'expression précédente se met sous la forme:

$$G_{dB} = 20.\log_{10}(k) - 10.\log_{10}(1+\tau^2.\omega^2)$$



1^{er} cas:	si $\omega \to 0$	alors	$G_{dB} \approx 20.\log_{10}(k)$
2^{eme} cas:	si $\omega \to \infty$	alors	$G_{dB} = 20.\log_{10}(k) - 20.\log_{10}(\tau.\omega)$
3^{eme} cas:	si $\omega = 1/\tau$	alors	$G_{dB} = 20.\log_{10}(k) - 3$
4^{eme} cas:	si $\omega = 10/\tau$	alors	$G_{dB} = 20.\log_{10}(k) - 20$

Fréquence de Coupure : $\omega = 1/\tau$

- *Étude théorique de la phase*

$$\varphi = \mathrm{Arg}(G(j.\omega)) \qquad \text{avec} \qquad G(j.\omega) = \frac{k}{1+j.\tau.\omega}$$

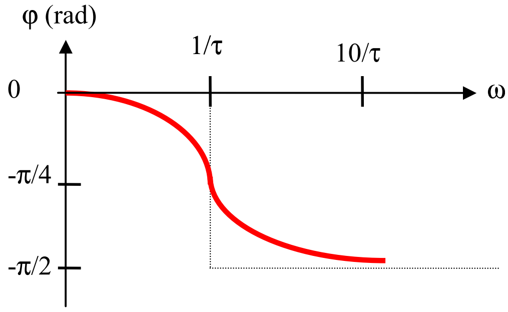
d'où: $\boxed{\varphi = -\mathrm{Arc}\tan(\tau.\omega)}$ (φ en rad)

- *Étude asymptotique de la phase*

1er cas: si $\omega \to 0$ alors $\varphi \to 0$

2eme cas: si $\omega \to \infty$ alors $\varphi \to -\dfrac{\pi}{2}$

3eme cas: si $\omega = 1/\tau$ alors $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$



7. Lieu de Nyquist

$$G(j.\omega) = \frac{k}{1 + j.\tau.\omega} = \frac{k}{1 + j.\tau.\omega} \times \frac{1 - j.\tau.\omega}{1 - j.\tau.\omega}$$

on a alors:

$$\boxed{X = \mathrm{Re}\left[G(j.\omega)\right] = \frac{k}{1 + \tau^2.\omega^2} \qquad Y = \mathrm{Im}\left[G(j.\omega)\right] = \frac{-k.\tau.\omega}{1 + \tau^2.\omega^2}}$$

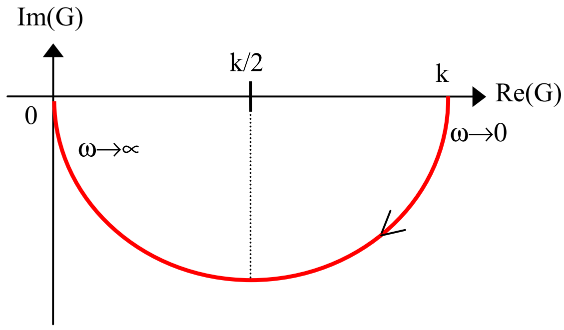
si $\omega \to 0$ alors $X = k$ et $Y = 0^-$

si $\omega \to \infty$ alors $X = 0^+$ et $Y = 0^-$

on a: $\dfrac{Y}{X} = -\omega.\tau$ d'où : $X = \dfrac{k}{1 + \dfrac{Y^2}{X^2}} = \dfrac{k.X^2}{X^2 + Y^2}$

L'équation devient alors: $X^2 + Y^2 = k.X$ ou encore: $\boxed{\left(X - \dfrac{k}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\dfrac{k}{2}\right)^2}$

C'est l'équation d'un cercle de rayon k/2 centré en (k/2;0). Le lieu de Nyquist correspondant est donc le demi-cercle inférieur (car ω est positif).



7. Lieu de Black