7. Système du 2nd ordre

Un système physique d'entrée e(t) et de sortie s(t) est dit du second ordre s'il est régi par une équation différentielle du second degré à coefficients constants du type :

$$\mathrm{b}.\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{s(t)}}{\mathrm{dt}^2}+\mathrm{a}.\frac{\mathrm{ds(t)}}{\mathrm{dt}}+\mathrm{s(t)}=\mathrm{k.e(t)}$$

ce qui correspond à une transmittance en boucle ouverte :

$$e(p) \longrightarrow \boxed{G(p)} \longrightarrow s(p)$$

$$\boxed{\mathrm{G(p)}=\frac{\mathrm{S(p)}}{\mathrm{E(p)}}=\frac{\mathrm{k}}{1+\mathrm{a.p}+\mathrm{b.p}^2}}$$

D'une manière générale, on écrit la fonction de transfert d'un système de 2nd ordre de la façon suivante:

$$\boxed{G(p)=\frac{k}{1+\left(\frac{2.\zeta}{\omega_0}\right).p+\left(\frac{1}{\omega_0^2}\right).p^2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{G(p)=\frac{k.\omega_0^2}{p^2+2.\zeta.\omega_0.p+\omega_0^2}}$$

avec :

- k : gain statique du système,
- ω_0 : pulsation naturelle du système,
- ζ : facteur d'amortissement

3 études possibles:

$0<\zeta<1$: G(p) possède 2 pôles complexes conjugués p1 et p2 : $\begin{cases} p1 \\ p2 \end{cases} = -\zeta.\omega_0 \pm j.\omega_0.\sqrt{1-\zeta^2}$

$\zeta=1$: G(p) possède 1 pôle double: $p0=-\zeta.\omega_0$

$\zeta>1$: G(p) possède 2 pôles réels p1 et p2 : $\begin{cases} p1 \\ p2 \end{cases} = -\zeta.\omega_0 \pm \omega_0.\sqrt{\zeta^2-1}$

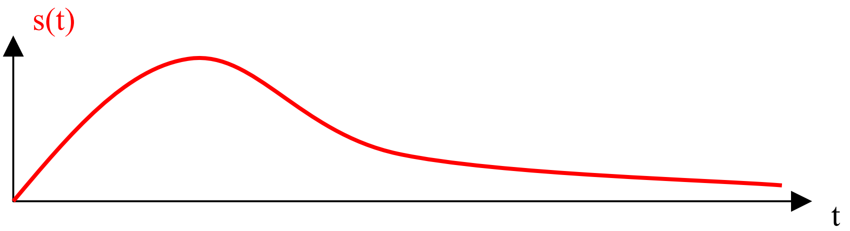
1. Réponse impulsionnelle

Avec une entrée de type Dirac, $e(t) = \delta(t)$, $\qquad S(p) = E(p).G(p) = \dfrac{k.\omega_0^2}{p^2 + 2.\zeta.\omega_0.p + \omega_0^2}$

1^{er} cas: ζ>1 : le système est amorti

$$S(p) = \frac{k.\omega_0^2}{(p-p1).(p-p2)} \quad \text{d'où} \quad s(t) = \frac{k.\omega_0^2}{p2-p1}\left(e^{-p1.t} - e^{-p2.t}\right)$$

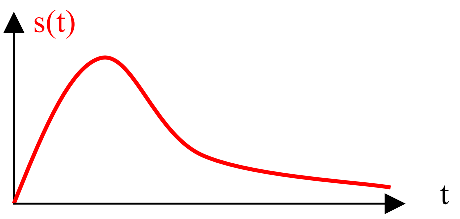
Ce qui donne :



$2^{ème}$ cas: ζ=1 : le système est amorti

$$S(p) = \frac{k.\omega_0^2}{(p-p0)^2} \quad \text{d'où} \quad s(t) = k.\omega_0^2.t.e^{-\zeta.\omega_0.t}$$

Ce qui donne :

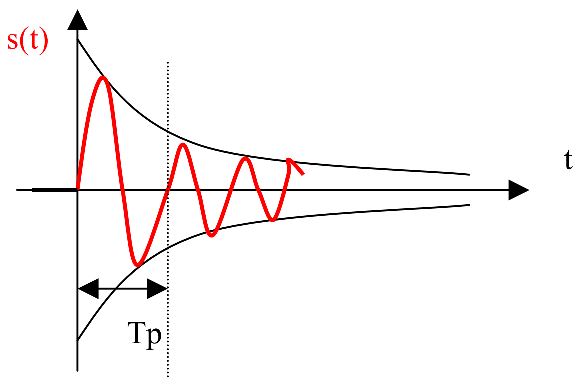


$3^{ème}$ cas: 0 < ζ < 1 : le système est sous-amorti

$$S(p) = \frac{k.\omega_0^2}{(p-p1).(p-p2)} \quad \text{d'où} \quad s(t) = \frac{k.\omega_0}{\sqrt{1-\zeta^2}}.e^{-\zeta.\omega_n.t}.\sin(\omega_0.\sqrt{1-\zeta^2}.t)$$

On pose alors: $\omega_p = \omega_0.\sqrt{1-\zeta^2}$
(pulsation propre)

Ce qui donne comme représentation:



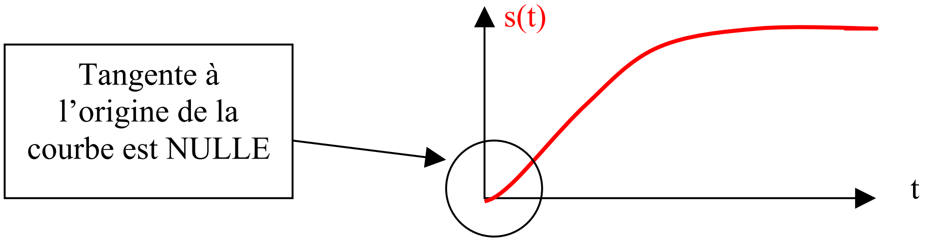
On a: $Tp = \dfrac{2.\pi}{\omega_p}$

2. Réponse indicielle

Avec une entrée en échelon, $e(t) = 1$, $S(p) = E(p).G(p) = \dfrac{k.\omega_0^2}{p.\left(p^2 + 2.\zeta.\omega_0.p + \omega_0^2\right)}$

cas où $\zeta > 1$: la réponse est apériodique

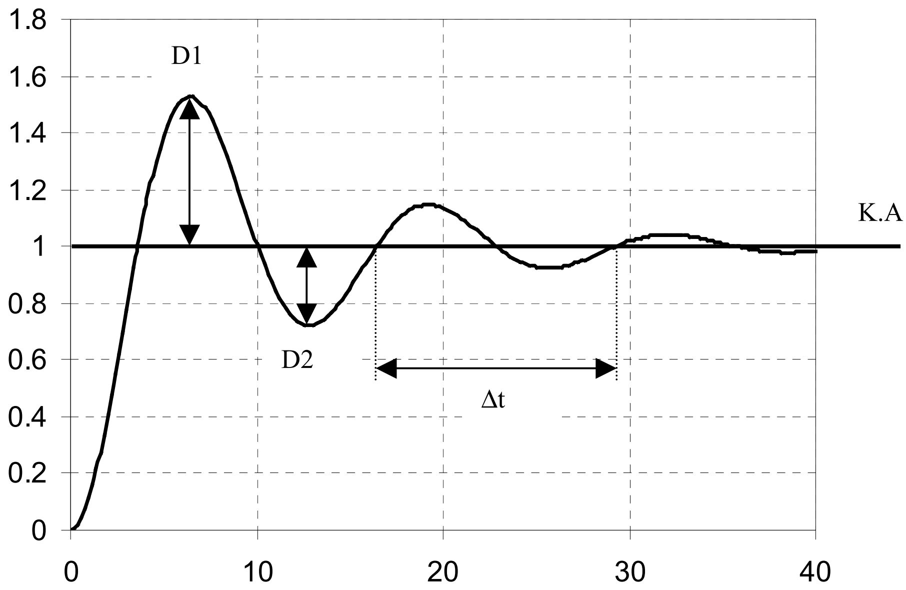
$$S(p) = \frac{k.\omega_0^2}{p.(p - p1).(p - p2)} \quad \text{d'où} \quad s(t) = k.\left[1 - \frac{\omega_0}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{e^{-p2.t}}{p2} - \frac{e^{-p1.t}}{p1}\right)\right]$$



cas où $0 < \zeta < 1$ (cf. abaque)

$$s(t) = k\left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_p}.e^{-\zeta.\omega_0.t}.\left(\zeta.\sin(\omega_p.t) + \sqrt{1 - \zeta^2}.\cos(\omega_p.t)\right)\right]$$ ou alors :

$$\mathrm{s(t)} = \mathrm{k}\left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_p}.\mathrm{e}^{-\zeta.\omega_n.t}.\sin(\omega_p.t - \varphi)\right] \quad \text{avec} \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right)$$



Pseudo période: $T_p = \Delta t$

Pulsation propre : $\omega_p = \dfrac{2.\pi}{T_p} = \omega_0.\sqrt{1-\zeta^2}$

Dépassement d'ordre i : $D_i = S_i - s(\infty) = k.A.(-1)^{i-1}.\exp\left(\dfrac{-i.\zeta.\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$ (cf. abaque)

Temps de réponse à 5% :

$\exists\, tr > 0,\ \forall t > tr,\quad 95\%.KA < s(t) < 105\%.KA$ (cf. abaque)

3. Lieux de transfert (cf. abaque)

$$G(j.\omega) = \frac{k.\omega_0^2}{(j.\omega)^2 + 2.\zeta.\omega_0.j.\omega + \omega_0^2} = \frac{k}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2.j.\zeta.\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

On pose alors $u = \dfrac{\omega}{\omega_0}$

On obtient: $G(j.u) = \dfrac{k}{(1-u^2) + 2.j.\zeta.u}$

Ce qui donne pour le gain et la phase:

$$|G(j.u)| = \frac{k}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4.\zeta^2.u^2}}$$

$$\arg(G(j.u)) = -\arctan\left(\frac{2.\zeta.u}{1-u^2}\right)$$