

Exclu du Prêt

### CHEZ LE MEME EDITEUR

#### Des mêmes auteurs :

— *Electronique : Problèmes d'examens corrigés et commentés.*

Tomes 1 et 2 — *Electronique des petits signaux.*

#### Autres ouvrages :

F. MILSANT

— *Cours d'électronique.*

1 - Circuits à régime variable.

2 - Composants électroniques.

3 - Amplification. Circuits intégrés.

4 - Contre-réaction. Oscillation. Transformation des signaux.

5 - Diodes. Thyristors. Commande des moteurs.

F. DATTÉE avec la collaboration de D. VENOT

— *Electronique. Concepts de base.*

F. MESA

— *Méthodes d'études des circuits électriques.*

H. PIRAUX, J. MILSANT

— *Dictionnaire des termes relatifs à l'électronique, l'électrotechnique, et aux applications connexes.*

— *Anglais - français.*

— *Français - anglais.*

S. THELLIEZ, J.-M. TOULOTTE

— *Applications industrielles du Grafcet.*

— *Grafcet et logique industrielle programmée.*

R. CHAUPRADE

— *Electronique de puissance.*

1 - Commande des moteurs à courant continu.

R. CHAUPRADE, F. MILSANT

2 - Commande des moteurs à courant alternatif.

# ELECTRONIQUE

## PROBLÈMES D'EXAMENS CORRIGÉS ET COMMENTÉS

Electronique de puissance

Hacheurs et onduleurs

par

Djemmal BENADDA

Docteur Ingénieur en électronique  
Chercheur à l'Université de Lille 1

et

Frédéric VANDEVILLE

Maître ès sciences et techniques  
(Electronique, Electrotechnique, Automatique)

  
EYROLLES

61, boulevard Saint-Germain — 75005 PARIS

1987



Si vous désirez être tenu au courant de nos publications, il vous suffit d'adresser votre carte de visite au :

Service « Presse », Editions EYROLLES,  
61, Boulevard Saint-Germain  
75240 PARIS CEDEX 05,

en précisant les domaines qui vous intéressent.  
Vous recevrez régulièrement un avis de parution des nouveautés en vente chez votre libraire habituel.

« La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1<sup>er</sup> de l'article 40). »

« Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. »

© Editions EYROLLES, 1987

*L'utilisation des convertisseurs d'énergie utilisés en électronique de puissance (redresseurs, hacheurs, onduleurs...) a pris, depuis quelques années, une grande extension car l'ensemble des applications les concernant est très vaste. Parmi celles-ci, citons :*

- l'obtention de l'énergie électrique continue et la commande des moteurs à courant continu pour les redresseurs,*
- la commande des moteurs à courant continu pour les hacheurs,*
- les alimentations de sécurité d'une part et la commande des moteurs à courant alternatif d'autre part pour les onduleurs,*
- le réglage de la puissance pour les gradateurs... etc...*

*L'étude de ces convertisseurs n'est pas toujours simple. C'est pourquoi il nous a semblé utile de rédiger un livre de problèmes, permettant ainsi au lecteur de parfaire ses connaissances et mieux comprendre le fonctionnement de ces dispositifs.*

*Ce livre pouvait comporter :*

- soit un nombre élevé de problèmes avec des solutions brièvement présentées ;*
- soit un nombre limité de problèmes avec des solutions clairement détaillées, accompagnées de larges commentaires.*

*Nous avons choisi la deuxième option. En effet, nous estimons qu'un exposé bien détaillé permet d'acquérir une méthode de travail efficace. De ce fait, l'étude de problèmes similaires se trouve facilitée.*

*Ce livre se compose de deux parties qui portent respectivement sur les hacheurs et les onduleurs autonomes monophasés et triphasés. Leur fonctionnement, ainsi que leur application à la commande des moteurs électriques sont largement développés. Une part importante a été réservée aux circuits de blocage, lorsque le convertisseur est à thyristors, et aux circuits d'aide à la commutation, lorsque le convertisseur est à transistors.*

*Il s'adresse aux étudiants préparant la maîtrise EEA, le BTS électrotechnique et le DUT Génie électrique. Il sera, par ailleurs, un outil de travail très précieux pour les auditeurs du CNAM, les ingénieurs en cours de formation et les techniciens supérieurs de l'industrie.*

*Les auteurs.*

# TABLE DES MATIERES

Préface .....	VII
● Problème n° 1 – Etude d'un hacheur série : Blocage du thyristor principal à l'aide d'un circuit formé de trois thyristors auxiliaires, un condensateur et une bobine .....	1
● Problème n° 2 – Etude d'un hacheur dévolteur : Commande d'un moteur à courant continu à flux constant .....	27
● Problème n° 3 – Etude d'un hacheur parallèle : Application au freinage par récupération d'un moteur à courant continu ..	49
● Problème n° 4 – Etude complète d'un moteur série : Freinage sans récupération par hacheur .....	65
● Problème n° 5 – Transistor en commutation .....	95
● Problème n° 6 – Onduleur autonome .....	117
● Problème n° 7 – Etude d'un four à induction alimenté par un onduleur autonome monophasé à thyristors .....	145
● Problème n° 8 – Onduleur autonome triphasé alimentant un moteur asynchrone : – Etude des harmoniques – Etude du circuit de blocage .....	169
Bibliographie .....	211

**Etude d'un hacheur série :  
Blocage du thyristor principal à l'aide  
d'un circuit formé de trois thyristors auxiliaires,  
un condensateur et une bobine.**

**1. Rôle d'une diode dans un circuit L-C :**

On considère le circuit de la figure 1.

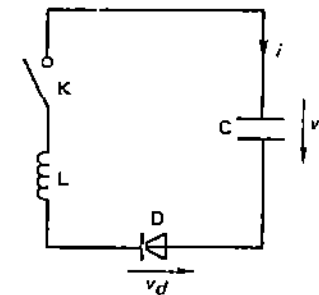


Fig. 1.1. - Circuit L-C.

La diode D est supposée parfaite et le condensateur C est initialement chargé sous une tension  $E$  : on a donc  $v_c = E > 0$ . A l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur K.

1.1. Ecrire l'équation différentielle liant  $i$  à L et C.

1.2. Exprimer  $i$  et  $v_c$  en fonction de  $t$  pour  $t$  variant de 0 à  $t_1$  ( $t_1$  est l'instant où le courant  $i$  s'annule). Exprimer cet instant en fonction de L et C. Que se passe-t-il lorsque  $t > t_1$  ?

**Notations**

Dans tout le livre, les grandeurs continues sont notées avec des majuscules. Les grandeurs variables sont notées par des minuscules lorsqu'elles sont instantanées et par des majuscules soulignées lorsqu'elles sont complexes.

1.3. Représenter graphiquement  $i$  et  $v_c$  en fonction du temps. Préciser la valeur de  $v_c$  à l'instant  $t_1$ .

## 2. Etude du fonctionnement d'un hacheur :

### 2.1. Rappels théoriques.

2.1.1. Qu'est-ce qu'un hacheur ? Quel type de conversion réalise-t-il ?

2.1.2. Rappeler le rôle de la gâchette d'un thyristor.

2.1.3. Donner les conditions de blocage d'un thyristor.

2.2. Un hacheur H est associé à une source de tension constante  $E > 0$  et à un récepteur. H est monté en série entre les points A et B (cf. figure 2). Le thyristor principal Th permet, quand il est débloqué, l'alimentation du récepteur par la source E.

$Th_1$ ,  $Th_2$  et  $Th_3$  sont des thyristors auxiliaires destinés à assurer le fonctionnement correct du circuit de blocage du thyristor principal Th. Ils assurent successivement la charge du condensateur C, puis l'inversion de cette charge et enfin l'application de cette nouvelle charge aux bornes de Th.

Les gâchettes de Th,  $Th_1$ ,  $Th_2$  et  $Th_3$  reçoivent en temps voulu les impulsions assurant leur déblocage.

Initialement, tous les thyristors sont bloqués et C est déchargé. Le potentiel du point A est alors égal à E et celui de B est alors égal à  $E_0$  (cf. figure 2) avec :

$$0 < E_0 < E.$$

La référence des potentiels étant le point M.

Les composants, utilisés (Th,  $Th_1$ ,  $Th_2$ ,  $Th_3$ , L, L' et C) sont supposés parfaits. Le courant de maintien des thyristors est très faible. On le prendra égal à 0.

On réalise successivement les trois opérations suivantes :

- On débloque  $Th_1$  permettant ainsi la charge de C :

2.2.1. Donner la valeur finale de la tension  $v_c$  aux bornes de C et l'état du thyristor  $Th_1$  en fin de charge.

- On débloque  $Th_2$ ,  $v_c$  évolue :

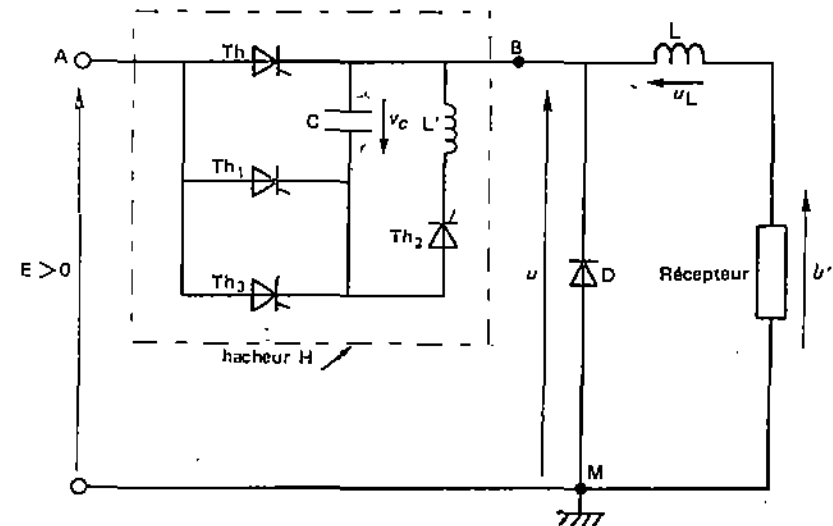


Fig. 1.2. - Schéma complet du hacheur H.

2.2.2. Donner en fin d'évolution la valeur de  $v_c$  et préciser l'état du thyristor  $Th_2$ . Le résultat est-il modifié par le fait que Th soit passant ou non passant ?

- Th est maintenant passant :

2.2.3. Montrer que si on débloque  $Th_3$ , il y a retour à l'état initial avec tous les thyristors bloqués.

## 3. Récepteur alimenté par l'intermédiaire d'un hacheur :

Le déblocage successif et périodique de  $Th_1$ ,  $Th_2$ , Th et  $Th_3$  assure ainsi une alimentation périodique en continu du récepteur. Le hacheur H conduit pendant la durée  $\theta$  et ne conduit pas pendant la durée  $\theta'$ . Sa période est donc :  $T = \theta + \theta'$  ; on pose :

$$x = \frac{\theta}{T} \text{ (Rapport cyclique)}$$

D est une diode parfaite. Le récepteur comprend une f.c.é.m  $E'$  en série avec une résistance R. L est une inductance de lissage de valeur très grande. L'ensemble peut se représenter par le schéma donné figure 3.

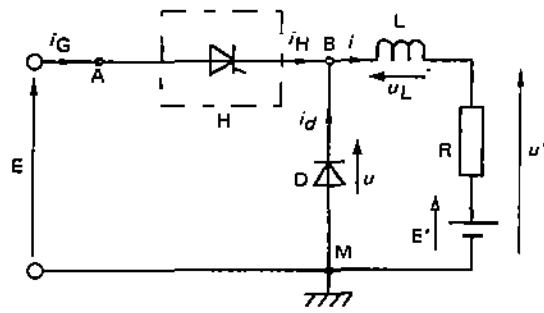


Fig. 1.3.

### 3.1. Le hacheur conduit : $0 \leq t \leq \theta$ .

#### 3.1.1. Quelle est la valeur de $i_d$ ?

3.1.2. Ecrire l'équation différentielle qui relie  $i$  à  $E$ ,  $E'$ ,  $R$  et  $L$  ;  $i$  étant le courant dans le récepteur.

3.1.3. Exprimer  $i$  et vérifier que dans l'intervalle  $[0, \theta]$ ,

$$i = \left\{ I_m - \frac{(E - E')}{R} \right\} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{(E - E')}{R}$$

avec  $\tau = \frac{L}{R}$ .  $I_m$  est la valeur de  $i$  à l'instant  $t = 0$  ; c'est aussi la valeur minimale de  $i$ .

En déduire la valeur maximale  $I_M$  de  $i$  à l'instant  $t = \theta$ , en fonction de  $E$ ,  $E'$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $\theta$  et  $I_m$ .

### 3.2. Le hacheur ne conduit pas : $\theta \leq t \leq T$ .

On posera  $t' = t - \theta$ .

3.2.1. Comment évolue  $i_d$  ? Préciser le rôle de la diode D.

3.2.2. Ecrire l'équation différentielle qui relie  $i$  à  $E'$ ,  $R$  et  $L$ .

3.2.3. Exprimer  $i$  et vérifier que dans l'intervalle  $[\theta, T]$ ,

$$i = -\frac{E'}{R} + \left( I_m + \frac{E'}{R} \right) e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau}}$$

En déduire la valeur minimale  $I_m$  de  $i$  en fonction de  $E'$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $\theta$ ,  $T$  et  $I_M$ .

3.3. Maintenant et dans ce qui suit, l'inductance  $L$  est considérée comme infinie.

3.3.1. Montrer alors que  $I_M = I_m$  et que le courant  $i$  est constant.

3.3.2. Calculer, en fonction de  $x$ , la tension moyenne  $\bar{U}$  de  $u$  aux bornes de la diode D.

3.3.3.  $u_L(t)$  a une valeur instantanée non nulle. Représenter  $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$  pendant l'intervalle de temps  $[0, T]$ . Calculer la valeur moyenne  $\bar{U}_L$  de  $u_L$ .

3.3.4. Calculer la valeur moyenne  $\bar{U}'$  de  $u'$  aux bornes du récepteur.

3.3.5. Calculer la valeur moyenne  $\bar{I}$  du courant circulant dans le récepteur en fonction de  $E$ ,  $E'$ ,  $x$  et  $R$ .

3.3.6. Calculer la valeur moyenne  $\bar{I}_G$  du courant débité par le générateur en fonction de  $\bar{I}$ ,  $\theta$  et  $T$ .

## 4. Application : réglage de la vitesse d'un moteur :

Le récepteur du montage précédent est un moteur à courant continu à excitation séparée constante. Ce moteur possède.

- $2p$  pôles inducteurs
- $2a$  voies d'enroulement
- $n$  brins actifs.

On note :

- $R$  : résistance mesurée entre balais
- $I$  : le courant absorbé par l'induit
- $\phi$  : le flux utile sous un pôle (constant)
- $U = xE$  : la tension aux bornes du moteur
- $\Omega$  : la vitesse de rotation en radians par seconde.

On admet de plus que la réaction magnétique de l'induit et les pertes mécaniques sont négligeables.

4.1. La force contre électromotrice  $E'$  du moteur est de la forme :

$$E' = A \phi \Omega$$

4.1.1. Expliciter  $A$ .

4.1.2. Exprimer le moment du couple électromagnétique en fonction de  $A$ ,  $\phi$  et  $I$ .

4.2. En négligeant la chute de tension dans l'induit, montrer que la vitesse  $\Omega$  est proportionnelle à  $U$ .

4.3. Le moteur entraîne une charge mécanique qui exerce sur l'arbre un couple résistant constant.

Montrer que la vitesse du groupe est une fonction linéaire de  $x$ .

Indiquer sur quel organe du montage étudié question 3, il faut agir pour ralentir le moteur.

(B.T.S. Electrotechnique, 1979)

### Solution et commentaires :

#### 1. Rôle d'une diode dans un circuit $L.C$ .

1.1. A l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K$ . Dès cet instant, un courant  $i$  apparaît. La loi d'Ohm appliquée au circuit de la figure 1 permet d'écrire :

$$v_c = v_d + L \frac{di}{dt} \quad (1)$$

Tant que le courant  $i$  est supérieur à 0, la diode  $D$  conduit (\*). Comme elle est parfaite,  $v_d = 0$ . Par suite,

$$v_c = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (2)$$

(\*) Dès que  $i \leq 0$ , la diode  $D$  se bloque.

Le condensateur  $C$  a été initialement chargé sous la tension  $E$ . Remarquons qu'il se comporte comme un générateur : il va donc se décharger. Dans ce cas :

$$i = - \frac{dq}{dt}$$

$$\text{ou encore } i = - C \frac{dv_c}{dt} \quad (3)$$

car  $q = C v_c$ .

La relation (3) donne :

$$v_c = - \frac{1}{C} \int i dt \quad (4)$$

Portons ce résultat dans (2). On trouve :

$$L \frac{di}{dt} = - \frac{1}{C} \int i dt$$

En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} = - \frac{1}{C} i$$

$$\text{Soit } \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad (5)$$

C'est l'équation différentielle demandée.

Remarque :

Il est également possible de rechercher l'équation différentielle liant  $v_c$  à  $L$  et  $C$ . Pour cela, portons (3) dans (2). On obtient :

$$v_c = - LC \frac{d^2 v_c}{dt^2} \quad (6)$$

Ce qui donne :

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} v_c = 0 \quad (7)$$

1.2. En posant  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , l'équation (5) s'écrit :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0 \quad (8)$$



Sa solution est de la forme (voir cours de mathématiques) :

$$i = i(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (9)$$

où A et B sont des constantes d'intégration. Elles seront déterminées à l'aide des deux conditions initiales  $i(0) = 0$  et  $v_c(0) = E$ .

L'expression de  $v_c(t)$  est obtenue à partir de la relation (4) :

$$v_c(t) = -\frac{A}{C\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{B}{C\omega_0} \cos \omega_0 t + K_1 \quad (10)$$

où  $K_1$  est une constante d'intégration.

— Calcul de A et B :

On sait qu'à l'instant  $t = 0$ ,  $i(0) = 0$  et  $v_c(0) = E$ . Par suite (cf relations (9) et (10)) :

$$0 = A + 0$$

$$\text{et } E = 0 + \frac{B}{C\omega_0} + K_1$$

Ce qui donne :

$$A = 0$$

$$\text{et } B = (E - K_1) C \omega_0$$

$$\text{Comme } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \text{ on a } C\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

$$\text{D'où } B = (E - K_1) \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (11)$$

Portons ce résultat dans (9) et (10). Il vient :

$$i(t) = (E - K_1) \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega_0 t \quad (12)$$

$$\text{et } v_c(t) = (E - K_1) \cos \omega_0 t + K_1 \quad (13)$$

— Calcul de  $K_1$  :

On sait que  $\cos \omega_0 t = \sin \left( \omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right)$ . Par suite (cf. relation (13))

$$v_c(t) = (E - K_1) \sin \left( \omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) + K_1 \quad (14)$$

Les formules (12) et (14) montrent clairement que  $v_c(t)$  est en avance de  $\frac{\pi}{2}$  sur  $i(t)$ . Ce résultat signifie que lorsque  $i(t)$  est :

— nul (pour  $\omega_0 t = 0$ ),  $v_c(t)$  est maximale.

— maximal (pour  $\omega_0 t = \frac{\pi}{2}$ ),  $v_c(t)$  est nulle

— de nouveau nul (pour  $\omega_0 t = \pi$ ),  $v_c(t)$  est minimale.

En conséquence, pour  $\omega_0 t = \frac{\pi}{2}$ , la relation (14) s'écrit :

$$0 = 0 + K_1.$$

Soit  $K_1 = 0$ . Par suite,

$$i(t) = E \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega_0 t \quad (15)$$

$$\text{et } v_c(t) = E \sin \left( \omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (16)$$

• Le courant  $i(t)$  est nul à l'instant  $t_1$  tel que :

$$E \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega_0 t_1 = 0$$

$$\text{Soit } \omega_0 t_1 = \pi \quad (17)$$

Ce qui donne, après avoir remplacé  $\omega_0$  par  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$  :

$$t_1 = \pi \sqrt{LC} \quad (18)$$

• Dès que  $i(t)$  s'annule, la diode D se bloque. Pour  $t > t_1$ , le circuit de la figure 1 devient ouvert. Pour cette raison, la tension  $v_c(t)$  ne va plus varier (\*). Elle restera égale à la valeur prise à l'instant  $t_1$  ; c'est-à-dire  $v_c(t_1)$ .

1.3. Les courbes représentant  $i(t)$  et  $v_c(t)$  sont données figure 4.

• La valeur de  $v_c$  à l'instant  $t_1$  est :

$$v_c(t_1) = E \cos \omega_0 t_1$$

Comme  $\omega_0 t_1 = \pi$  (cf. relation (17)), on a :

$$v_c(t_1) = -E$$

On notera qu'il y a eu inversion du signe de la tension  $v_c$ .

(\*) Rappelons que le condensateur C est supposé idéal.

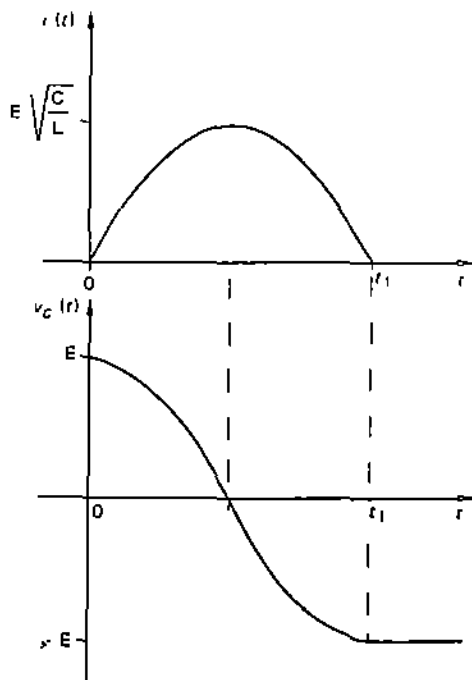


Fig. 1.4. - Courbes  $i(t)$  et  $v_C(t)$

## 2. Etude du fonctionnement d'un hacheur.

### 2.1. Rappels théoriques :

2.1.1. Un hacheur est un convertisseur statique qui permet, à partir d'une source de tension continue constante, de produire aux bornes d'une charge, une tension unidirectionnelle de valeur moyenne réglable.

La source de tension continue est par exemple une batterie d'accumulateurs, un pont redresseur muni d'un filtre ou une ligne de traction électrique.

Selon l'application souhaitée, l'utilisateur dispose de deux types de hacheurs :

- **Montage série :**

Le convertisseur, en série avec la charge, fonctionne comme abaisseur de tension (cf. figure 5). Dans ce cas, il est indifféremment appelé hacheur série, abaisseur de tension ou encore dévolteur.

- **Montage parallèle :**

Le convertisseur, en parallèle avec la charge, fonctionne comme élévateur de tension (cf. figure 6). Dans ce cas, il est appelé hacheur parallèle, élévateur de tension ou encore survolteur.

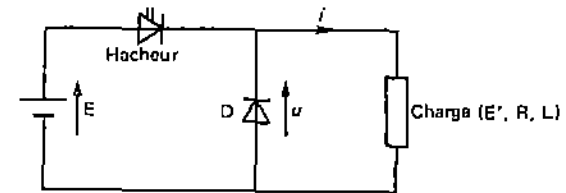


Fig. 1.5. - Hacheur série.  $E$  : source de tension continue.

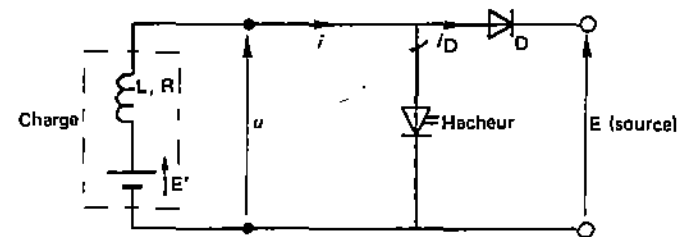


Fig. 1.6. - Hacheur parallèle.  $E' < E$ .

- Le hacheur réalise la conversion continu-continu.

*Remarques :*

a) Un convertisseur statique est un dispositif qui utilise des composants électroniques tels les transistors, thyristors, diodes, triacs... Il doit être capable de réaliser l'une des trois fonctions suivantes :

- garder la fréquence fixe et modifier la tension  $u$  aux bornes de la charge.
- faire varier la fréquence et maintenir constante la tension  $u$
- modifier simultanément la fréquence et la tension  $u$ .

b) Quelquefois, on utilise l'expression «interrupteur électronique» au lieu de «convertisseur statique».

c) Pour désigner un hacheur, on utilise aussi le terme découpeur.

2.1.2. Pour répondre à cette question, représentons la caractéristique directe  $i = f(v_a)$  d'un thyristor (cf. figure 7).

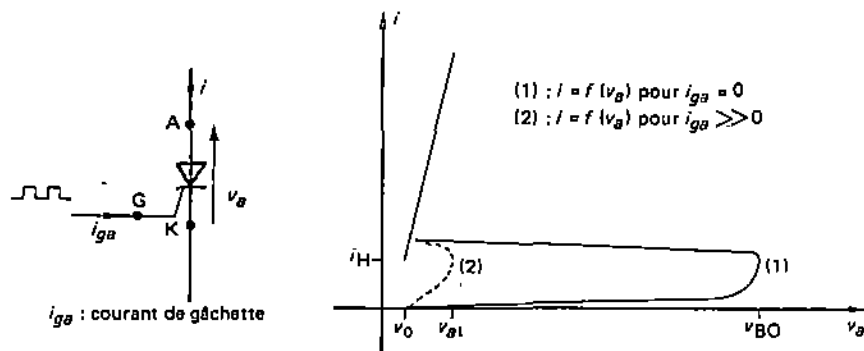


Fig. 1.7. - Caractéristique directe  $i = f(v_a)$  d'un thyristor.  
 $v_a$  : tension directe (ou d'anode).  $v_{BO}$  : tension de retournement  
 $v_0 \approx 1 \text{ V}$  : tension de seuil.  
 $i_H$  : courant de maintien (holding current).

En l'absence d'impulsions de gâchette, le thyristor ne s'amorce que si la tension d'anode  $v_a$  est égale à la tension de retournement  $v_{BO}$  (cf. figure 7 - courbe (1)). L'inconvénient est que la valeur de  $v_{BO}$  est très élevée (\*).

L'utilisation de la gâchette supprime cet inconvénient. En effet, lorsqu'on lui applique des impulsions positives  $i_{ga}$ , la gâchette permet d'amorcer un thyristor même soumis à une faible tension d'anode (cf. figure 7 - courbe (2)).

Dans la pratique, l'amorçage n'est obtenu que si :

- la tension d'anode  $v_a$  est supérieure à la tension de seuil  $v_0$  du thyristor ; celle-ci est de l'ordre du volt.
- la durée des impulsions  $i_{ga}$  est supérieure au temps d'amorçage  $t_{on}$ .
- l'amplitude des impulsions est suffisante. Les constructeurs précisent habituellement l'amplitude minimale  $i_{gam}$  à appliquer.

2.1.3. Un thyristor peut être bloqué dans les deux cas suivants :

- On lui applique une tension d'anode négative pendant une durée supérieure au temps de désamorçage  $t_{off}$  (noté aussi  $t_q$ ).
- On annule le courant direct  $i$  ou on le rend inférieur au courant de maintien  $i_H$ .

(\*)  $v_{BO}$  vaut quelques centaines de volts pour les thyristors usuels et quelques milliers de volts pour les thyristors de puissance.

2.2. Rappelons que les quatre thyristors et la diode sont supposés parfaits. Pour cela, on admettra, lorsqu'ils sont passants, que la tension à leurs bornes est nulle. Par souci de clarté, ces composants ont été symbolisés dans les figures 8, 9 et 10 par des interrupteurs parfaits soit ouverts (état bloqué) soit fermés (état passant).

2.2.1. Désignons par  $u_D$ , la tension aux bornes de la diode D.

On a :

$$u_D = -u = -E_0.$$

D est donc bloquée.

Dès qu'on amorce  $Th_1$ , un courant  $i_1$  s'établit. Celui-ci va circuler le long de la maille (M, A,  $Th_1$ , C, B, L, M) car  $Th$ ,  $Th_2$  et  $Th_3$  sont bloqués (cf. figure 8).

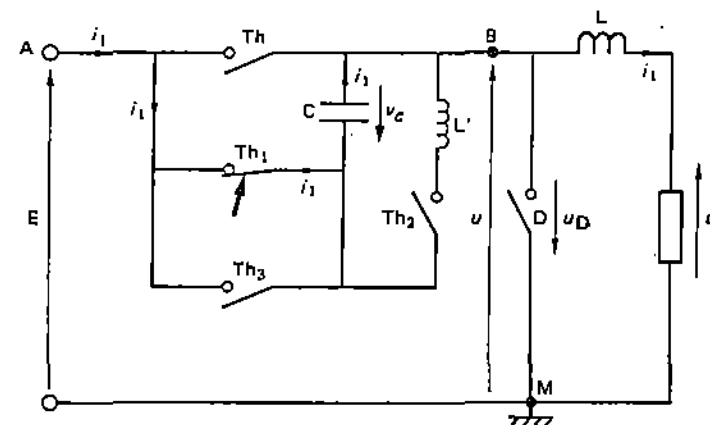


Fig. 1.8. - Schéma du hacheur lorsque  $Th_1$  est amorcé.

Initialement déchargé, le condensateur C se charge à l'aide du courant  $i_1$  sous la tension  $E > E_0$ . On a (cf. figure 8) :

$$E = v_c + u \quad (19)$$

La tension  $v_c$  (initialement nulle) croît. De ce fait,  $u$  décroît car, d'après (19), la somme  $(v_c + u)$  est constante.

Dès que  $v_c = E$  (donc  $u = 0$ ),  $i_1$  s'annule :  $Th_1$  se bloque (cf. question 2.1.3) et le potentiel de B redevient égal à  $E_0$ .

En fin de charge,  $v_c = E$  et  $Th_1$  est non passant.

2.2.2. Lorsqu'on débloque  $Th_2$ , un courant  $i_2$  s'établit uniquement le long de la maille (C,  $Th_2$ , L') (cf. figure 9).

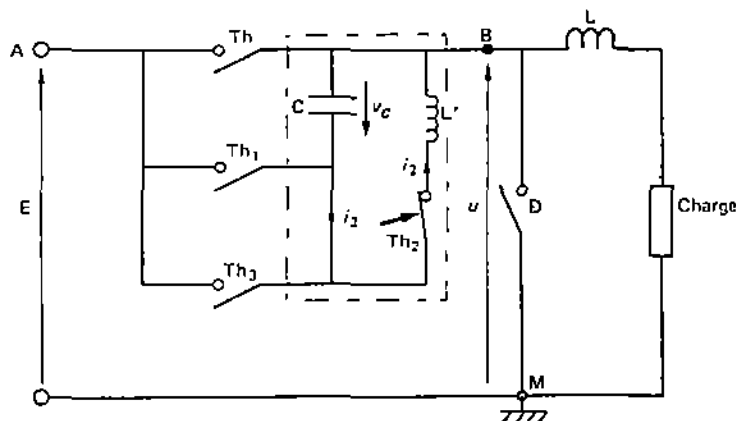


Fig. 1.9. - Schéma du hacheur lorsque  $Th_2$  est débloqué.

Remarquons que le hacheur devient équivalent au circuit de la figure 1.

En fin d'évolution,  $Th_2$  est bloqué et  $v_c = -E$  (cf. question 1.3).

• Si  $Th$  est passant, le résultat n'est pas modifié car dans ce cas, on a deux courants indépendants. Le premier (noté  $i_2$  figure 9) circule le long de la maille (C,  $Th_2$ ,  $L'$ ) et le second, fourni par la source, traverse  $Th$  et la charge puis retourne à la source.

2.2.3. Le thyristor  $Th$  est passant. Rappelons que  $Th_1$  et  $Th_2$  sont bloqués et  $v_c = -E$  (cf. questions 2.2.1 et 2.2.2).

On amorce  $Th_3$ . Celui-ci court-circuite  $Th_1$ . Le schéma de la figure 2 est alors équivalent à celui donné figure 10.

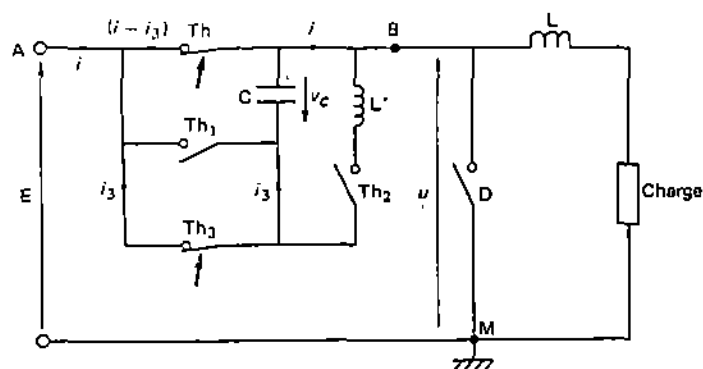


Fig. 1.10. - Schéma du hacheur lorsque  $Th_3$  est amorcé.

Dès qu'on amorce  $Th_3$ , on a immédiatement :

$$v_{Th} = v_c = -E$$

$v_{Th}$  étant la tension aux bornes de  $Th$ .

$Th$  est soumis à une tension négative : il se bloque et le courant  $(i - i_3)$  qui le traverse s'annule. Dès cet instant, la source ne fournit plus que le courant  $i_3$ .

Le condensateur  $C$  va alors se charger sous la tension  $E$  à l'aide de  $i_3$ . On a (cf. figure 10) :

$$E = v_c + u \quad (20)$$

Initialement égale à  $-E$  (\*),  $v_c$  va croître et  $u$  décroître car, d'après la relation (20), la somme  $(v_c + u)$  est constante.

Dès que  $v_c = E$  (donc  $u = 0$ ),  $i_3$  devient nul :  $Th_3$  se bloque et le potentiel de  $B$  redevient égal à  $E_0$ .

En conclusion,  $v_c = E$  et tous les thyristors sont bloqués : on revient bien à l'état initial (cf. question 2.2.1).

### 3. Récepteur alimenté par l'intermédiaire d'un hacheur $H$ .

D'après la figure 3, on a :

— au nœud  $B$  :

$$i = i_G + i_d \quad (21)$$

— le long de la maille (A, H, B, M, A) :

$$E = u_H + u \quad (22)$$

où  $u_H$  est la tension aux bornes de  $H$ .

3.1. Le hacheur conduit :  $0 \leq t \leq \theta$ .

3.1.1. Lorsque le hacheur est passant,  $u_H = 0$ . Par suite

$$E = u \quad (23)$$

La tension  $u_d$  aux bornes de  $D$  est telle que

$$u_d = -u$$

Soit  $u_d = -E$ .

(\*) Voir question 2.2.2.

On remarque que la diode est soumise à une tension négative : elle est donc bloquée. Par conséquent :

$$i_d = 0$$

Le courant dans la diode est nul. De ce fait, la formule (21) devient :

$$i = i_G \quad (24)$$

3.1.2. La loi d'Ohm appliquée au circuit de la figure 3 permet d'écrire :

$$L \frac{di}{dt} + Ri + E' = E \quad (25)$$

C'est l'équation différentielle demandée.

3.1.3. L'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$L \frac{di}{dt} + \{ Ri - (E - E') \} = 0 \quad (26)$$

$$\text{Posons } y = Ri - (E - E') \quad (27)$$

Dans ce cas :

$$\frac{dy}{dt} = R \frac{di}{dt}$$

$$\text{D'où : } \frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (28)$$

En remplaçant dans (26),  $\{ Ri - (E - E') \}$  par  $y$  et  $\frac{di}{dt}$  par (28), on obtient :

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (29)$$

Soit en posant  $\tau = \frac{L}{R}$  :

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (30)$$

La solution de cette équation est (voir cours de mathématiques) :

$$y = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A étant une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

Comme  $y = Ri - (E - E')$ , on a :

$$Ri - (E - E') = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Ce qui donne :

$$i = \frac{(E - E')}{R} + \frac{A}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (31)$$

— Calcul de A :

On sait qu'à l'instant  $t = 0$ ,  $i(0) = I_m$  ;  $I_m$  étant la valeur minimale du courant  $i$ . Par suite,

$$I_m = \frac{(E - E')}{R} + \frac{A}{R}$$

D'où :  $A = R I_m - (E - E')$ .

Portons ce résultat dans (31). Il vient — tous calculs faits — :

$$i = \frac{(E - E')}{R} + \left\{ I_m - \frac{(E - E')}{R} \right\} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (32)$$

• On sait qu'à l'instant  $t = \theta$ ,  $i(\theta) = I_M$  ;  $I_M$  étant la valeur maximale de  $i$ . Par suite,

$$I_M = \frac{(E - E')}{R} + \left\{ I_m - \frac{(E - E')}{R} \right\} e^{-\frac{\theta}{\tau}}$$

Soit en remplaçant  $\tau$  par  $\frac{L}{R}$  :

$$I_M = \frac{(E - E')}{R} + \left\{ I_m - \frac{(E - E')}{R} \right\} e^{-\frac{R}{L} \theta} \quad (33)$$

3.2. Le hacheur ne conduit pas :  $\theta \leq t \leq T$ .

3.2.1. Lorsque le hacheur est bloqué, le courant  $i_G$  fourni par la source devient nul. En raison de la présence de la bobine  $L$ , le courant  $i$  dans le récepteur ne peut s'annuler brusquement. En effet, durant l'intervalle  $[0, \theta]$ , la bobine  $L$  a emmagasiné de l'énergie. Celle-ci est évacuée pendant le reste de la période (c'est-à-dire  $[\theta, T]$ ) sous forme d'intensité à travers la maille ( $L$ , récepteur,  $D$ ,  $L$ ) :  $D$  est donc passante.

$i_G$  étant nul, la relation (21) s'écrit :

$$i = i_d \quad (34)$$

On remarque que  $i_d$  passe instantanément de 0 à  $I_M$  (cf. figure 11).

La diode D, appelée « diode de roue libre » sert d'une part, à supprimer les surtensions dues à la présence de L et d'autre part, à prolonger le courant dans la charge.

3.2.2. D étant passante, on a :

$$u = 0 \quad (35)$$

La loi d'Ohm appliquée à la maille de sortie permet d'écrire (cf. figure 3) :

$$L \frac{di}{dt'} + (Ri + E') = 0 \quad (36)$$

avec  $t' = t - \theta$ .

3.2.3. En procédant comme à la question 3.1.3, on obtient :

$$i = -\frac{E'}{R} + \frac{B}{R} e^{-\frac{t'}{\tau}}$$

où B est une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

En remplaçant  $t'$  par  $(t - \theta)$ , on a :

$$i = -\frac{E'}{R} + \frac{B}{R} e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau}} \quad (37)$$

— Calcul de B :

On sait qu'à l'instant  $t = \theta$ ,  $i(\theta) = I_M$ . Par suite,

$$I_M = -\frac{E'}{R} + \frac{B}{R}$$

$$\text{D'où } B = R I_M + E' \quad (38)$$

Portons ce résultat dans (37). Il vient :

$$i = -\frac{E'}{R} + \left( I_M + \frac{E'}{R} \right) e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau}} \quad (39)$$

3.2.4. A l'instant  $t = T$ ,  $i(T) = I_m$  car  $i$  est périodique ( $i(0) = i(T)$ ). En conséquence :

$$I_m = -\frac{E'}{R} + \left( I_M + \frac{E'}{R} \right) e^{-\frac{(T-\theta)}{\tau}}$$

Soit, après avoir remplacé  $\tau$  par  $\frac{L}{R}$  :

$$I_m = -\frac{E'}{R} + \left( I_M + \frac{E'}{R} \right) e^{-\frac{(T-\theta)R}{L}} \quad (40)$$

Pour plus de clarté, nous donnons figure 11, les courbes représentant  $i$ ,  $i_H$  et  $i_d$  en fonction du temps. Rappelons que :

- $i_H = i$  et  $i_d = 0$  pour  $0 \leq t \leq \theta$
- $i_H = 0$  et  $i_d = i$  pour  $\theta \leq t \leq T$

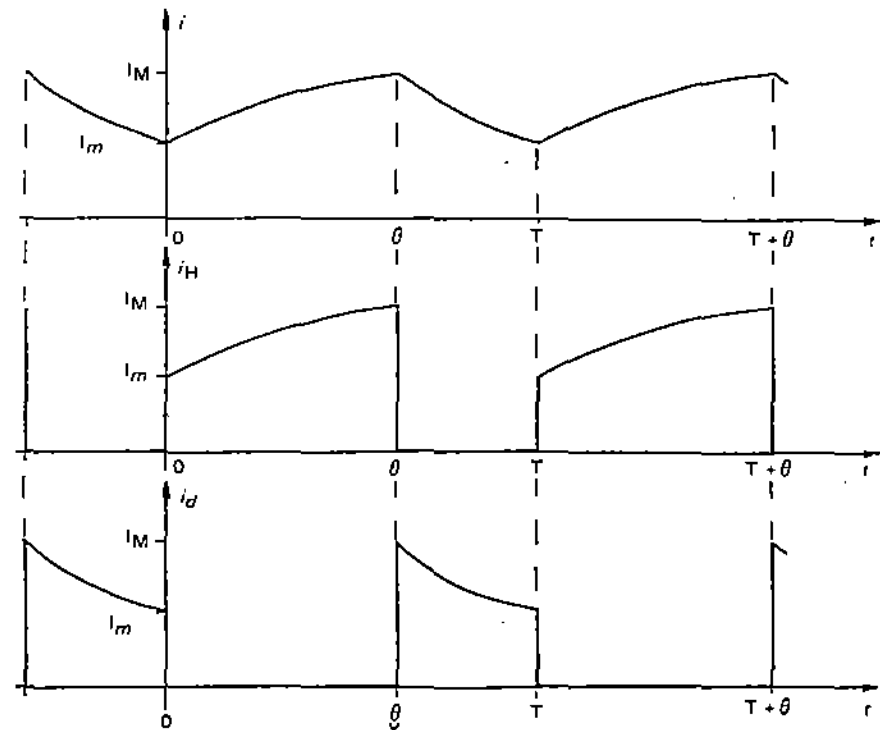


Fig. 1.11. — Courbes  $i$ ,  $i_H$  et  $i_d$  en fonction du temps.

3.3. L'inductance L est considérée comme infinie .

3.3.1. Lorsque L est infinie, le terme  $-\frac{R}{L}(T-\theta)$  est nul et la relation (40) devient :

$$I_m = -\frac{E'}{R} + \left( I_M + \frac{E'}{R} \right)$$

Soit  $I_m = I_M$ .

Compte-tenu de ce résultat, l'ondulation du courant dans la charge,  $2 \Delta i = (I_M - I_m)$  est nulle. En conséquence,  $i$  est constant. Dans la suite du problème, on notera :

$$i(t) = I \quad (41)$$

avec  $I = I_m = I_M$ .

3.3.2. La valeur moyenne  $\bar{U}$  de  $u$  est définie par :

$$\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt \quad (42)$$

Rappelons que :

- $u = E$  pour  $0 \leq t \leq \theta$  (cf. relation (23))
- $u = 0$  pour  $\theta \leq t \leq T$  (cf. relation (35))

Portons ce résultat dans l'intégrale précédente. Il vient :

$$\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^\theta E \, dt.$$

On obtient  $\bar{U} = E \frac{\theta}{T}$ .

Comme  $x = \frac{\theta}{T}$ , on a :

$$\bar{U} = x E \quad (43)$$

La valeur moyenne de  $u$  est proportionnelle au rapport cyclique  $x$ .

3.3.3. Pour représenter  $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$ , il faut rechercher son expression mathématique :

Précédemment (cf. questions 3.1.2 et 3.2.2), on a vu que :

- Pour  $0 \leq t \leq \theta = x T$  :

$$u_L(t) + Ri + E' = E$$

avec  $u_L = L \frac{di}{dt}$  : tension aux bornes de la bobine L.

$$\text{D'où : } u_L(t) = E - E' - Ri \quad (44)$$

- Pour  $\theta \leq t \leq T$  :

$$u_L(t) + Ri + E' = 0$$

$$\text{D'où : } u_L(t) = -Ri - E' \quad (45)$$

Remarquons que les termes  $(E - E' - Ri)$  et  $(-E' - Ri)$  sont constants car le courant  $i$  est parfaitement continu.

La courbe représentative de  $u_L(t)$  est donnée figure 12.

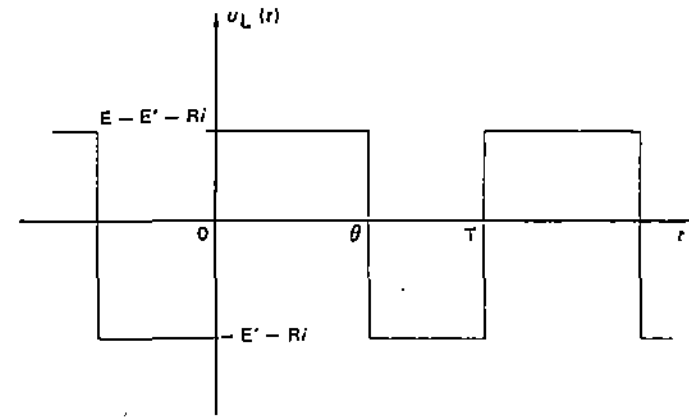


Fig. 1.12. - Courbe  $u_L$  en fonction du temps.

- La valeur moyenne  $\bar{U}_L$  de  $u_L$  est définie par :

$$\bar{U}_L = \frac{1}{T} \int_0^T u_L(t) \, dt \quad (46)$$

En remplaçant  $u_L(t)$  par  $L \frac{di}{dt}$  et en simplifiant par  $dt$ , on obtient :

$$\bar{U}_L = \frac{1}{T} \int_0^T L \, di \quad (47)$$

Le calcul de cette intégrale donne :

$$\overline{U}_L = \frac{L}{T} \{ i(T) - i(0) \}$$

Le courant  $i$  étant constant, on a  $i(T) = i(0) = I$  (cf. relation (41)).

Par conséquent :

$$\overline{U}_L = 0 \quad (48)$$

La valeur moyenne de la tension  $u_L$  est nulle.

3.3.4. D'après la figure 3, on peut écrire :

$$u = u_L + u'$$

De cette relation, on déduit :

$$\overline{U} = \overline{U}_L + \overline{U}'$$

où  $\overline{U}'$  est la valeur moyenne de la tension  $u'(t)$  aux bornes de la charge.

Comme  $\overline{U}_L = 0$ , on a :

$$\overline{U}' = \overline{U} = x E \quad (49)$$

3.3.5. On sait que (cf. question 3.3.3) :

$$\overline{U}_L = \frac{1}{T} \int_0^T u_L(t) dt = 0$$

En tenant compte des formules (44) et (45), l'intégrale précédente s'écrit :

$$\frac{1}{T} \left\{ \int_0^\theta (E - E' - Ri) dt + \int_\theta^T (-E' - Ri) dt \right\} = 0$$

ou encore :

$$\frac{1}{T} \left\{ \int_0^\theta (E - E') dt - \int_\theta^T E' dt \right\} = \frac{1}{T} \left\{ \int_0^\theta Ri dt + \int_\theta^T Ri dt \right\} \quad (50)$$

Remarquons que :

$$\frac{1}{T} \left\{ \int_0^\theta Ri dt + \int_\theta^T Ri dt \right\} = R \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i dt = R \bar{I}$$

$\bar{I}$  étant la valeur moyenne de  $i$ .

En remplaçant le second membre de l'équation (50) par  $R\bar{I}$ , on a :

$$\frac{1}{T} \left\{ \int_0^\theta (E - E') dt - \int_\theta^T E' dt \right\} = R\bar{I}$$

Ce qui donne :

$$R\bar{I} = \frac{\theta (E - E') - E' (T - \theta)}{T}$$

$$\text{D'où : } \bar{I} = \frac{1}{R} (xE - E') \quad (51)$$

avec  $x = \frac{\theta}{T}$  : rapport cyclique.

Remarque :

Le courant  $i$  étant constant, on a  $\bar{I} = I$  ; avec  $i = I$  (cf. relation (41)).

3.3.6. La valeur moyenne  $\bar{I}_G$  de  $i_G$  est définie par :

$$\bar{I}_G = \frac{1}{T} \int_0^T i_G(t) dt \quad (52)$$

Précédemment, on a vu que :

- $i_G(t) = i(t)$  pour  $0 \leq t \leq \theta$
- $i_G(t) = 0$  pour  $\theta \leq t \leq T$ .

Par suite,

$$\bar{I}_G = \frac{1}{T} \int_0^\theta i(t) dt$$

Or  $i(t) = I$ . Par conséquent :

$$\bar{I}_G = \frac{1}{T} \int_0^\theta I dt$$

ce qui donne :

$$\bar{I}_G = \frac{\theta}{T} I$$



Comme  $I = \bar{I}$ , on a :

$$\bar{I}_G = \frac{\theta}{T} \bar{I} \quad (53)$$

#### 4. Application : Réglage de la vitesse d'un moteur.

4.1. La f.c.e.m est de la forme  $E' = A \phi \Omega$  :

4.1.1. La f.c.e.m  $E'$  du moteur étudié est donnée par la relation :

$$E' = \frac{p}{a} n N \phi \quad (54)$$

avec  $2p$  : nombre de pôles  
 $2a$  : nombre de voies d'enroulement  
 $n$  : nombre de brins actifs  
 $N$  : vitesse de rotation  
 $\phi$  : flux utile sous un pôle.

$E'$  peut aussi s'écrire :

$$E' = \frac{p}{a} \cdot \frac{n}{2\pi} \cdot 2\pi N \phi$$

En remarquant que la vitesse angulaire  $\Omega = 2\pi N$ , nous avons :

$$E' = \frac{p}{a} \cdot \frac{n}{2\pi} \Omega \phi \quad (55)$$

En comparant cette expression à  $E' = A \Omega \phi$ , on conclut que :

$$A = \frac{p}{a} \cdot \frac{n}{2\pi} \quad (56)$$

4.1.2. Le moment  $\Gamma_e$  du couple électromagnétique s'écrit :

$$\Gamma_e = \frac{E' I}{\Omega} \quad (57)$$

Remplaçons  $E'$  par  $A \phi \Omega$ . Il vient :

$$\Gamma_e = A \phi I \quad (58)$$

4.2. On néglige la chute de tension dans l'induit. Dans ce cas :

$$U = E' \quad (59)$$

ou encore :

$$U = A \phi \Omega$$

Ce qui donne :

$$\Omega = \frac{U}{A \phi} \quad (60)$$

Rappelons que  $\phi$  est constant car le moteur est à excitation séparée constante.

La relation (60) montre clairement que la vitesse angulaire  $\Omega$  est proportionnelle à  $U$ .

4.3. Pour faire varier la vitesse du groupe, il faut modifier la tension d'induit  $U$  car le couple résistant est constant.

En substituant dans l'équation (60),  $U$  par  $x E$ , on obtient :

$$\Omega = \frac{1}{A \phi} x E \quad (61)$$

Ce résultat montre bien que la vitesse angulaire est une fonction linéaire de  $x$ .

- Pour ralentir le moteur, il faut diminuer le rapport cyclique  $x$ .

**Etude d'un hacheur dévolteur :  
Commande d'un moteur à courant continu  
à flux constant**

Un hacheur H, supposé parfait et de rapport cyclique  $\alpha$ , alimente un moteur à courant continu à flux constant, de force contre-électromotrice  $E'$  et d'impédance interne négligeable (cf. figure 1). La fréquence de hachage  $f$  est de 300 Hz.

1. En supposant le filtre d'entrée parfait ( $v = E = 200$  V) :

1.1. Etablir la relation qui doit exister entre  $E$ ,  $E'$  et  $\alpha$  pour que le système fonctionne en régime de conduction continue.

1.2. Calculer, dans ces conditions, l'ondulation crête-à-crête  $2 \Delta i$  du courant  $i$ .

1.3. Préciser la valeur de  $\alpha$  pour laquelle l'ondulation de  $i$  est maximale. En déduire la valeur maximale  $\Delta i_M$  de  $\Delta i$ .

1.4. Calculer la valeur de l'inductance  $L$  pour que  $\Delta i_M \leq 2,5$  A.

2. En supposant le filtre moteur parfait ( $\Delta i = 0$ ) :

2.1. Représenter, en fonction du temps, l'évolution du courant  $i_H$  dans le hacheur.

2.2. Etablir l'équation différentielle de la tension  $v$  à l'entrée du hacheur. En déduire les expressions littérales de  $v$ .

2.3. Donner les conditions à satisfaire pour obtenir les relations nécessaires au calcul des constantes d'intégration.

3. En supposant l'ondulation du courant  $i'$  fourni par la source continue négligeable ( $\Delta i' = 0$ ) :

3.1. Représenter, en fonction du temps, les variations du courant  $i_c$  dans le condensateur  $C'$  et de la tension  $v$  à ses bornes.

3.2. Calculer l'ondulation crête à crête  $2 \Delta v$  de la tension  $v$ .

4. On admet que  $v(t)$  suit la loi précédemment établie.

4.1. Déterminer les expressions analytiques du courant  $i'$  et les relations nécessaires à la détermination des constantes d'intégration. Donner, sous forme littérale, ces constantes.

4.2. Calculer l'ondulation crête à crête  $2 \Delta i'$  du courant  $i'$ .

5. Rechercher la valeur de  $\alpha$  pour laquelle les ondulations  $\Delta v$  et  $\Delta i'$  sont maximales.

Calculer les valeurs correspondantes  $\Delta v$  et  $\Delta i'$ .

6. Sachant que  $\bar{I} = 100$  A et  $C' = 2000 \mu F$  ( $\bar{I}$  désigne la valeur moyenne de  $i$ ) :

6.1. Calculer l'inductance  $L'$  pour que  $\Delta i' \leq 0,05$  A.

6.2. Tracer, pour  $\alpha = 0,5$  et  $\alpha = 0,2$ , les courbes  $v(t)$  et  $i'(t)$ . Préciser les coordonnées des points particuliers.

7. Le moteur fonctionne à couple résistant constant quelle que soit sa vitesse de rotation  $N$ . Il absorbe, dans ces conditions, un courant  $\bar{I} = 100$  A. Le filtre d'entrée est à nouveau supposé parfait ( $v = E$ ).

7.1. Le hacheur est fermé pour la première fois à l'instant  $t = 0$ . On prend  $\alpha = 0,1$  et  $L = 5$  mH. Déterminer le temps  $t_1$  qui s'écoule avant que le moteur ne se mette en mouvement.

7.2. Pour  $E' = 100$  V la vitesse de rotation  $N$  du moteur est de 1000 tours par minute. Calculer la valeur de  $N$  lorsque le régime permanent est établi.

7.3. Le couple résistant est égal à 10 % du couple précédent.

Etablir la loi de variation de  $N$  en fonction de  $\alpha$  réglable de 0,1 à 1. Tracer la courbe  $N(\alpha)$ .

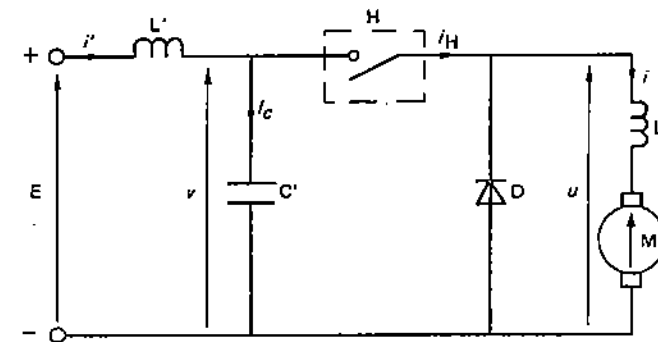


Fig. 2.1.

(Maîtrise E.E.A. Lille 1, Juin 85)

# **Solution et commentaires :**

1. Considérons le montage de la figure 1. Le filtre d'entrée est supposé parfait : dans ce cas, le montage étudié est équivalent à celui de la figure 2.

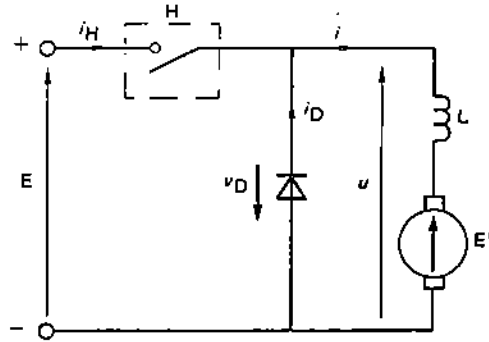


Fig. 2.2. - • le filtre d'entrée est supposé parfait ( $v = E$ )

• la fréquence de hachage est  $f = \frac{1}{T} = 300 \text{ Hz}$

• le rapport cyclique du hacheur est appelé  $\alpha$ .

1.1. Exprimons le courant  $i$  dans la charge. Pour cela, il faut étudier séparément les deux états du hacheur H :

a)  $0 \leq t < \alpha T$ , H est fermé :

La diode D est bloquée car  $v_D = -E < 0$ . En conséquence  $i_D = 0$  et le schéma précédent devient (cf. figure 3) :

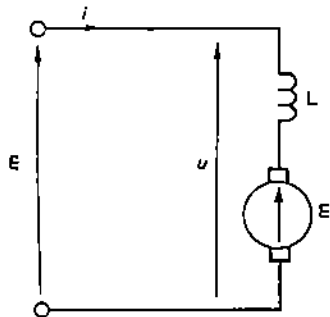


Fig. 2.3. - H est fermé.

Le long de la maille formant le circuit, on peut écrire :

$$L \frac{di}{dt} + E' = E$$

C'est une équation différentielle du premier ordre. Sa solution est :

$$i(t) = \left( \frac{E - E'}{L} \right) t + I_m \quad (1)$$

où  $I_m$  est une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

b)  $\alpha T \leq t < T$ , H est ouvert :

Dans cet intervalle, la diode D est passante (\*). Par suite :

$$u = 0 \quad (\text{D est supposée parfaite})$$

et  $i = i_D$

Le schéma donné figure 2 devient (cf. figure 4) :

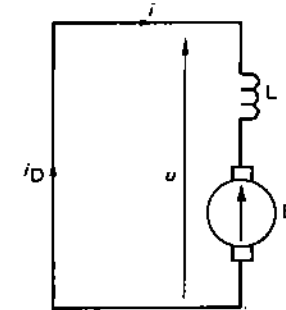


Fig. 2.4. - H est ouvert et  $i > 0$ .

Cette configuration est valable pendant le temps où  $i = i_D > 0$ .

La loi d'Ohm, appliquée au circuit de la figure 4, permet d'écrire :

$$L \frac{di}{dt} + E' = 0$$

L'origine des temps étant prise à  $t = 0$ , on obtient :

$$i(t) = I_M - \frac{E'}{L} (t - \alpha T) \quad (2)$$

(\*) Pour plus de détails, voir problème n° 1, question 3.2.1.

où  $I_M$  est une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

Pour qu'un régime périodique s'établisse, il faut que :

$$i(0) = i(T)$$

or  $i(0) = I_m$  (cf. relation (1))

et  $i(T) = I_M - \frac{E'}{L} (T - \alpha T)$  (cf. relation (2))

En remarquant que  $I_M = i(\alpha T) = I_m + \left( \frac{E - E'}{L} \right) \alpha T$ , il vient :

$$i(T) - i(0) = \left( \frac{E - E'}{L} \right) \alpha T - \frac{E'}{L} (1 - \alpha) T = 0$$

ce qui donne :

$$\alpha = \frac{E'}{E} \quad (3)$$

De ce résultat on déduit trois évolutions possibles pour  $i(t)$  (cf. figure 5).

- $\alpha > \frac{E'}{E}$  soit  $i(T) - i(0) > 0$  : dans ce cas, la valeur moyenne du courant  $i$  augmente avec  $t$ .
- $\alpha < \frac{E'}{E}$  soit  $i(T) - i(0) < 0$  : la valeur moyenne du courant  $i$  diminue et on tend vers le régime de conduction discontinue.
- $\alpha = \frac{E'}{E}$  soit  $i(T) - i(0) = 0$  : la valeur moyenne du courant  $i$  est constante.

La limite de la conduction continue est atteinte lorsque la valeur de  $i$  aux points 0 et T est nulle (cf. figure 6).

Cette étude montre clairement que la conduction continue est obtenue lorsque les conditions  $\alpha > \frac{E'}{E}$  et  $\alpha = \frac{E'}{E}$  sont respectées. Le seul intérêt de la condition  $\alpha > \frac{E'}{E}$  est de pouvoir augmenter la valeur moyenne  $\bar{I}$  de  $i$ . En effet, en supposant  $E'$  constante, il suffirait d'avoir  $\alpha > \frac{E'}{E}$  pour que  $\bar{I}$  atteigne des valeurs excessives (cf. figure 5).

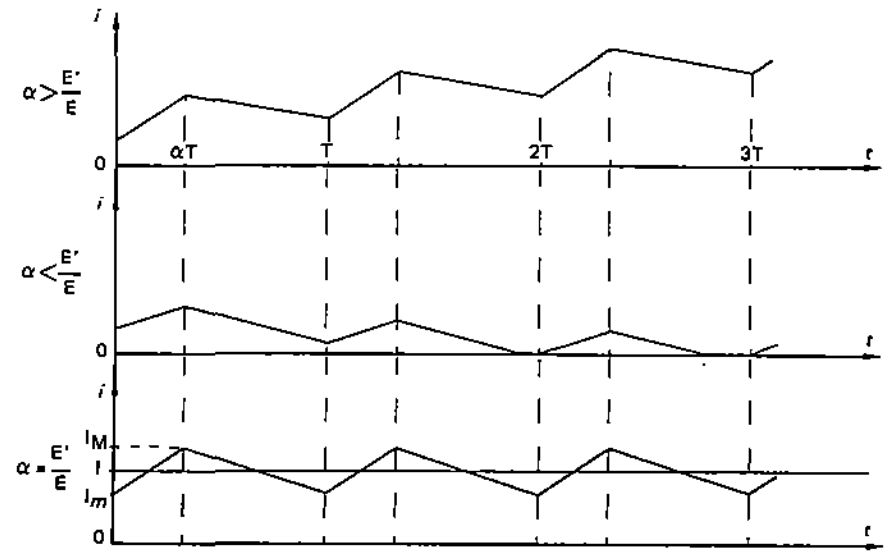


Fig. 2.5. - évolution de  $i(t)$  pour  $\alpha > \frac{E'}{E}$ ,  $\alpha < \frac{E'}{E}$  et  $\alpha = \frac{E'}{E}$ .

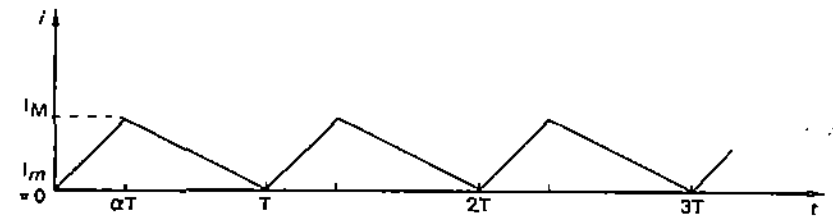


Fig. 2.6. - évolution de  $i(t)$  pour  $\alpha = \frac{E'}{E}$  et  $I_m = 0$ .

En réalité,  $E'$  n'est pas constante car, lorsque  $\bar{I}$  augmente, la vitesse  $N$  croît, entraînant l'augmentation de  $E'$ .

Par suite, le rapport  $\frac{E'}{E}$  tend vers  $\alpha$ .

1.2. Dans cette question, nous nous plaçons à la limite de la conduction continue, c'est-à-dire lorsque  $\alpha = \frac{E'}{E}$  et  $I_m = 0$  (cf. figure 6). Dans ce cas, l'ondulation crête à crête  $2 \Delta i$  s'écrit :

$$2 \Delta i = I_M - I_m = I_M$$

avec

$$I_M = i(\alpha T) \quad (\text{cf. relation (1)})$$

soit

$$2 \Delta i = \left( \frac{E - E'}{L} \right) \alpha T$$

ou encore :

$$2 \Delta i = \frac{ET}{L} \left( 1 - \frac{E'}{E} \right) \left( \frac{E'}{E} \right)$$

en remplaçant  $\frac{E'}{E}$  par  $\alpha$ , on trouve :

$$2 \Delta i = \frac{ET}{L} (1 - \alpha) \alpha \quad (4)$$

1.3. Pour obtenir la valeur de  $\alpha$  donnant  $\Delta i_M$ , valeur maximale de  $\Delta i$ , il suffit de calculer la dérivée de  $\Delta i$  par rapport à  $\alpha$ , soit :

$$\frac{d(\Delta i)}{d\alpha} = \frac{ET}{2L} (1 - 2\alpha) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Les variations de  $\Delta i$  en fonction de  $\alpha$  sont données dans le tableau I

$\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{d(\Delta i)}{d\alpha}$	+	0	-
$\Delta i$	0	$\Delta i_M$	0

Tableau I : variations de  $\Delta i$  en fonction de  $\alpha$

$\Delta i_M$  est obtenu pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

En remplaçant  $\alpha$  par  $\frac{1}{2}$  dans la relation (4), il vient :

$$\Delta i_M = \frac{ET}{8L} \quad (5)$$

1.4. De l'expression précédente, on déduit :

$$L = \frac{E}{8f\Delta i_M} \quad \text{avec} \quad f = \frac{1}{T}$$

Si  $\Delta i_M \leq 2,5$  A, on obtient l'inégalité suivante :

$$L \geq \frac{E}{20f}$$

A.N. :  $L \geq 33,3$  mH.

2. Le filtre moteur est supposé parfait ; dans ce cas,  $\Delta i = 0$ .

Le montage étudié est équivalent à celui donné figure 7 : le courant  $i$  est constant et égal à sa valeur moyenne  $\bar{I}$ .

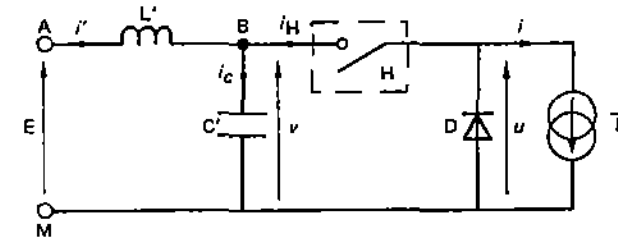


Fig. 2.7. - Le filtre moteur est supposé parfait ( $i$  est constant et égal à  $\bar{I}$ )

2.1. L'évolution de  $i_H$  en fonction du temps est représentée figure

8.

a)  $0 \leq t < \alpha T$ , H est fermé :

Compte-tenu des hypothèses faites en 2.,  $i_H = \bar{I}$ .

b)  $\alpha T \leq t < T$ , H est ouvert :

On a  $i_H = 0$ .

2.2. Considérons le montage de la figure 7 ; le long de la maille (A, B, M, A), on peut écrire :

$$E = L' \frac{di'}{dt} + v$$

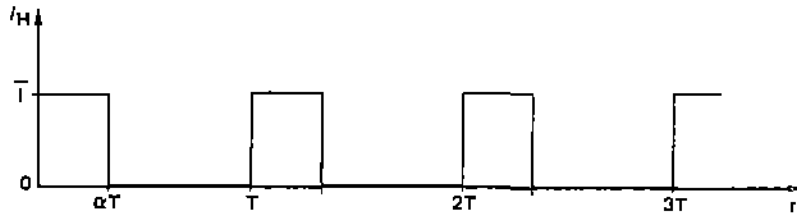


Fig. 2.8. - évolution de  $i_H(t)$  en supposant  $\Delta i = 0$ .

Comme au nœud B,  $i' = i_H + i_C$ , on obtient :

$$E = v + L' \frac{di_C}{dt} + L' \frac{di_H}{dt} \quad \text{avec} \quad i_C = C' \frac{dv}{dt}$$

$$\text{soit} \quad E = v + L' C' \frac{d^2 v}{dt^2} + L' \frac{di_H}{dt} \quad (6)$$

En observant l'allure de  $i_H(t)$ , représentée figure 8, on remarque que :

- pour  $0 < t < \alpha T$  ;  $i_H$  est constant et vaut  $\bar{I}$ .

Par suite  $L' \frac{di_H}{dt} = 0$  et la relation (6) s'écrit :

$$E = v + L' C' \frac{d^2 v}{dt^2}$$

C'est une équation différentielle du second ordre dont la solution est (voir cours de mathématiques) :

$$v(t) = E + A \cos\left(\frac{t}{\sqrt{L' C'}}\right) + B \sin\left(\frac{t}{\sqrt{L' C'}}\right) \quad (7)$$

où A et B sont des constantes d'intégration dépendant des conditions initiales.

A la tension continue E vient s'ajouter une composante alternative de pulsation  $\frac{1}{\sqrt{L' C'}}$ .

- pour  $\alpha T < t < T$  :  $i_H = 0$  soit  $L' \frac{di_H}{dt} = 0$ .

On retrouve le cas précédent. Par suite :

$$v(t) = E + A \cos\left(\frac{t}{\sqrt{L' C'}}\right) + B \sin\left(\frac{t}{\sqrt{L' C'}}\right)$$

- pour  $t = \alpha T$  et  $t = T$  :

Le courant  $i_H$  varie brusquement de  $\bar{I}$  à 0 pour  $t = \alpha T$  et de 0 à  $\bar{I}$  pour  $t = T$ . En conséquence, le terme  $L' \frac{di_H}{dt}$  tend respectivement vers  $-\infty$  et  $+\infty$  pour  $t = \alpha T$  et  $t = T$ .

Ceci entraîne l'apparition de surtensions aux instants de commutation : un des rôles du condensateur  $C'$  sera de limiter ces surtensions à des valeurs acceptables par le montage.

2.3. Pour déterminer les constantes d'intégration, il faut connaître :

- d'une part la valeur de  $v$  à l'instant  $t = 0$ .
- d'autre part la valeur de  $\frac{dv}{dt}$  à l'instant  $t = 0$  ; ceci revient à connaître la valeur de  $i_C$  à  $t = 0$  car  $i_C = C' \frac{dv}{dt}$  soit  $\frac{dv}{dt} = \frac{i_C}{C'}$ .

On obtient alors un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} v(0) = E + A & (\text{cf. relation (7)}) \\ i_C(0) = C' \left( \frac{1}{\sqrt{L' C'}} B \right) \end{cases}$$

Sa résolution donne :

$$A = v(0) - E$$

$$\text{et} \quad B = \sqrt{\frac{L'}{C'}} i_C(0)$$

En portant ces résultats dans (7), il vient :

$$v(t) = E + (v(0) - E) \cos\left(\frac{t}{\sqrt{L' C'}}\right) + \left(\sqrt{\frac{L'}{C'}} i_C(0)\right) \sin\left(\frac{t}{\sqrt{L' C'}}\right) \quad (8)$$

3. L'ondulation du courant  $i'$  fourni par la source continue est supposée négligeable ( $\Delta i' = 0$ ). On conserve l'hypothèse précédente : le filtre moteur est considéré comme parfait ( $\Delta i = 0$ ).

3.1. Considérons le montage de la figure 7 ; au nœud B, nous pouvons écrire :

$$i' = i_C + i_H \quad (9)$$

En désignant par  $\bar{i}'$ ,  $\bar{i}_c$  et  $\bar{i}_H$  les valeurs moyennes respectives de  $i'$ ,  $i_c$  et  $i_H$ , on obtient :

$$\bar{i}' = \bar{i}_c + \bar{i}_H$$

or  $\bar{i}_c = 0$  car l'énergie emmagasinée par  $C'$  est égale à celle qu'il restitue  
soit  $\bar{i}' = \bar{i}_H$ .

L'examen de la figure 8 montre que :

$$\bar{i}_H = \alpha \bar{i}$$

car nous avons supposé  $\Delta t = 0$ . Par suite :

$$\bar{i}' = \alpha \bar{i}$$

L'hypothèse  $\Delta i' = 0$  permet alors d'écrire :

$$i' = \bar{i}' = \alpha \bar{i}$$

Deux cas sont à considérer :

a)  $0 \leq t < \alpha T$  ;

on sait que (cf. relation (9)) :

$$i_c = i' - i_H$$

avec  $i' = \alpha \bar{i}$  et  $i_H = \bar{i}$ , soit :

$$i_c = -(1 - \alpha) \bar{i} \quad (10)$$

b)  $\alpha T \leq t < T$  ;

la relation (9) est toujours valable, avec  $i' = \alpha \bar{i}$  et  $i_H = 0$  ; ce qui donne :

$$i_c = \alpha \bar{i} \quad (11)$$

Calcul de  $v(t)$

$$\text{On sait que } \frac{dv}{dt} = \frac{i_c}{C'}$$

$$\text{d'où } v(t) = \frac{1}{C'} \int i_c dt.$$

En tenant compte des relations (10) et (11), on obtient :

• pour  $0 \leq t < \alpha T$  ;

$$v(t) = -\frac{(1 - \alpha) \bar{i}}{C'} t + V_M \quad (12)$$

• pour  $\alpha T \leq t < T$  ;

$$v(t) = \frac{\alpha \bar{i}}{C'} (t - \alpha T) + V_m \quad (13)$$

où  $V_M$  et  $V_m$  sont des constantes d'intégration dépendant des conditions initiales.

Les allures de  $i_c(t)$  et  $v(t)$  sont données figure 9.

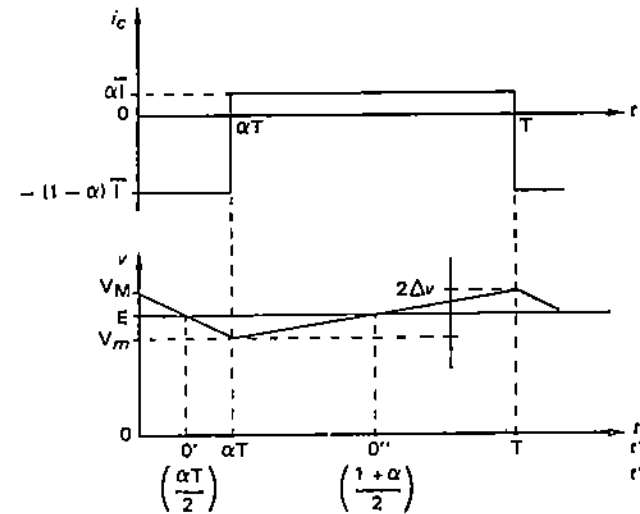


Fig. 2.9. - courbes  $i_c(t)$  et  $v(t)$  en supposant  $\Delta i$  et  $\Delta i'$  négligeables.

3.2. En remplaçant  $t$  par  $\alpha T$  dans les équations (12) et (13), il vient :

$$-\frac{(1 - \alpha) \bar{i} \alpha T}{C'} + V_M = V_m$$

$$\text{soit } 2 \Delta v = V_M - V_m = \frac{\bar{i} T}{C'} (1 - \alpha) \alpha$$

$$\text{ou encore } 2 \Delta v = \frac{\bar{i}}{C' f} (1 - \alpha) \alpha \text{ avec } f = \frac{1}{T} \quad (14)$$

4. On admet pour  $v(t)$  les lois de variation établies en 3.



4.1. On sait que (cf. question 2.2)

$$E = L' \frac{di'}{dt} + v \quad (15)$$

Deux cas sont à étudier :

a)  $0 \leq t < \alpha T$

Plaçons l'origine des temps  $t'$  en  $O'$  d'abscisse  $\frac{\alpha T}{2}$  (cf. figure 9).  
Dans ce cas :

$$t' = t - \frac{\alpha T}{2}$$

$$\text{et } v(t') = E - k_1 t' \quad (16)$$

$$\text{En effet, } E = L' \frac{di'}{dt'} + v(t').$$

Soit, en passant aux valeurs moyennes :

$$E = \left( L' \frac{di'}{dt} \right) + \bar{v}$$

où  $\bar{v}$  et  $\left( L' \frac{di'}{dt} \right)$  désignent les valeurs moyennes de  $v$  et  $L' \frac{di'}{dt}$ .

Comme  $\left( L' \frac{di'}{dt} \right) = 0$  (voir problème n° 1, question 3.3.3), on a :

$$E = \bar{v}$$

Les relations (15) et (16) donnent :

$$L' \frac{di'}{dt'} = k_1 t' (*)$$

Par conséquent :

$$i'(t') = \frac{k_1}{L'} \frac{t'^2}{2} + I'_m$$

Pour  $-\frac{\alpha T}{2} \leq t < \frac{\alpha T}{2}$ , on a :

$$k_1 = \frac{2 \Delta v}{\alpha T} \quad (\text{cf. figure 9})$$

(\*) Remarquons que  $dt' = dt'' = dt$ .

$$\text{soit } i'(t') = \frac{\Delta v}{L' \alpha T} t'^2 + I'_m \quad (17)$$

b)  $\alpha T \leq t < T$

Plaçons l'origine des temps  $t''$  en  $O''$  d'abscisse  $\frac{(1+\alpha)T}{2}$  (cf. figure 9), ce qui entraîne :

$$t'' = t - \frac{(1+\alpha)T}{2}$$

Dans ce cas  $v = E + k_2 t''$

$$\text{et } L' \frac{di'}{dt''} = -k_2 t''.$$

Par conséquent :

$$i'(t'') = -\frac{k_2}{L'} \frac{t''^2}{2} + I'_M$$

Pour  $-\frac{(1-\alpha)T}{2} \leq t'' < \frac{(1-\alpha)T}{2}$ , on a :

$$k_2 = \frac{2 \Delta v}{(1-\alpha)T}$$

$$\text{soit } i'(t'') = -\frac{\Delta v}{L'(1-\alpha)T} t''^2 + I'_M \quad (18)$$

$I'_m$  et  $I'_M$  sont des constantes d'intégration dépendant des conditions initiales.

Pour calculer ces constantes, on peut remarquer que :

• Le phénomène est périodique de période  $T$ , soit  $i'(t=0) = i'(t=T)$ .

En égalant les expressions (17) et (18) pour  $t=0$  et  $t=T$ , il vient :

$$I'_m + \frac{\Delta v}{L'} \frac{\alpha T}{4} = I'_M - \frac{\Delta v}{L'} \frac{(1-\alpha)T}{4}$$

$$\text{d'où } I'_M - I'_m = \frac{\Delta v T}{4 L'} \quad (19)$$

• La valeur moyenne  $\bar{i}'$  de  $i'(t)$  vaut  $\alpha \bar{I}$  (cf. question 3.1).

$$\text{soit } \alpha \bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T i'(t) dt$$

En posant  $t' = t - \frac{\alpha T}{2}$  et  $t'' = t - \frac{(1 + \alpha) T}{2}$ , cette intégrale s'écrit :

$$\alpha \bar{I} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\alpha T}{2}}^{\frac{\alpha T}{2}} \left( \frac{\Delta v}{L' \alpha T} t'^2 + I'_m \right) dt' +$$

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{(1-\alpha)T}{2}}^{\frac{(1-\alpha)T}{2}} \left( -\frac{\Delta v}{L' (1-\alpha) T} t''^2 + I'_M \right) dt''$$

ce qui donne — tous calculs faits — :

$$\alpha \bar{I} = \frac{(2\alpha - 1) T \Delta v}{12 L'} + \alpha I'_m + (1 - \alpha) I'_M \quad (20)$$

Les relations (19) et (20) forment un système de deux équations à deux inconnues, dont les solutions sont :

$$I'_m = \alpha \bar{I} - \frac{(2 - \alpha) T \Delta v}{12 L'} \quad (21)$$

et 
$$I'_M = \alpha \bar{I} + \frac{(1 + \alpha) T \Delta v}{12 L'} \quad (22)$$

4.2. L'ondulation crête à crête  $2 \Delta i'$  est donnée par la relation (19)

$$2 \Delta i' = \frac{\Delta v T}{4 L'}$$

soit, en remplaçant  $\Delta v$  par (14), il vient :

$$2 \Delta i' = \frac{\bar{I} T^2}{8 L' C'} (1 - \alpha) \alpha \quad (23)$$

5. Les expressions de  $\Delta i$ ,  $\Delta v$  et  $\Delta i'$ , pour  $E$ ,  $\bar{I}$  et  $f$  donnés, sont de la forme  $k (1 - \alpha) \alpha$ . On peut conclure, d'après l'étude faite question 1.3, que les variations  $\Delta i'$  et  $\Delta v$  sont maximales pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Ceci entraîne :

$$\Delta v_M = \frac{\bar{I}}{8 f C'} \quad (24)$$

et 
$$\Delta i'_M = \frac{\bar{I}}{64 f^2 L' C'} \quad (25)$$

6. Les valeurs données sont :

$$\bar{I} = 100 \text{ A}$$

et  $C' = 2000 \mu\text{F}$

6.1. A partir de la relation (25), on peut écrire :

$$L' = \frac{\bar{I}}{64 f^2 \Delta i'_M C'}$$

Si  $\Delta i' \leq 0,05 \text{ A}$ , on obtient l'inégalité :

$$L' \geq \frac{\bar{I}}{64 f^2 \Delta i'_M C'}$$

A.N. :  $L' \geq 0,174 \text{ H}$ .

Dans la suite du problème, nous prendrons  $L' = 0,174 \text{ H}$ .

6.2. a) pour  $\alpha = 0,5$ , on a :

•  $\Delta v = 20,83 \text{ V}$  (cf. relation (24))

soit  $V_M = 220,83 \text{ V}$

et  $V_m = 179,17 \text{ V}$

•  $\Delta i' = 0,05 \text{ A}$

soit  $I'_M = 50,05 \text{ A}$

et  $I'_m = 49,95 \text{ A}$ .

Les expressions (17) et (18) permettent d'écrire :

— pour  $0 \leq t < \alpha T$ ,

$$i'(t) = 7,2 \cdot 10^4 (t - 8,33 \cdot 10^{-4})^2 + 49,95$$

— pour  $\alpha T \leq t < T$ ,

$$i'(t) = -7,2 \cdot 10^4 (t - 2,5 \cdot 10^{-3})^2 + 50,05$$

b) pour  $\alpha = 0,2$ , on a :

- $\Delta v = 13,33 \text{ V}$  (cf. relation (14))

soit  $V_M = 213,33 \text{ V}$

et  $V_m = 186,67 \text{ V}$

- $\Delta i' = 0,032 \text{ A}$  (cf. relation (23))

$I'_M = 20,026 \text{ A}$  (cf. relation (22))

et  $I'_m = 19,962 \text{ A}$  (cf. relation (21))

Les expressions (17) et (18) permettent d'écrire :

– pour  $0 \leq t < \alpha T$ ,

$$i'(t) = 11,5 \cdot 10^4 (t - 3,33 \cdot 10^{-4})^2 + 19,962$$

– pour  $\alpha T \leq t < T$

$$i'(t) = -2,9 \cdot 10^4 (t - 2 \cdot 10^{-3})^2 + 20,026.$$

Les courbes  $v(t)$  et  $i'(t)$  sont représentées figure 10.

7. Le moteur fonctionne à couple constant, quelle que soit sa vitesse de rotation  $N$ , et absorbe, dans ces conditions, un courant  $\bar{I} = 100 \text{ A}$ . Le filtre d'entrée est à nouveau supposé parfait ( $v = E$ ).

#### 7.1. $\alpha = 0,1$ et $L = 5 \text{ mH}$

Le montage étudié est représenté figure 2 : le moteur commencera à tourner dès que le courant  $i$  atteindra  $100 \text{ A}$  (cf. hypothèses faites en 7). En outre, tant que le moteur est à l'arrêt, la f.c.e.m.  $E'$  est nulle.

• A l'instant  $t = 0$ , on ferme  $H$  ; par conséquent :

$$E = L \frac{di}{dt}$$

soit  $i(t) = \frac{E}{L}t + A$  (26)

où  $A$  est une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

A  $t = 0$ ,  $i(0) = 0$ , ce qui entraîne :

$$A = 0$$

et  $i(t) = \frac{E}{L}t$

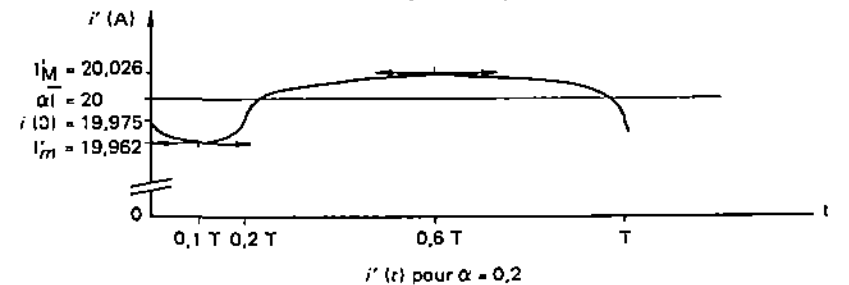
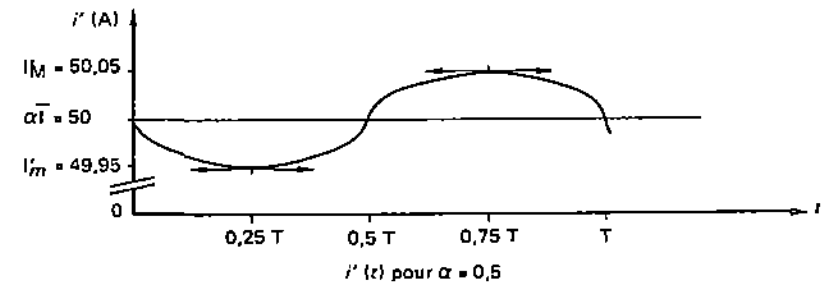
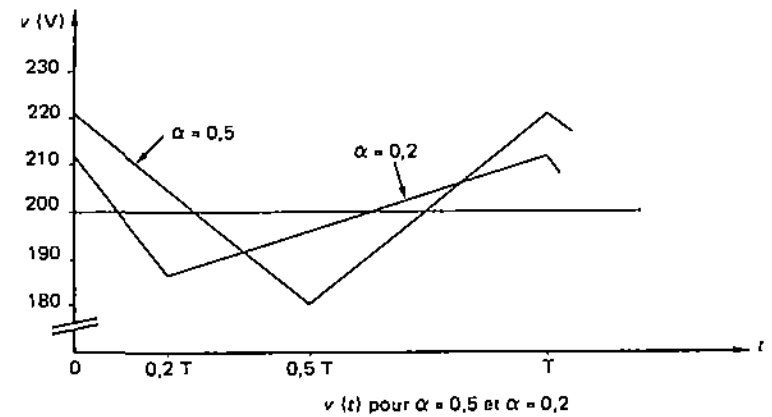


Fig. 2.10. Courbes  $v(t)$  et  $i'(t)$  pour  $\alpha = 0,2$  et  $\alpha = 0,5$ .

$$\text{A } t = \alpha T, i(\alpha T) = \frac{E}{L} \frac{\alpha}{f} \text{ avec } f = \frac{1}{T}$$

A.N. :  $i(\alpha T) = 13,33 \text{ A}$ .

Le moteur est toujours à l'arrêt.

• A l'instant  $t = \alpha T$ , on ouvre  $H$  ; par conséquent :

$$0 = L \frac{di}{dt}$$

Cette équation montre que  $i(t)$  est constant, avec :

$$i(t) = 13,33 \text{ A} \quad (27)$$

Les expressions (26) et (27) permettent de dire que le courant  $i(t)$  augmente de 13,33 A à chaque période, ceci tant que le moteur est à l'arrêt.

On constate qu'à  $t = 7 T$ ,  $i = 93,31 \text{ A}$ .

Pour  $t \geq 7 T$ , on peut écrire :

$$i(t) = \frac{E}{L} t + 93,31$$

Le courant  $i$  atteindra la valeur 100 A à l'instant  $t_1$  tel que :

$$t_1 = 7 T + \frac{L}{E} (100 - 93,31)$$

A.N. :  $t_1 = 23,5 \text{ ms}$ .

A cet instant, le moteur commence à tourner et la f.c.e.m  $E'$  croît ( $E' \neq 0$ ) : les relations (26) et (27) ne sont plus utilisables.

7.2. On sait qu'à flux constant, la vitesse  $N$  et la f.c.e.m  $E'$  sont liées par la relation :

$$E' = KN \quad (28)$$

où  $K$  est un coefficient constant de proportionnalité.

$$\text{D'où } K = \frac{E'}{N}$$

$$\text{A.N. : } K = \frac{1}{10}$$

La relation (3) montre que, lorsque le régime permanent est établi.

$$\alpha = \frac{E'}{E}$$

soit  $E' = \alpha E$  avec  $\alpha = 0,1$  et  $E = 200 \text{ V}$ .

A.N. :  $E' = 20 \text{ V}$ .

La formule (28) donne :

$$N = \frac{1}{K} E'$$

A.N. :  $N = 200 \text{ tours par minute (tr/mn)}$ .

7.3. Lorsque le régime permanent est établi, le couple accélérateur est nul, ce qui entraîne l'égalité des couples utile  $\Gamma_u$  et résistant  $\Gamma_r$ .

En outre, si on suppose le couple de pertes négligeable, les couples utiles  $\Gamma_u$  et électromagnétique  $\Gamma_e$  sont égaux, avec :

$$\Gamma_e = \frac{\alpha E \bar{I}}{(2\pi/60) N} \quad (29)$$

• Pour  $N = 200 \text{ tr/mn}$ ,  $\alpha = 0,1$ ,  $E = 200 \text{ V}$  et  $\bar{I} = 100 \text{ A}$ , on a :

$$\Gamma_e = \Gamma_r = 95,5 \text{ N.m.}$$

• Dans cette question, le couple résistant  $\Gamma_r$  prend la valeur 9,55 N.m. Lorsque le régime permanent est établi, on a  $\Gamma_e = \Gamma_r$  : sachant que  $\Gamma_e$  est proportionnel à  $\bar{I}$  pour  $N$  et  $E$  données (cf. relation (29)), on obtient :

$$\bar{I} = 10 \text{ A}$$

Par conséquent :

$$N = \frac{\alpha E \bar{I}}{(2\pi/60) \Gamma_e}$$

A.N. :  $N (\text{tr/mn}) = 2000 \times \alpha$ .

La vitesse  $N$  est une fonction linéaire de  $\alpha$  ; la courbe  $N(\alpha)$  pour  $0,1 \leq \alpha \leq 1$  est donnée figure 11.

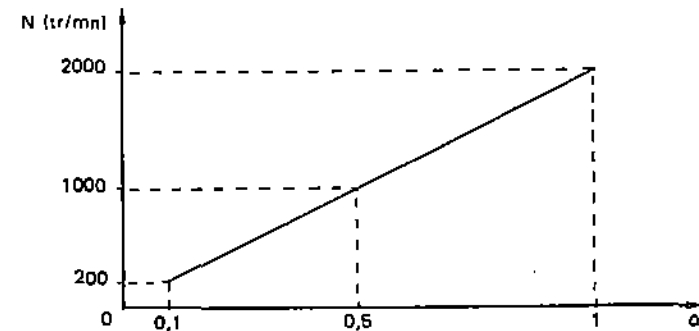


Fig. 2.11. - Courbe  $N(\alpha)$ .

Etude d'un hacheur parallèle :  
Application au freinage par récupération  
d'un moteur à courant continu

1. Introduction : principe du hacheur parallèle :

Soit le montage représenté figure 1.

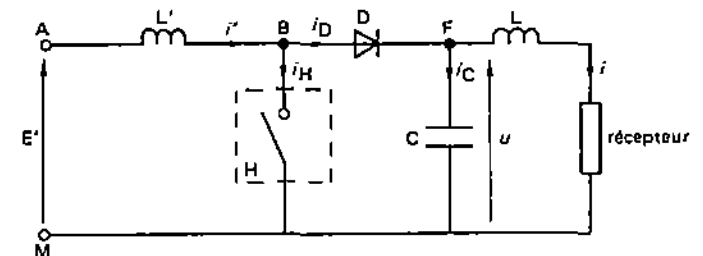


Fig. 3.1.

Le hacheur H est supposé parfait, de rapport cyclique  $\alpha$  et de fréquence de hachage  $f = \frac{1}{T}$ .

Le condensateur C est de valeur suffisante pour considérer la tension  $u(t)$  comme constante et égale à sa valeur moyenne  $\bar{U}$ .

Donner le principe de fonctionnement du montage. Quel est le rôle de l'inductance  $L'$ , de la diode D et du condensateur C ?

## 2. Application : freinage par récupération d'un moteur à courant continu :

On considère le montage de la figure 2 : la tension  $u(t)$  est toujours supposée constante et sa valeur moyenne sera notée  $E$  dans cette partie.

La tension  $E'$  représente la f.c.e.m. du moteur à courant continu.

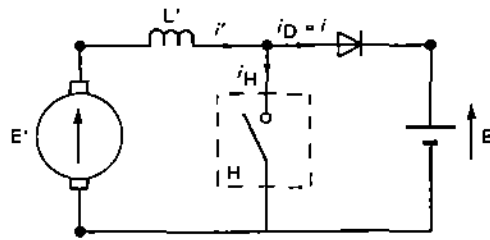


Fig. 3.2.

2.1. Etablir l'expression du courant  $i'$  fourni par la source  $E'$ .

2.2. Donner la condition sur  $\alpha$ ,  $E$  et  $E'$  pour obtenir un régime périodique de conduction continue.

2.3. Représenter les courbes  $i'(t)$ ,  $i_H(t)$  et  $i(t)$  dans le cas :

- du régime de conduction continue
- du régime de conduction discontinue.

2.4. En déduire l'expression de la valeur moyenne  $\bar{I}$  du courant  $i'$  :

- pour le régime de conduction continue
- à la limite de la conduction continue.

## 3. Etude de la caractéristique externe $\bar{U} = f(\bar{I})$ :

$\bar{U}$  et  $\bar{I}$  désignent les valeurs moyennes de  $u(t)$  et  $i(t)$  (cf. figure 3).

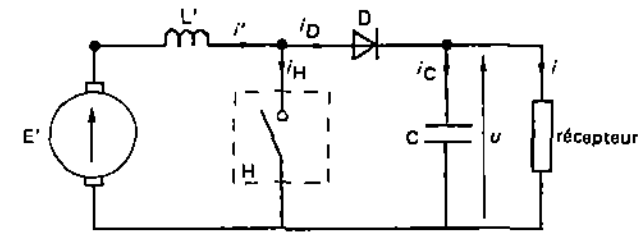


Fig. 3.3. - L'inductance  $L$  est élément du récepteur

3.1. Etablir l'expression de  $\bar{U}$  dans le cas :

- du régime de conduction continue : en fonction de  $\alpha$  et  $E'$
- du régime de conduction discontinue : en fonction de  $\alpha$ ,  $E'$  et d'un coefficient  $\beta$  tel que  $\beta T = t_1$  ;  $t_1$  désigne l'instant où  $i'(t)$  s'annule.

3.2. Etablir l'expression de  $\bar{I}$  :

- à la limite du régime de conduction continue : en fonction de  $E'$ ,  $T$ ,  $L'$  et  $\alpha$
- dans le cas du régime de conduction discontinue : en fonction de  $E'$ ,  $T$ ,  $L'$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .

3.3. Représenter les courbes relatives  $\frac{\bar{U}}{E'} = f\left[\frac{\bar{I}}{\frac{E' T}{2 L'}}\right]$  pour  $\alpha = 0,2$ ,  $\alpha = 0,5$  et  $\alpha = 0,8$ .

Faire apparaître, sur les graphes, les régimes de conduction.

(Niveau maîtrise E.E.A)

### Solution et commentaires :

1. Principe du bacheur parallèle :

Reprenons le montage de la figure 1.

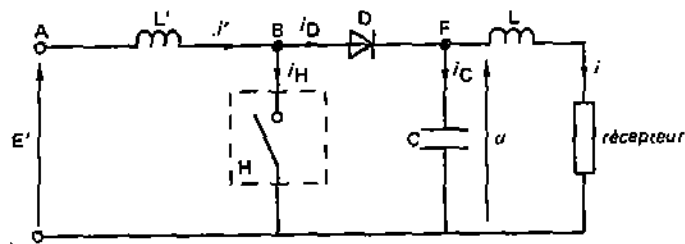


Fig. 3.4.

Lorsque H est fermé, l'énergie prélevée à la source continue  $E'$  est stockée dans l'inductance  $L'$ . Celle-ci la restitue ensuite au récepteur lors de l'ouverture de H.

#### a) Rôle de $L'$

Le circuit  $(E', L')$  peut être considéré comme un générateur de courant car sa réactance interne (ici celle de la bobine  $L'$ ) s'oppose à toute variation brusque du courant débité  $i'$ .

En supposant  $L'$  infinie, le montage de la figure 4 devient (cf. figure 5) :

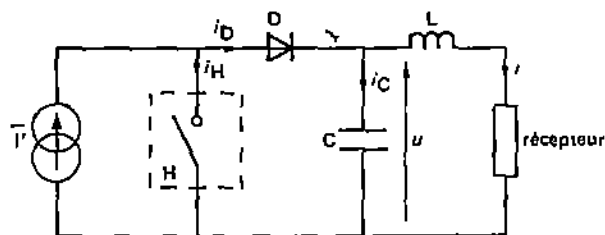


Fig. 3.5. -  $\bar{i}$  désigne la valeur moyenne de  $i'(t)$ .

#### b) Rôles de D et C

Lorsque H est ouvert, la diode D est passante et le condensateur C se charge à courant pratiquement constant. En effet,  $L'$  étant en réalité de valeur finie, le courant  $i'$  décroît car la maille de sortie forme un circuit oscillant amorti. Le long de la maille (M, A, B, M), on peut écrire :

$$E' = L' \frac{di'}{dt} + \bar{u}$$

car  $u(t)$  est constante et égale à sa valeur moyenne  $\bar{u}$  ;

$$\text{soit } \bar{u} = E' - \frac{L' di'}{dt} \quad (1)$$

Comme  $i'$  décroît, le terme  $-\frac{L' di'}{dt}$  est positif ce qui entraîne  $\bar{u} > E'$ .

Lorsque H est fermé, la diode D empêche la décharge du condensateur C vers la source  $(E', L')$  et son court-circuit par le hacheur.

C étant de valeur suffisante (\*), le montage de la figure 4 devient (cf. figure 6) :

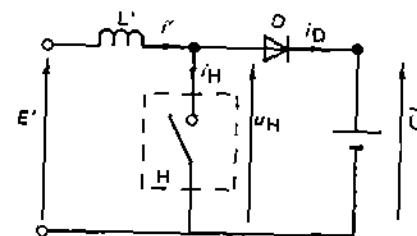


Fig. 3.6.

En désignant par  $\bar{u}_H$  la valeur moyenne de  $u_H(t)$ , on constate qu'une source de courant, de tension moyenne  $\bar{u}_H$ , peut débiter dans une source de tension de valeur supérieure à  $\bar{u}_H$ , grâce au hacheur parallèle.

C'est pourquoi on appelle aussi ce montage «hacheur survolteur».

## 2. Application : freinage par récupération d'un moteur à courant continu :

Dans ce fonctionnement, la machine à courant continu débite dans la source qui l'alimentait lors de la marche en moteur.

### 2.1. Reprenons le montage de la figure 2 (cf. figure 7) :

Exprimons le courant  $i'$ . Pour cela, il faut étudier séparément les deux états du hacheur.

(\*) voir l'hypothèse faite dans l'énoncé.

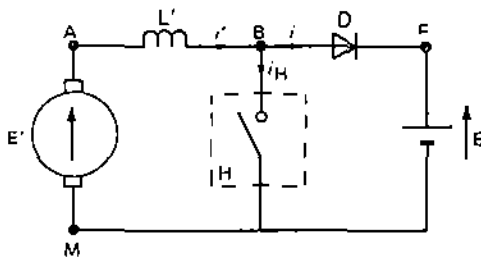


Fig. 3.7.

a)  $0 \leq t < \alpha T$ , H est fermé ;

Le schéma précédent devient (cf. figure 8) :

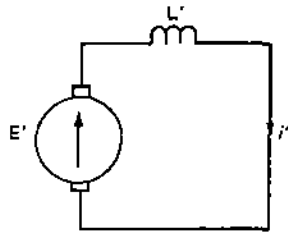


Fig. 3.8.

Le long de la maille formant le circuit, on peut écrire :

$$E' = L' \frac{di'}{dt}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre, sa solution est (cf. cours de mathématiques) :

$$i'(t) = I'_m + \frac{E'}{L'} t \quad (2)$$

où  $I'_m$  est une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

b)  $\alpha T \leq t < T$ , H est ouvert ;

La diode D est passante pendant le temps où  $i_D > 0$ .

Dans ce cas, le schéma donné figure 7 devient (cf. figure 9) :

Cette configuration est valable pendant le temps où  $i_D = i' > 0$ .

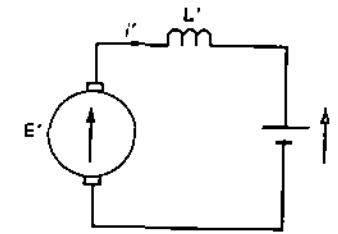


Fig. 3.9.

La loi d'Ohm, appliquée au circuit de la figure 9, permet d'écrire :

$$E' = L' \frac{di'}{dt} + E$$

L'origine des temps étant prise à  $t = 0$ , on obtient :

$$i'(t) = I'_M - \left( \frac{E - E'}{L'} \right) (t - \alpha T) \quad (3)$$

où  $I'_M$  est une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

2.2. Pour qu'un régime périodique s'établisse, il faut que :

$$i'(0) = i'(T)$$

$$\text{or } i'(0) = I'_m \quad (\text{cf. relation (2)})$$

$$\text{et } i'(T) = I'_M - \left( \frac{E - E'}{L'} \right) (T - \alpha T) \quad (\text{cf. relation (3)})$$

En remarquant que  $I'_M = i'(\alpha T) = I'_m + \left( \frac{E'}{L'} \right) \alpha T$ , il vient :

$$i'(T) - i'(0) = \frac{E'}{L'} \alpha T - \left( \frac{E - E'}{L'} \right) (1 - \alpha) T = 0$$

ce qui donne — tous calculs faits — :

$$(1 - \alpha) = \frac{E'}{E} \quad (4)$$

Remarque :

Cette condition montre que  $E > E'$ .



On déduit de ce résultat trois évolutions possibles pour  $i'(t)$  :

- $(1 - \alpha) < \frac{E'}{E}$ , soit  $i'(T) - i'(0) > 0$  ;

Dans ce cas, la valeur moyenne de  $i'(t)$  augmente avec  $t$ .

- $(1 - \alpha) > \frac{E'}{E}$ , soit  $i'(T) - i'(0) < 0$  ;

La valeur moyenne de  $i'(t)$  diminue et on tend vers le régime de conduction discontinue.

- $(1 - \alpha) = \frac{E'}{E}$ , soit  $i'(T) - i'(0) = 0$  ;

La valeur moyenne de  $i'(t)$  est constante : c'est la condition d'existence d'un régime périodique de conduction continue.

2.3. Les courbes de la figure 10 représentent l'évolution de  $i'(t)$  :

- en conduction continue
- en conduction discontinue
- à la limite de la conduction continue.

2.4. Deux cas sont à considérer : ~

a) régime de conduction discontinue (cf. figure 10b) :

Dans ce cas,  $I'_m = 0$ .

Calculons l'instant  $t_1$ , compris entre  $\alpha T$  et  $T$ , où  $i'(t)$  s'annule ; la relation (3) permet d'écrire :

$$I'_M = \left( \frac{E - E'}{L'} \right) (t_1 - \alpha T)$$

avec  $I'_M = \frac{E'}{L'} \alpha T$  (cf. relation (2))

soit  $t_1 = \frac{E}{E - E'} \alpha T$  (5)

En remarquant la forme triangulaire de  $i'(t)$  entre 0 et  $t_1$ , il vient

$$\bar{I}' = \frac{t_1}{T} \left( \frac{1}{2} I'_M \right)$$

où  $\bar{I}'$  désigne la valeur moyenne de  $i'(t)$ .

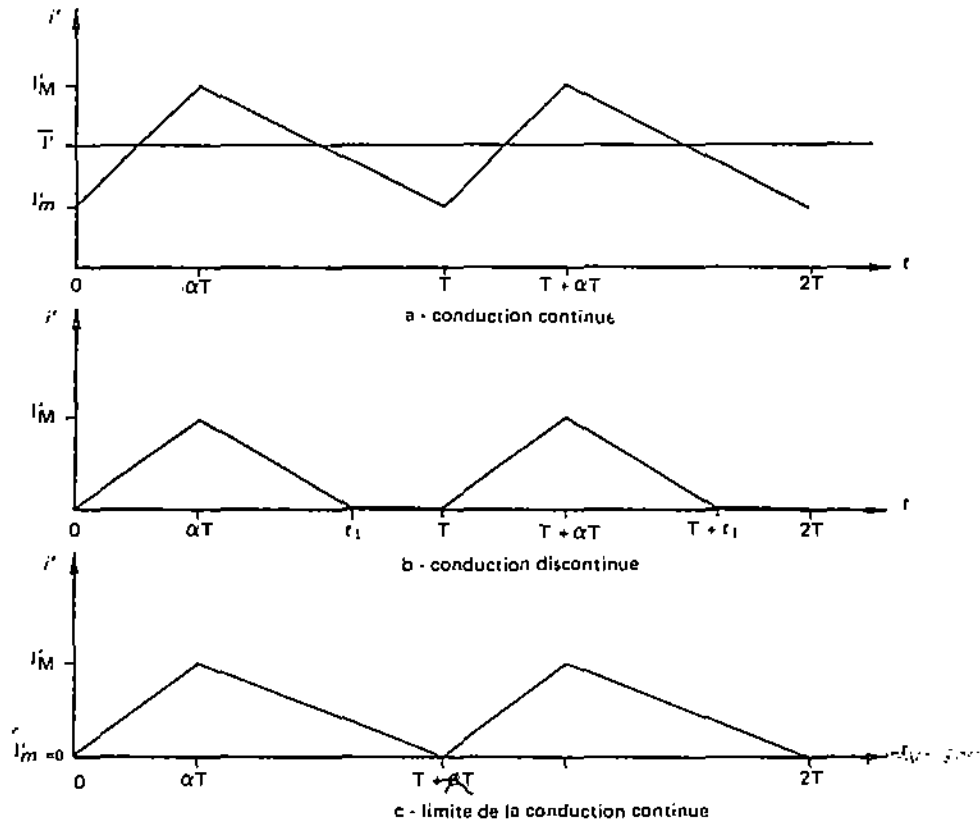


Fig. 3.10. - Courbes  $i'(t)$  pour les différents régimes de conduction.

soit  $\bar{I}' = \frac{E' T}{2 L'} \left( \frac{E}{E - E'} \right) \alpha^2$  (6)

b) limite de la conduction continue

Dans ce cas  $t_1 = T$  et  $I'_m = 0$ .

$\bar{I}'$  est donné par la relation :

$$\bar{I}' = \frac{1}{2} \frac{E'}{L'} \alpha T$$

avec  $(1 - \alpha) = \frac{E'}{E}$

soit  $\alpha = 1 - \frac{E'}{E}$

ce qui donne :

$$\bar{I} = \frac{E' T}{2 L'} \left( 1 - \frac{E'}{E} \right) \quad (7)$$

### 3. Etude de la caractéristique externe $\bar{U} = f(\bar{I})$ :

3.1. En fonction du régime de conduction, deux cas sont à considérer.

#### a) régime de conduction discontinue

La relation (5) a été établie en supposant la tension  $u(t)$  constante et égale à  $E$ . En désignant par  $\bar{U}$  la valeur moyenne de  $u(t)$ , on peut écrire :

$$\bar{U} = E$$

L'expression (5) devient :

$$t_1 = \frac{\bar{U}}{\bar{U} - E'} \alpha T \quad (8)$$

$t_1$  est l'instant où  $i'(t)$  s'annule. Par conséquent (cf. énoncé) :

$$t_1 = \beta T$$

soit  $\beta = \frac{\bar{U}}{\bar{U} - E'} \alpha$

avec  $\alpha \leq \beta < 1$

d'où :

$$\bar{U} = \left( \frac{\beta}{\beta - \alpha} \right) E' \quad (9)$$

#### b) régime de conduction continue

Nous avons vu, à la question 2.2, que la condition d'existence d'un régime périodique de conduction continue est :

$$(1 - \alpha) = \frac{E'}{E}$$

Comme  $E = \bar{U}$  (cf. paragraphe précédent), il vient :

$$\bar{U} = \frac{E'}{(1 - \alpha)} \quad (10)$$

Remarques :

- On retrouve ce résultat en remplaçant, dans la relation (9),  $\beta$  par la valeur 1.
- La valeur de  $\bar{U}$ , à  $E'$  et  $\alpha$  donnés, est constante.

3.2. Deux cas sont à considérer :

a) régime de conduction discontinue ;

Reprenons le montage de la figure 3 :

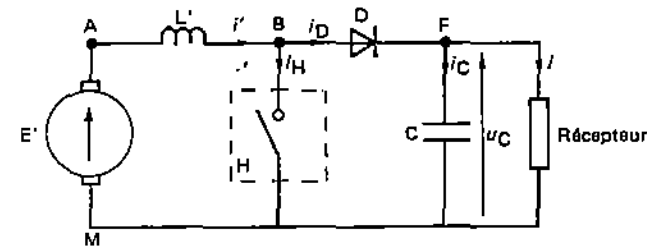


Fig. 3.11.

Au nœud F, on peut écrire :

$$i_D = i_C + i$$

En désignant par  $\bar{I}$ ,  $\bar{I}_C$  et  $\bar{I}_D$  les valeurs moyennes de  $i(t)$ ,  $i_C(t)$  et  $i_D(t)$ , il vient :

$$\bar{I}_D = \bar{I}_C + \bar{I}$$

Si on considère  $u(t)$  constant et égal à sa valeur moyenne, on a

$$i_C = C \frac{du}{dt} = 0 \text{ soit } \bar{I}_C = 0. \text{ Ceci entraîne :}$$

$$\bar{I} = \bar{I}_D$$

L'allure du courant  $i_D(t)$  est donnée figure 12 :

— pour  $0 \leq t < \alpha T$ , H est fermé et  $i_D(t) = 0$  : la diode empêche la décharge de C vers la source  $E'$ .

- pour  $\alpha T \leq t < t_1$ , H est ouvert et  $i_D(t) = i'(t)$
- pour  $t_1 \leq t < T$ , H est ouvert et  $i_D(t) = i'(t) = 0$ .

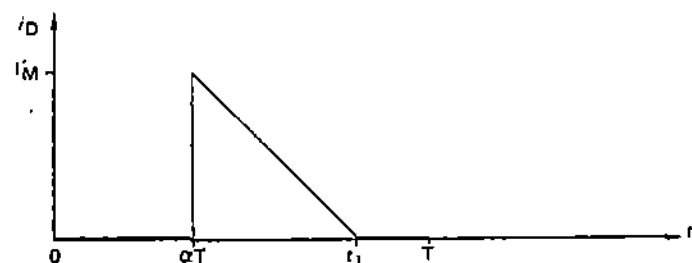


Fig. 3.12. - Courbe  $i_D(t)$ .

En remarquant la forme triangulaire de  $i_D(t)$  entre  $\alpha T$  et  $t_1$ , on déduit :

$$\bar{I} = \bar{I}_D = \frac{1}{2} I'_M \frac{(t_1 - \alpha T)}{T}$$

avec  $I'_M = \frac{E'}{L'} \alpha T$ ,

$$t_1 = \frac{E}{E - E'} \alpha T$$

et  $E = \bar{U}$

ce qui donne - tous calculs faits - :

$$\bar{I} = \frac{E' T}{2 L'} \left( \frac{E'}{\bar{U} - E'} \right) \quad (11)$$

En remplaçant  $\bar{U}$  par (10), il vient :

$$\bar{I} = \frac{E' T}{2 L'} (\beta - \alpha) \alpha \quad (12)$$

b) limite de la conduction continue

Dans ce cas,  $\beta T = T$  soit  $\beta = 1$ . Par suite (cf. relation (12)) :

$$\bar{I} = \frac{E' T}{2 L'} (1 - \alpha) \alpha \quad (13)$$

On remarque qu'à  $E'$  et  $\alpha$  donnés,  $\bar{I}$  est constant.

3.3. Les courbes relatives  $\left( \frac{\bar{U}}{E'} \right) = f \left[ \frac{\bar{I}}{\left( \frac{E' T}{2 L'} \right)} \right]$  pour  $\alpha = 0,2$ , 0,5 et 0,8 sont données figure 13.

Les tableaux I regroupent les valeurs des différentes variables.

$\beta$	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	1
$\frac{\bar{U}}{E'}$	$\infty$	3	1,67	1,4	1,33	1,25
$\frac{\bar{I}}{\left( \frac{E' T}{2 L'} \right)}$	0	0,02	0,06	0,1	0,12	0,16

Tableau I-a :  $\alpha = 0,2$

$\beta$	0,5	0,55	0,6	0,7	0,8	1
$\frac{\bar{U}}{E'}$	$\infty$	11	6	3,5	2,67	2
$\frac{\bar{I}}{\left( \frac{E' T}{2 L'} \right)}$	0	0,025	0,05	0,1	0,15	0,25

Tableau I-b :  $\alpha = 0,5$

$\beta$	0,8	0,85	0,88	0,9	0,95	1
$\frac{\bar{U}}{E'}$	$\infty$	17	11	9	6,33	5
$\frac{\bar{I}}{\left( \frac{E' T}{2 L'} \right)}$	0	0,04	0,064	0,08	0,12	0,16

Tableau I-c :  $\alpha = 0,8$

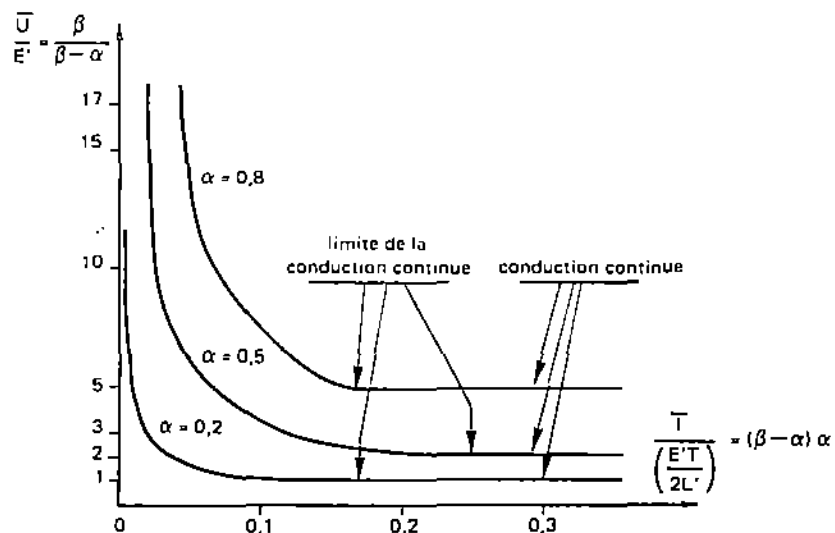


Fig. 3.13.

#### Remarque :

Cette étude, associée à celle du problème n° 2, met en évidence le principe de dualité des grandeurs électriques. Ce principe permet de déduire, à partir de l'étude d'un circuit, les résultats du circuit dual.

Le tableau II montre la dualité entre les hacheurs série et parallèle.

schémas réels		
schémas idéaux		
éléments du montage	<ul style="list-style-type: none"> <li>• filtre de tension en entrée</li> <li>• hacheur série</li> <li>• source de tension constante E</li> <li>• diode en parallèle</li> <li>• inductance série L</li> <li>• courant constant dans la charge (<math>\bar{I}</math>)</li> <li>• <math>\alpha</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• filtre de courant en entrée</li> <li>• hacheur parallèle</li> <li>• source de courant constante <math>\bar{I}'</math></li> <li>• diode en série</li> <li>• condensateur parallèle C</li> <li>• tension constante aux bornes de la charge (<math>\bar{U}</math>)</li> <li>• <math>(1 - \alpha)</math></li> </ul>
exemples d'équation	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ondulation résiduelle du courant dans la charge :  <math display="block">\Delta i = \frac{E T}{2 L} (1 - \alpha) \alpha</math> </li> <li>• <math>\bar{U} = \alpha E</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ondulation résiduelle de la tension aux bornes de la charge :  <math display="block">\Delta u = \frac{\bar{I}' T}{2 C} (1 - \alpha) \alpha</math> </li> <li>• <math>\bar{I} = (1 - \alpha) \bar{I}'</math></li> </ul>

Tableau II : dualité des hacheurs série et parallèle

**Etude complète d'un moteur série :  
Freinage sans récupération par hacheur**

Les caractéristiques nominales d'un moteur à courant continu à excitation série, sont les suivantes :

$$U_n = 400 \text{ V} ; I_n = 27 \text{ A} \text{ et } N_n = 1000 \text{ tr/mn.}$$

Les résistances mesurées à chaud ont pour valeurs :  $R_a = 1 \Omega$  pour l'induit et  $R_f = 0,6 \Omega$  pour l'inducteur.

La caractéristique à vide a été relevée à 1000 tr/mn :

$E_v$ (V)	136	174	233	287	308	335	357	383	429
$I_f$ (A)	5,7	7,35	10,5	15,2	18	22,6	27	33,2	45

**Tableau I : Caractéristique à vide du moteur étudié.**

La machine est parfaitement compensée.

Les trois parties du problème sont indépendantes.

**1. Etude du fonctionnement du moteur :**

1.1. Le moteur est alimenté sous 400 V :

1.1.1. Le courant  $I$  dans le moteur a pour intensité 22,6 A ;  
calculer la fréquence de rotation  $N_1$  et le couple électromagnétique  $T_e$ .

1.1.2. On équipe ce moteur d'un rhéostat de démarrage limitant l'intensité à 45 A. Calculer la résistance totale  $R_h$  de ce rhéostat, le moment du couple électromagnétique  $T_d$  au démarrage ainsi que la fréquence de rotation  $N_2$ , au moment où le courant  $I$  prend la valeur 27 A, la totalité du rhéostat étant encore en service.

1.2. Afin de déterminer la somme  $p_c$  des pertes mécaniques  $p_m$  et des pertes dans le fer  $p_f$  dans les conditions de la question 1.1.1, on fait fonctionner la machine en moteur à excitation séparée à vide. On désigne par  $U_0$ , la différence du potentiel aux bornes de l'induit, par  $I_0$  le courant dans l'induit et par  $I_{s0}$  le courant inducteur.

1.2.1. Sachant que  $I_0 = 2,2$  A, déterminer les valeurs numériques de  $U_0$ ,  $p_c$  et  $I_{s0}$ .

1.2.2. En déduire, dans les conditions de la question 1.1.1, le moment du couple utile  $T_u$  et le rendement  $\eta$  du moteur.

1.3. On souhaite déterminer par une méthode d'opposition, le rendement de l'induit du moteur pour le point nominal. On utilise à cet effet une machine identique à la machine étudiée et un moteur auxiliaire  $m$  : les arbres des trois machines sont manchonnés ; les inducteurs sont alimentés séparément. Les induits et un générateur auxiliaire  $S$  sont connectés en série. L'une des machines fonctionne en moteur, l'autre en génératrice ; les courants d'excitation sont égaux (cf. figure 1).

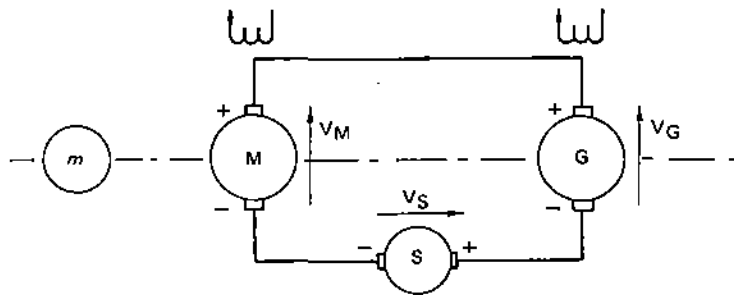


Fig. 4.1. - Montage pour la mesure du rendement de l'induit du moteur.

1.3.1. Comparer les pertes des machines  $M$  et  $G$ . Que représente la puissance fournie par  $S$  et la puissance fournie par  $m$  ? Justifier les réponses.

1.3.2. On note  $N = 1000$  tr/mn ;  $V_M = 384$  V ;  $I = 27$  A ; puissance utile de  $m = 1620$  W. Déterminer le rendement de l'induit du moteur.

## 2. Réglage de la vitesse :

Dans toute cette partie, on considère des régimes de fonctionnement pour lesquels le courant dans l'induit vaut 33,2 A.

2.1. Le courant inducteur étant égal au courant dans l'induit, sous quelle tension le moteur devrait-il être alimenté pour tourner à 1000 tr/mn. Comment peut-on obtenir cette vitesse si la tension d'alimentation ne peut dépasser 400 V ?

2.2. On place en parallèle avec l'inducteur une résistance  $R$  de 2,61  $\Omega$ . Quelle est la fréquence de rotation du moteur alimenté sous 400 V ?

2.3. Le moteur, en série avec une inductance  $L$  de résistance négligeable est branché selon le schéma de la figure 2. Diodes, thyristor et hacheur sont supposés parfaits. Les inducteurs  $L$  et  $L_s$  sont suffisantes pour que les courants dans l'induit et dans l'inducteur série puissent être considérés comme continus.

Sur une période  $T$  de fonctionnement du hacheur, ce dernier est passant entre 0 et  $\alpha T$ , et bloqué entre  $\alpha T$  et  $T$  ( $\alpha < 1$ ). Le thyristor  $Th$  est amorcé à la date  $t_1$  comprise entre 0 et  $\alpha T$ .

On donne :  $I = 33,2$  A ;  $\rho = 5,4$   $\Omega$  ;  $r = 0,3$   $\Omega$  et  $R_s = 0,6$   $\Omega$ .

2.3.1. Montrer que  $Th$  se bloque spontanément à la date  $\alpha T$ .

2.3.2. On se place dans le cas où le moteur est alimenté sous sa tension nominale ; le temps d'ouverture de  $H$  est donc faible devant  $T$ , et on pourra considérer dans les questions suivantes que  $Th$  conduit entre  $t_1$  et  $T$ .

2.3.2.a. Calculer  $I_s$  pour  $t_1 = T$  et pour  $t_1 = 0$ .

2.3.2.b. Le courant d'excitation  $I_s$  vaut 27 A. Que peut-on dire de la somme  $(j + i)$  des courants instantanés dans  $\rho$  et  $r$  ?

Représenter, pour une date  $t_1$  quelconque comprise entre 0 et  $T$ , les variations de ces courants en fonction du temps.

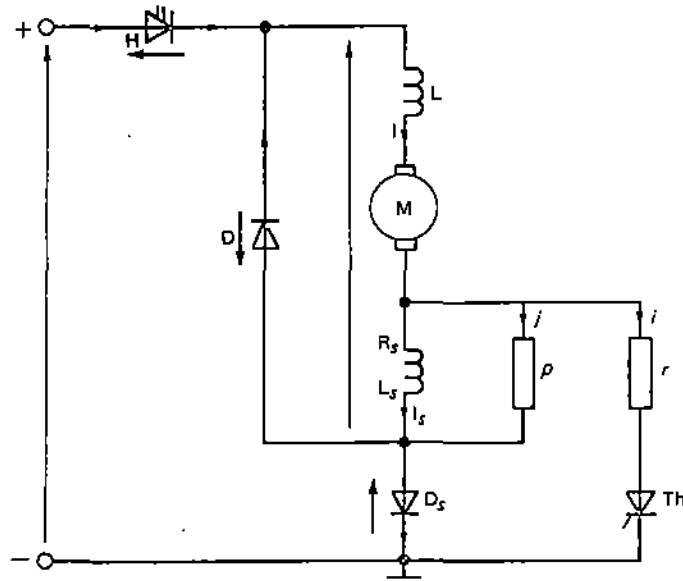


Fig. 4.2. - Commande du moteur par le hacheur H.

Calculer la tension moyenne aux bornes de l'inducteur. En déduire le courant moyen dans  $\rho$  et calculer le rapport  $\frac{f_1}{T}$ .

Calculer la puissance dissipée dans  $\rho$ .

### 3. Etude des procédés de freinage :

Lorsque l'alimentation du moteur est supprimée, le mouvement de la partie mobile (induit du moteur, machine entraînée) se poursuit à cause de l'inertie, avec une vitesse qui décroît en raison de l'existence d'un couple résistant global de moment  $T_r$ , supposé constant. On souhaite réduire la période de ralentissement en faisant fonctionner le moteur en génératrice à excitation séparée avec un courant inducteur  $I_s$  constant.

On négligera dans cette partie, la résistance de l'induit.

3.1. Que peut-on dire du rapport  $A = \frac{E}{\Omega}$  de la force électromotrice de la génératrice à sa vitesse angulaire de rotation ?

Exprimer le moment  $T_e$  du couple électromagnétique de la génératrice en fonction de  $A$  et du courant débité  $I$ .

3.2. A l'instant origine, on charge la génératrice par une résistance  $R$ . On désigne par  $J$ , le moment d'inertie total ramené sur l'arbre ; par  $\Omega_0$ , la vitesse à la date  $t = 0$  et par  $\Omega$ , la vitesse à la date  $t$ . L'inductance de l'induit est négligée.

3.2.1. Ecrire l'équation différentielle donnant  $\Omega$  en respectant les signes des couples s'exerçant sur l'arbre.

3.2.2. Résoudre cette équation. On pourra poser  $\tau = \frac{JR}{A^2}$ . Donner l'allure de la courbe  $\Omega = f(t)$ .

3.2.3. On donne :  $J = 5 \text{ kg.m}^2$  ;  $\Omega_0 = \frac{100\pi}{3} \text{ rad/s}$  ;  $I_s = 10,5 \text{ A}$  ;  $R = 15 \Omega$  et  $T_r = 15 \text{ N.m}$ .

Calculer la durée de freinage jusqu'à l'arrêt.

3.3. Le circuit de charge connecté à la génératrice à la date origine est maintenant celui représenté figure 3. Pour :

- $0 < t < \theta$  : H est passant ;  $i$  croît de  $I_m$  à  $I_M$ .
- $\theta < t < T$  : H est bloqué ;  $i$  décroît de  $I_M$  à  $I_m$ .

On suppose le régime permanent établi ; on néglige la variation de  $E$  entre 0 et  $T$ .

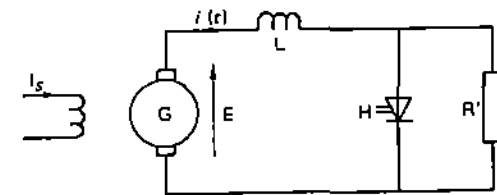


Fig. 4.3. - Montage pour l'étude du freinage.

3.3.1. Pour  $0 < t < \theta$ , exprimer  $i(t)$  en fonction de  $E$ ,  $L$  et  $I_m$ .

3.3.2. Pour  $\theta < t < T$ , exprimer  $i(t)$  en fonction de  $E$ ,  $L$ ,  $R'$   $\theta$  et  $I_M$ .

3.3.3. On suppose  $\frac{L}{R}$  grand devant  $T$  ; on admettra dans ces conditions que le courant débité par l'induit présente une ondulation négligeable. En outre, un dispositif d'asservissement de la commande du hacheur à la vitesse de rotation de la génératrice rend constant le rapport  $\frac{\beta}{\Omega} = a$  ; avec :

$$\beta = \frac{T - \theta}{T} \quad (0 < \beta \leq 1)$$

3.3.3.a. Montrer que l'intensité  $I$  du courant débité par la génératrice est :

$$I = \frac{E}{\beta R'}$$

3.3.3.b. On rappelle que  $E = A \Omega$  ; donner les expressions du courant  $I$  débité par la génératrice et du moment de son couple électromagnétique en fonction de  $a$ ,  $A$  et  $R'$  ; conclusion.

3.3.3.c. Ecrire et résoudre l'équation différentielle donnant  $\Omega$ . Donner l'allure de la courbe représentant les variations de  $\Omega$  en fonction du temps. On rappelle qu'à la date  $t = 0$ , la vitesse vaut  $\Omega_0$ .

3.3.3.d. On a noté  $I_s = 10,5 \text{ A}$  ;  $J = 5 \text{ kg.m}^2$  ;  $\Omega_0 = \frac{100 \pi}{3} \text{ rad/s}$  ;  $T_r = 15 \text{ N.m}$  ;  $R' = 20 \Omega$  et  $a = 0,008$ .

Calculer la durée de freinage jusqu'à l'arrêt.

(BTS Electrotechnique, 1985.)

### Solution et commentaires

La machine étudiée étant parfaitement compensée, la chute de tension due à la réaction magnétique d'induit est nulle. C'est pourquoi, dans tout le problème, on admettra que les f.c.e.m à vide et en charge sont égales. Aussi, pour simplifier les calculs, ces deux grandeurs seront notées  $E$ .

#### 1. Etude du fonctionnement en moteur :

Rappelons que pour le moteur série, le courant d'excitation  $I_s$  représente également le courant absorbé par l'induit (cf. figure 4).

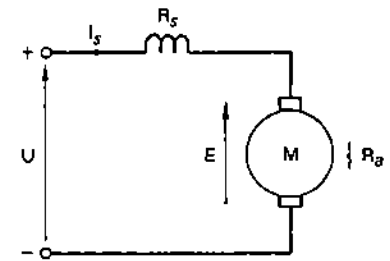


Fig. 4.4. - Fonctionnement en moteur série.

1.1. Le moteur est alimenté sous 400 V :

1.1.1. La loi d'Ohm appliquée au schéma de la figure 4 permet d'écrire (\*) :

$$U = E + (R_a + R_s) I_s \quad (1)$$

où  $R_a$  et  $R_s$  représentent respectivement les résistances des enroulements induits et inducteurs.

La relation précédente donne :

$$E = U - (R_a + R_s) I_s$$

A.N. :  $E = 363,84 \text{ V}$ .

— Calcul de la fréquence de rotation  $N_1$  :

Pour le même courant d'excitation ( $I_s = 22,6 \text{ A}$ ), on relève :

- $E = 335 \text{ V}$  lorsque le moteur tourne à la vitesse  $N_n$  ; avec  $N_n = 1000 \text{ tr/mn}$  (cf. tableau I).
- $E = 363,84 \text{ V}$  lorsque le moteur tourne à la vitesse  $N_1$ .

Sachant qu'à courant d'excitation constant ( $22,6 \text{ A}$  dans ce cas), la f.c.e.m est proportionnelle à la vitesse, on déduit :

$$N_1 = N_n \times \frac{363,84}{335}$$

A.N. :  $N_1 = 1086 \text{ tr/mn}$ .

(\*) Dans le fonctionnement en moteur, la machine se comporte comme un récepteur.



– Calcul du couple électromagnétique  $T_e$  :

Le couple électromagnétique  $T_e$  s'exprime par la formule :

$$T_e = \frac{E I_s}{\Omega_1}$$

avec  $\Omega_1 = 2 \pi N_1$

A.N. :  $T_e = 72,3 \text{ N.m}$

1.1.2. On équipe le moteur étudié d'un rhéostat de démarrage Rh (cf. figure 5).

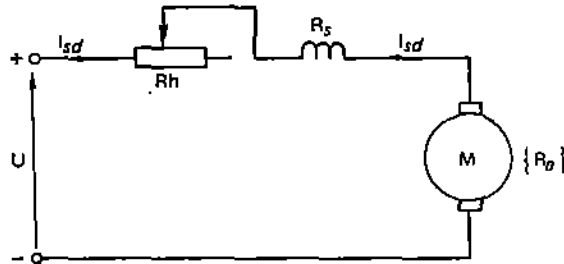


Fig. 4.5. - Moteur équipé du rhéostat de démarrage Rh.

Au démarrage, le moteur est encore à l'arrêt. De ce fait,  $E = 0$ . Dans ce cas, on a (cf. figure 5) :

$$U = (R_a + R_s + R_h) I_{sd}$$

avec  $I_{sd} = 45 \text{ A}$  ;  $I_{sd}$  étant le courant de démarrage.

L'équation précédente donne :

$$R_h = \frac{U}{I_{sd}} - (R_a + R_s)$$

A.N. :  $R_h = 7,29 \Omega$ .

• Au courant  $I_s = I_{sd}$ , il correspond  $E = 429 \text{ V}$  lorsque le moteur tourne à  $N_n = 1000 \text{ tr/mn}$  (cf. tableau I). D'où le couple électromagnétique de démarrage  $T_d$  :

$$T_d = \frac{E \cdot I_{sd}}{2 \pi N_n}$$

A.N. :  $T_d = 184,3 \text{ N.m}$ .

• Pour  $I_s = 27 \text{ A}$ , la f.c.é.m s'écrit :

$$E = U - (R_a + R_s + R_h) I_s$$

car la totalité du rhéostat est encore en service.

A.N. :  $E = 160 \text{ V}$ .

– Calcul de la fréquence de rotation  $N_2$  :

Pour le même courant d'excitation ( $I_s = 27 \text{ A}$ ), on relève :

•  $E = 357 \text{ V}$  lorsque le moteur tourne à la vitesse  $N_n$  ; avec  $N_n = 1000 \text{ tr/mn}$  (cf. tableau I).

•  $E = 160 \text{ V}$  lorsque le moteur tourne à la vitesse  $N_2$ .

Par conséquent :

$$N_2 = N_n \cdot \frac{160}{357}$$

car, à courant d'excitation constant ( $27 \text{ A}$  dans ce cas), la f.c.é.m est proportionnelle à la vitesse.

A.N. :  $N_2 = 448 \text{ tr/mn}$ .

1.2. On désire connaître la somme  $p_c = p_m + p_f$  des pertes mécaniques  $p_m$  et des pertes dans le fer  $p_f$  dans les conditions de la question 1.1.1. Pour cela, on fait fonctionner la machine en moteur à excitation séparée à vide (cf. figure 6).

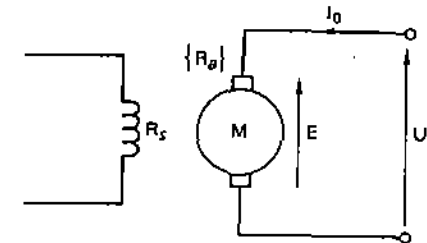


Fig. 4.6. - Fonctionnement de la machine en moteur à excitation séparée à vide.

Signalons que la méthode utilisée pour déterminer  $p_c$  est appelée «méthode des pertes séparées» ou «de Swinburne».

1.2.1. La tension d'alimentation  $U_0$  s'écrit :

$$U_0 = E + R_a I_0 \quad (2)$$

Pour les conditions imposées, on a (cf. question 1.1.1) :

$$E = 363,84 \text{ V} \quad I_{s0} = 22,6 \text{ A} \quad \text{et} \quad N_1 = 1086 \text{ tr/mn.}$$

Par suite (cf. formule (2)) :

$$U_0 = 366 \text{ V}$$

D'après la méthode de Swinburne :

$$p_c = p_f + p_m = E I_0$$

Les pertes  $p_c$  sont habituellement nommées « pertes constantes ».

A.N. :  $p_c = 800 \text{ W}$ .

1.2.2. Pour déterminer, le moment du couple utile  $T_u$  et le rendement  $\eta$  du moteur, il faut calculer la puissance utile  $P_u$ . Celle-ci s'exprime par la formule :

$$P_u = P_{eu} - p_c \quad (3)$$

où  $P_{eu}$  est la puissance électrique utile ; avec :

$$P_{eu} = E I_s \quad (4)$$

car, pour un moteur série, le courant absorbé par l'induit et le courant d'excitation sont les mêmes.

Compte tenu de la relation (4)

$$P_u = E I_s - p_c$$

D'où le couple utile  $T_u$  :

$$T_u = \frac{P_u}{2 \pi N_1}$$

A.N. :  $P_u = 7422 \text{ W}$  et  $T_u = 65,3 \text{ N.m.}$

• Le rendement  $\eta$  s'écrit :

$$\eta = \frac{P_u}{P_a}$$

où  $P_a = U I_s$  : puissance absorbée.

A.N. :  $P_a = 9040 \text{ W}$  et  $\eta = 82,1 \%$ .

Remarque :

Il est également possible de calculer  $P_u$  à partir de la puissance absorbée. En effet :

$$P_u = P_a - (p_c + p_f)$$

où  $p_f = (R_a + R_s) I_s^2$  : somme des pertes joule dans les enroulements induits et inducteurs.

1.3. Dans cette question, on souhaite déterminer le rendement par une méthode d'opposition. Pour cela, on utilise le montage donné figure 1.

1.3.1. Dans ce qui suit,  $p_{fM}$ ,  $p_{mM}$  et  $p_{cM}$  désignent respectivement les pertes fer, mécaniques et constantes du moteur M et  $p_{fG}$ ,  $p_{mG}$  et  $p_{cG}$ , celles de la génératrice G.

On a :

$$p_{cM} = p_{fM} + p_{mM} \quad (5)$$

et  $p_{cG} = p_{fG} + p_{mG} \quad (6)$

Rappelons que les pertes fer dépendent à la fois de la fréquence de rotation et du flux sous un pôle. Par contre, les pertes mécaniques ne sont fonction que de la fréquence de rotation.

• Comparaison des pertes constantes :

Reprenons la figure 1.

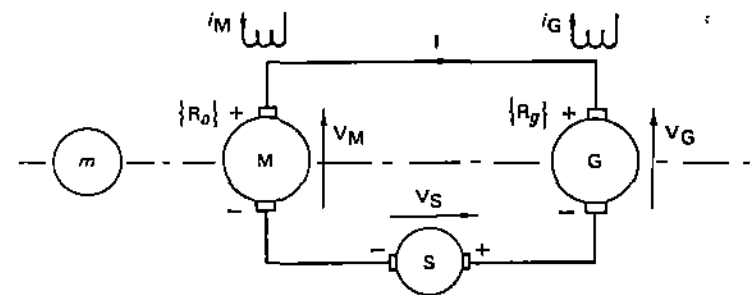


Fig. 4.1bis.

D'après les conditions d'essai, les machines M et G ont les propriétés suivantes :

— elles sont identiques.

- elles tournent à la même vitesse car leurs arbres sont manchonnés.
- elles sont soumises au même flux car leurs courants d'excitation  $i_M$  et  $i_G$  sont égaux.

Pour ces raisons, on conclut que :

$$p_{fM} = p_{fG}$$

et  $p_{mM} = p_{mG}$ .

Ce qui entraîne (cf. relations (5) et (6)) :

$$p_{cM} = p_{cG}$$

Les pertes constantes du moteur M et de la génératrice G sont égales.

- *Comparaison des pertes par effet joule :*

D'après la figure 1.bis, on a :

$$V_S = V_M - V_G \quad (7)$$

En désignant par  $E_M$  la f.c.e.m de M et par  $E_G$  la f.e.m de G, on peut écrire :

$$V_M = E_M + R_a I \quad (\text{convention récepteur pour M})$$

et  $V_G = E_G - R_g I \quad (\text{convention générateur pour G})$

$R_g$  étant la résistance de l'induit de G.

Portons les expressions de  $V_M$  et  $V_G$  dans (7). Il vient :

$$V_S = (E_M - E_G) + (R_a + R_g) I \quad (8)$$

Comme les courants d'excitation  $i_M$  et  $i_G$  sont égaux, on a  $E_M = E_G$ .

Par conséquent :

$$V_S = (R_a + R_g) I$$

D'où la puissance  $P_S$  fournie par S :

$$P_S = V_S I = (R_a + R_g) I^2$$

Ce résultat montre clairement que la puissance fournie par le générateur auxiliaire S représente les pertes dissipées par effet joule dans les induits de M et G.

- *Rôle du moteur auxiliaire m :*

Les machines M et G constituent la charge du moteur m. La puissance mécanique  $P_m$  qu'il fournit représente les pertes constantes  $p_{cM}$  du moteur M et  $p_{cG}$  de la génératrice G ; soit :

$$P_m = p_{cM} + p_{cG}$$

Comme  $p_{cM} = p_{cG}$ , on a :

$$P_m = 2 p_{cM} = 2 p_{cG} \quad (9)$$

- *Calcul du rendement  $\eta_M$  de l'induit du moteur M :*

Le rendement  $\eta_M$  est défini par la formule :

$$\eta_M = \frac{P_{uM}}{P_{aM}}$$

où  $P_{uM}$  et  $P_{aM}$  représentent respectivement les puissances utile et absorbée par l'induit ; avec :

$$P_{aM} = V_M I$$

et  $P_{uM} = P_{aM} - (p_{cM} + p_{fM})$

Sachant que  $p_{cM} = \frac{P_m}{2}$  et  $p_{fM} = R_a I^2$ , on déduit que :

$$\eta_M = \frac{V_M I - \left( \frac{P_m}{2} + R_a I^2 \right)}{V_M I}$$

A.N. :  $\eta_M = 85,16 \%$ .

*Remarques :*

– La méthode d'opposition utilisée pour la mesure du rendement de l'induit est appelée « méthode de Blondel ».

– Pour connaître le rendement  $\eta$  du moteur, il suffit d'ajouter à  $P_{aM}$ , la puissance  $P_e$  fournie au circuit d'excitation ; soit :

$$\eta = \frac{V_M I - \left( \frac{P_m}{2} + R_a I^2 \right)}{V_M I + P_e}$$

où  $P_e = U_e \cdot i_M$  ;  $U_e$  étant la tension aux bornes du circuit inducteur.

## 2. Réglage de la vitesse :

Dans toute cette partie, on considère des régimes de fonctionnement pour lesquels le courant dans l'induit vaut 33,2 A.

### 2.1. En fonctionnement moteur :

$$U = E + (R_a + R_s) I$$

A 1000 tr/mn et pour  $I_s = 33,2$  A on relève  $E = 383$  V (cf. tableau I). Ce qui donne :

$$U = 436,1 \text{ V}$$

• Pour faire tourner le moteur à 1000 tr/mn lorsque la tension d'alimentation ne peut dépasser 400 V, il suffit d'abaisser l'intensité du courant d'excitation  $I_s$ .

En effet, la vitesse est inversement proportionnelle au flux (\*)  $\phi$  sous un pôle. En diminuant  $I_s$ , on réduit la valeur de  $\phi$ . Ce qui entraîne un accroissement de la vitesse.

2.2. On place en parallèle avec l'inducteur une résistance R de  $2,61 \Omega$  (cf. figure 7).

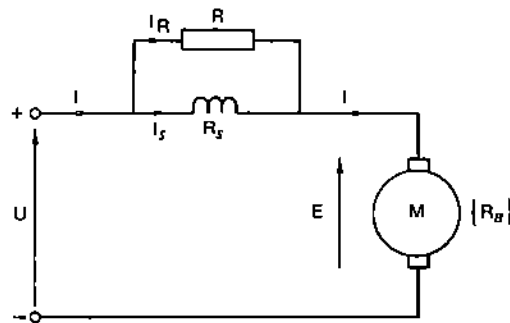


Fig. 4.7. - Le circuit inducteur est en parallèle avec une résistance R.

D'après cette figure, on peut écrire :

$$I = I_s + I_R = 33,2 \text{ A} \quad (10)$$

$$\text{et} \quad R I_R = R_s I_s \quad (11)$$

où  $I_s$  est le courant d'excitation,  $I_R$  le courant traversant la résistance R et I, le courant d'induit.

Soit  $N_3$  la fréquence de rotation demandée. Pour la calculer, il faut rechercher les valeurs de la f.c.e.m E et du courant d'excitation  $I_s$ .

- Calcul de E :

Soit  $R_{eq}$  la résistance équivalente à R en parallèle avec  $R_s$ . On a :

$$E = U - (R_a + R_{eq}) I$$

$$\text{avec} \quad R_{eq} = \frac{R \cdot R_s}{R + R_s}$$

A.N. :  $R_{eq} = 0,4879 \Omega$  et  $E = 350,6$  V.

- Calcul de  $I_s$  :

Les relations (10) et (11) forment un système de deux équations à deux inconnues :  $I_s$  et  $I_R$ . Sa résolution donne :

$$I_s = 27 \text{ A} \text{ et } I_R = 6,2 \text{ A.}$$

Pour le même courant d'excitation ( $I_s = 27$  A), on relève :

•  $E = 357$  V lorsque le moteur tourne à la vitesse  $N_n = 1000$  tr/mn (cf. tableau I).

•  $E = 350,6$  V lorsque le moteur tourne à la vitesse  $N_3$ .

Sachant qu'à courant d'excitation constant (27 A dans ce cas), la f.c.e.m est proportionnelle à la fréquence de rotation, on déduit :

$$N_3 = N_n \cdot \frac{350,6}{357}$$

A.N. :  $N_3 = 982$  tr/mn.

### 2.3. Reprenons le schéma de la figure 2.

- Le hacheur H, les diodes D et  $D_s$  et le thyristor Th sont supposés parfaits.

- Les courants I et  $I_s$  sont considérés comme continus car les inductances L et  $L_s$  ont des valeurs élevées.

D'après la figure 2-bis, on peut écrire :

- au nœud A :

$$i_H = I + i_D \quad (12)$$

- au nœud B :

$$I = I_s + i + j \quad (13)$$

- au nœud C :

$$i_D + i_{D_s} = I_s + j \quad (14)$$

(\*) voir le cours de physique appliquée.



- On prend  $t_1 = 0$ . Ceci veut dire que Th est amorcé en même temps que H. Comme  $D_s$  est passante dès que H est fermé, le schéma de la figure 2bis est équivalent à celui donné figure 8.

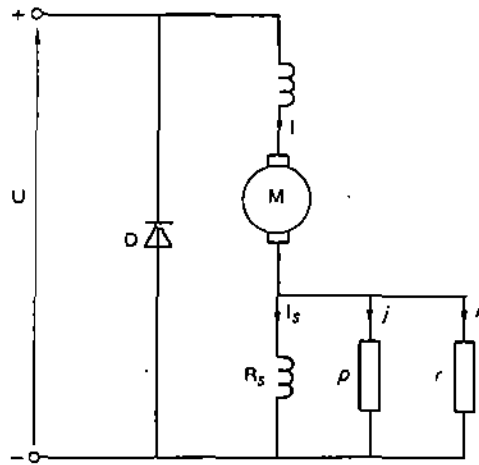


Fig. 4.8. - Schéma équivalent du montage de la figure 2 lorsqu'on prend  $t_1 = 0$ .

A partir de la figure 8, on peut écrire :

$$I = I_s + j + i$$

$$R_s I_s = \rho j$$

et  $\rho j = r i$

avec  $I = 33,2 \text{ A}$   $\rho = 5,4 \Omega$   $r = 0,3 \Omega$  et  $R_s = 0,6 \Omega$ .

Les identités précédentes forment un système de trois équations à trois inconnues :  $I_s$ ,  $i$  et  $j$ . Sa résolution donne :

$$I_s = 10,67 \text{ A} \quad i = 21,34 \text{ A} \quad \text{et} \quad j = 1,19 \text{ A}$$

2.3.2.b. Rappelons que le temps d'ouverture ( $T - \alpha T$ ) de H est faible devant T.

- D'après la formule (17) :

$$i + j = I - I_s$$

$I$  et  $I_s$  étant fixés, on peut dire que la somme  $(i + j)$  est constante.

A.N. :  $(i + j) = 6,2 \text{ A}$ .

- On sait que :

– Pour  $t < t_1$ , Th est bloqué. Dans ce cas :

$$i = 0 \quad \text{et} \quad j = 6,2 \text{ A}$$

– Pour  $t_1 \leq t < T$ , Th est passant (voir remarque ci-dessous). Dans ce cas :

$$i + j = 6,2 \text{ A}$$

et  $\rho j = r i$

A.N. :  $j = 0,326 \text{ A}$  et  $i = 5,874 \text{ A}$ .

Les courbes représentatives de  $i$  et  $j$  sont données figure 9.

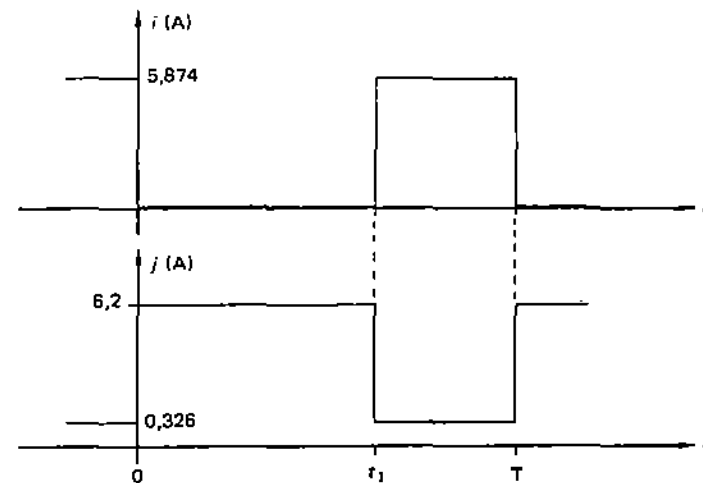


Fig. 4.9. - Courbes  $i(t)$  et  $j(t)$ .

**Remarque importante :**

En principe, Th se bloque spontanément à  $t = \alpha T$  (cf. question 2.3.1). Comme le temps d'ouverture de H est faible devant T, on peut considérer que Th conduit depuis  $t = t_1$  jusqu'à  $t = T$ .

- Désignons par  $u_s$ , la tension aux bornes de l'inducteur et par  $\bar{U}_s$ , sa valeur moyenne.

On a :

$$u_s = R_s I_s$$

La tension  $u_s$  est continue car le courant  $I_s$  est constant. De ce fait :

$$u_s = \bar{U}_s = R_s I_s$$

A.N. :  $\bar{U}_s = 16,2 \text{ V}$ .

- D'après la figure 2-bis :

$$\rho j = u_s$$

soit en passant aux valeurs moyennes

$$\rho \bar{J} = \bar{U}_s$$

Ce qui donne

$$\bar{J} = \frac{\bar{U}_s}{\rho}$$

$\bar{J}$  étant la valeur moyenne de  $j$ .

A.N. :  $\bar{J} = 3 \text{ A}$ .

- Pour calculer le rapport  $\frac{t_1}{T}$ , recherchons l'expression de  $\bar{J}$ . Par définition :

$$\bar{J} = \frac{1}{T} \int_0^T j(t) dt \quad (20)$$

On sait que :

$$j = 6,2 \text{ A} \quad \text{pour } t < t_1 \quad (21)$$

et  $j = 0,326 \text{ A} \quad \text{pour } t_1 \leq t < T \quad (22)$

En tenant compte de ces résultats, (20) s'écrit :

$$\bar{J} = \frac{1}{T} \left\{ \int_0^{t_1} 6,2 dt + \int_{t_1}^T 0,326 dt \right\}$$

Le calcul de cette intégrale donne :

$$\bar{J} = 5,874 \frac{t_1}{T} + 0,326$$

Comme  $\bar{J} = 3 \text{ A}$ , il vient :

$$5,874 \frac{t_1}{T} + 0,326 = 3$$

$$A.N. : \frac{t_1}{T} = 0,455$$

- La puissance  $P_p$  dissipée dans  $p$  est :

$$P_p = \rho J_{\text{eff}}^2 \quad (23)$$

où  $J_{\text{eff}}$  est la valeur efficace du courant  $j$ .

Par définition :

$$J_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T j^2(t) dt \quad (24)$$

Soit en tenant compte de (21) et (22),

$$J_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \left\{ \int_0^{t_1} (6,2)^2 dt + \int_{t_1}^T (0,326)^2 dt \right\}$$

Le calcul de cette intégrale donne :

$$J_{\text{eff}}^2 = 38,44 \frac{t_1}{T} + \left(1 - \frac{t_1}{T}\right) 0,1063$$

Sachant que  $\frac{t_1}{T} = 0,455$ , on obtient :

$$J_{\text{eff}}^2 = 17,548 \text{ A}^2$$

Portons ce résultat dans (23). Il vient :

$$P_p = 94,76 \text{ W}$$

### 3. Etude des procédés de freinage :

3.1. Rappelons que la f.c.e.m  $E$  s'écrit :

$$E = \frac{p}{a} n N \phi \quad (25)$$

avec  $2a$  = nombre de voies d'enroulement

$2p$  = nombre de pôles

$n$  = nombre de conducteurs actifs

$N$  = vitesse (ou fréquence) de rotation

$\phi$  = flux sous un pôle.

La relation précédente peut également s'écrire :

$$E = \frac{p}{2\pi a} n \phi \Omega$$

car  $\Omega = 2\pi N$ .

D'où l'expression de A :

$$A = \frac{E}{\Omega} = \frac{p}{2\pi a} n \phi$$

Le rapport  $A = \frac{E}{\Omega}$  est constant. En effet, les paramètres  $p$ ,  $a$  et  $n$  sont fixés par construction et la valeur du flux est invariable (\*).

- Le couple électromagnétique  $T_e$  s'exprime par la formule :

$$T_e = \frac{E I}{\Omega}$$

soit en remplaçant E par  $A \Omega$  :

$$T_e = A I \quad (26)$$

3.2. A l'instant origine, on charge la génératrice par une résistance R.

3.2.1. Soit J le moment d'inertie de la partie tournante ramené à l'arbre moteur. Le théorème fondamental de la dynamique appliqué à cet arbre permet d'écrire :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = -T_e - T_r \quad (27)$$

où  $\frac{d\Omega}{dt}$  est l'accélération angulaire.

$T_e$  est précédé du signe - car dans le freinage par récupération le couple moteur qui s'exerce sur l'arbre est négatif.

Substituons  $T_e$  par (26) dans l'équation précédente. Il vient :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = -A I - T_r \quad (28)$$

(\*) La valeur de  $\phi$  est invariable car le courant d'excitation est constant.

La résistance d'induit  $R_a$  étant négligée, on a :

$$U = E = R I$$

Ce qui donne :

$$I = \frac{E}{R} = \frac{A \Omega}{R} \quad (\text{car } E = A \Omega)$$

Portons l'expression de I dans (28). On obtient :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{A^2 \Omega}{R} - T_r$$

ou encore

$$\frac{d\Omega}{dt} + \frac{A^2}{J R} \Omega = -\frac{T_r}{J} \quad (29)$$

C'est l'équation différentielle demandée.

3.2.2. La solution de l'équation précédente s'écrit (voir cours de mathématiques) :

$$\Omega(t) = K e^{-\frac{A^2}{J R} t} - R \frac{T_r}{A^2}$$

soit en posant  $\tau = \frac{J R}{A^2}$  :

$$\Omega(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}} - R \frac{T_r}{A^2} \quad (30)$$

K étant une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

A l'instant  $t = 0$ ,  $\Omega(0) = \Omega_0$ . Par suite

$$\Omega_0 = K - R \frac{T_r}{A^2}$$

Ce qui donne :

$$K = \Omega_0 + R \frac{T_r}{A^2}$$



Portons ce résultat dans (30). On trouve :

$$\Omega(t) = \left( \Omega_0 + R \frac{T_r}{A^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} - R \frac{T_r}{A^2} \quad (31)$$

L'allure de la courbe représentative de  $\Omega(t)$  est donnée figure 10. Signalons qu'avant le freinage (\*), la vitesse était constante et valait  $\Omega_0$ .

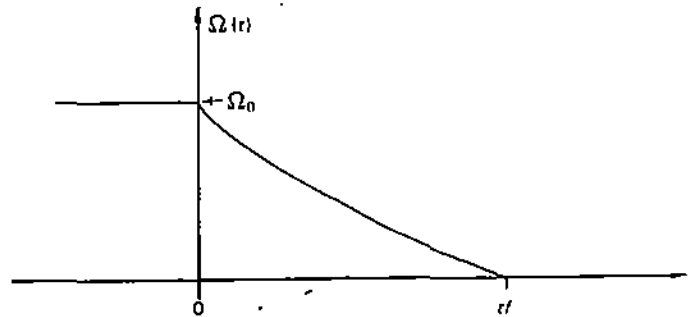


Fig. 4.10. - Allure de la courbe représentative de  $\Omega(t)$ .

3.2.3. La valeur  $\Omega_0 = \frac{100\pi}{3} \text{ rad/s}$  correspond à une fréquence de rotation de 1000 tr/mn. On peut donc utiliser la caractéristique à vide donnée tableau I.

Pour  $I_f = 10,5 \text{ A}$ , on relève  $E = 233 \text{ V}$ .

Rappelons que le rapport  $A = \frac{E}{\Omega}$  est constant (cf. question 3.1). Pour cette raison

$$A = \frac{233}{\frac{100\pi}{3}} = 2,225 \text{ V.s/rad}$$

car pour  $\Omega_0 = \frac{100\pi}{3} \text{ rad/s}$ ,  $E$  vaut 233 V.

• Connaissant  $A$ , on peut calculer  $\tau = \frac{JR}{A^2}$

A.N. :  $\tau = 15,15 \text{ s}$ .

(\*) C'est-à-dire lorsque la machine fonctionnait en moteur ( $t < 0$ ).

Tous les facteurs qui interviennent dans l'expression de  $\Omega(t)$  sont connus. En conséquence :

$$\Omega(t) = 150,17 e^{-\frac{t}{15,15}} - 45,45 \quad (32)$$

• Calcul de la durée de freinage :

Soit  $t_f$  l'instant pour lequel  $\Omega(t)$  est nulle. Pour cet instant, on peut écrire :

$$0 = 150,17 e^{-\frac{t_f}{15,15}} - 45,45$$

La résolution de cette équation donne :

$$t_f = 18,1 \text{ s}$$

La machine s'arrête au bout de 18,1 s.

3.3. Le circuit de charge connecté à la date origine est maintenant celui représenté figure 3.

3.3.1. Pour  $0 < t < \theta$ ,  $H$  est passant. Le schéma donné figure 3 est alors équivalent à celui donné figure 11.

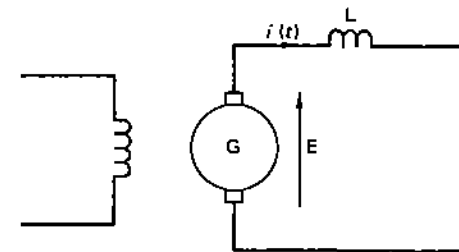


Fig. 4.11. - Schéma équivalent du montage de la figure 3 lorsque  $H$  est passant. La résistance d'induit  $R_B$  est négligée.

D'après cette figure :

$$E = L \frac{di}{dt}$$

La solution de cette équation s'écrit :

$$i(t) = \frac{E}{L} t + K_1$$

$K_1$  étant une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

A l'instant  $t = 0$ ,  $i(0) = I_m$ . Par suite

$$I_m = 0 + K_1$$

Ce qui donne  $K_1 = 0$

D'où :

$$i(t) = \frac{E}{L} t + I_m \quad (33)$$

3.3.2. Pour  $0 < t < T$ , H est bloqué. Dans ce cas, le schéma donné figure 3 est équivalent à celui donné figure 12.

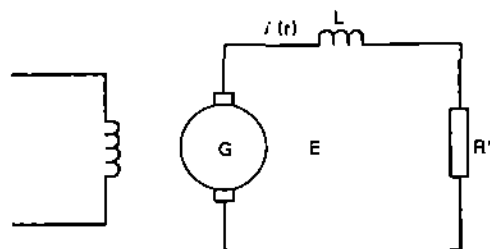


Fig. 4.12. - Schéma équivalent du montage de la figure 3 lorsque H est bloqué.

D'après la figure 12, on a :

$$E = L \frac{di}{dt} + R' i$$

La solution de cette équation s'écrit (voir cours de mathématiques) :

$$i(t) = K_2 e^{-\frac{R'}{L} t} + \frac{E}{R'} \quad (34)$$

$K_2$  étant une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

A l'instant  $t = \theta$ ,  $i(\theta) = I_M$ . Par suite

$$I_M = K_2 e^{-\frac{R'}{L} \theta} + \frac{E}{R'}$$

Ce qui donne :

$$K_2 = \left( I_M - \frac{E}{R'} \right) e^{\frac{R'}{L} \theta}$$

Portons ce résultat dans (34). Il vient :

$$i(t) = \left( I_M - \frac{E}{R'} \right) e^{-\frac{R'}{L} (t-\theta)} + \frac{E}{R'} \quad (35)$$

L'allure de la courbe représentative du courant  $i(t)$  est donnée figure 13.

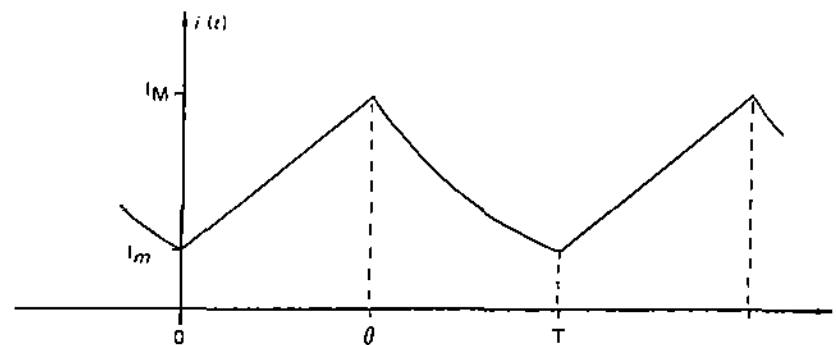


Fig. 4.13. - Allure de la courbe représentative de  $i(t)$ .

3.3.3. Dans cette question, l'ondulation du courant  $\Delta i = I_M - I_m$  est supposée négligeable. Dans ce cas,  $i(t)$  est constant ; soit :

$$i(t) = I$$

avec  $I_m = I_M = I$ .

3.3.3.a. Remarquons que l'énergie électrique  $W_G$  fournie par la génératrice est dissipée sous forme de chaleur par la résistance  $R'$ . Par conséquent :

$$W_G = W_{R'} \quad (36)$$

$W_{R'}$  étant l'énergie perdue par effet joule dans  $R'$ .

Sur une période de fonctionnement :

$$W_G = E.I.T$$

et  $W_{R'} = R' I^2 (T - \theta)$

En effet, la génératrice fournit de l'énergie pendant la totalité de la période et  $R'$  dissipe cette énergie uniquement durant l'intervalle  $(T - \theta)$ .

Compte tenu de l'équation (36), on a :

$$E.I.T = R' I^2 (T - \theta)$$

Ce qui donne :

$$I = \frac{E}{R'} \cdot \frac{T}{(T - \theta)}$$

Soit en remplaçant  $\frac{T}{(T - \theta)}$  par  $\frac{1}{\beta}$  :

$$I = \frac{E}{\beta R'} \quad (37)$$

C'est la relation demandée.

3.3.3.b. Précédemment (cf. question 3.1), on a vu que :

$$E = A \Omega \quad (38)$$

D'après l'énoncé :

$$\beta = a \Omega \quad (39)$$

Portons ces deux résultats dans (37). Il vient :

$$I = \frac{A}{a R'} \quad (40)$$

- Le couple électromagnétique  $T_e$  s'écrit (cf. question 3.1) :

$$T_e = A \cdot I$$

soit en substituant  $I$  par (40) :

$$T_e = \frac{A^2}{a R'} \quad (41)$$

3.3.3.c. Pour obtenir l'équation différentielle demandée, il suffit de remplacer dans (27),  $T_e$  par  $\frac{A^2}{a R'}$ . On obtient :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = - \frac{A^2}{a R'} - T_r \quad (42)$$

La solution de cette équation s'écrit :

$$\Omega(t) = - \left( \frac{A^2}{a R'} + \frac{T_r}{J} \right) t + K_3$$

$K_3$  étant une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

A l'instant  $t = 0$ ,  $\Omega(0) = \Omega_0$ . Par suite,

$$\Omega_0 = 0 + K_3$$

Ce qui donne  $K_3 = \Omega_0$

D'où :

$$\Omega(t) = - \left( \frac{A^2}{a R'} + \frac{T_r}{J} \right) t + \Omega_0 \quad (43)$$

L'allure de la courbe représentative de  $\Omega(t)$  est donnée figure 14. Signalons qu'avant le freinage, la vitesse était constante et valait  $\Omega_0$ .

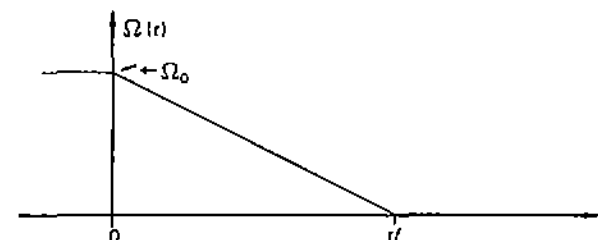


Fig. 4.14. - Allure de la courbe représentative de  $\Omega(t)$ .

3.3.3.d. Remarquons que les valeurs numériques de  $I_s$  et  $\Omega_0$  sont identiques à celles données question 3.2.3. Dans ce cas :

$$A = 2,225 \text{ V.s/rd.}$$

Tous les facteurs intervenant dans l'expression de  $\Omega(t)$  sont connues. En conséquence (cf. relation (43)) :

$$\Omega(t) = -9,188 t + \frac{100 \pi}{3} \quad (44)$$

- Calcul de la durée de freinage :

Soit  $t_f$  l'instant pour lequel  $\Omega(t)$  est nulle. Pour cet instant, on peut écrire :

$$0 = -9,188 t_f + \frac{100 \pi}{3}$$

La résolution de cette équation donne :

$$t_f = 11,4 \text{ s}$$

La machine s'arrête au bout de 11,4 s.

## Transistor en commutation

Nous nous proposons d'étudier la commutation d'un transistor de puissance seul, puis avec un circuit d'aide à la commutation.

Le schéma du montage étudié est représenté figure 1 où  $T_r$  fonctionne en commutation.

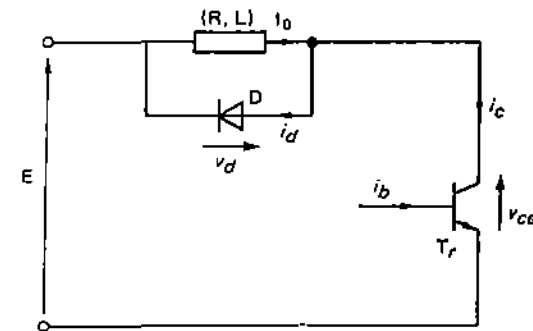


Fig. 5.1.

Nous supposons que la constante de temps  $\tau = \frac{L}{R}$  est grande devant les temps de commutation du transistor, de sorte que la charge se comporte comme une source de courant d'intensité constante  $I_0$  pendant les commutations.

La diode D est parfaite, c'est-à-dire :

$$v_d = 0 \quad \text{quand} \quad i_d \geq 0$$

$$v_d < 0 \quad \text{quand} \quad i_d = 0$$

Le comportement du transistor aux moments des commutations est caractérisé par les graphes de la figure 2. La croissance de  $i_c$  est supposée linéaire ainsi que la décroissance.

## 1. Etude de la commutation sans circuit d'aide à la commutation :

### 1.1. Mise en condition de $T_r$ :

1.1.1. Le courant  $i_c$  commence à croître à l'instant  $t = 0$  conformément au graphe de la figure 2.

Préciser les valeurs initiales de  $i_d$  et  $v_{ce}$ .

Quelle est l'évolution du courant  $i_d$  ? Tracer les graphes de  $i_d(t)$  et  $i_c(t)$ .

Que vaut  $v_{ce}$  pendant que D conduit ? A quel instant D se bloque-t-elle ? En déduire le graphe  $v_{ce}(t)$ .

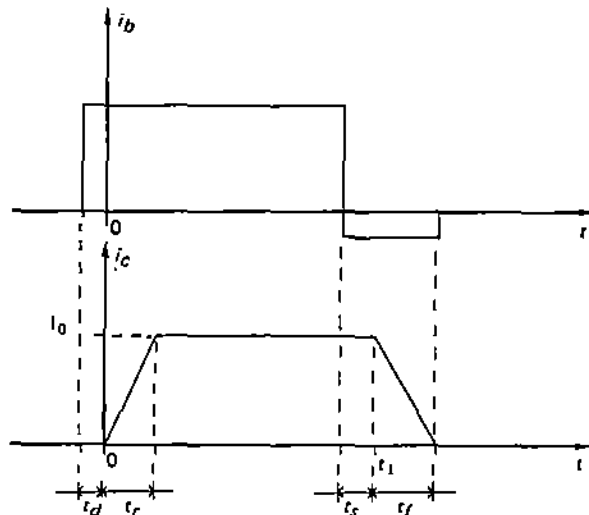


Fig. 5.2.

1.1.2. Donner l'expression de  $i_c(t)$ , pendant la commutation. En déduire l'expression  $W_1$  de l'énergie perdue dans  $T_r$  au moment de la mise en conduction.

1.1.3. Le fonctionnement de  $T_r$  étant périodique, de fréquence  $f$ , établir l'expression puis calculer la puissance  $P_1$  dissipée dans  $T_r$  aux moments des mises en conduction. On donne :

$$E = 220 \text{ V} ; f = 10 \text{ kHz} ; t_r = 0,2 \mu\text{s} \text{ et } I_0 = 5 \text{ A.}$$

1.1.4. Indiquer clairement dans le plan  $(i_c, v_{ce})$ , le déplacement du point de fonctionnement de  $T_r$  pendant la commutation.

Quel risque présente ce déplacement pour  $T_r$  ?

### 1.2. Blocage de $T_r$ :

1.2.1. Le courant  $i_c$  commence à décroître à l'instant  $t = t_1$ , que l'on prendra comme nouvelle origine des temps, conformément au graphe de la figure 2. On posera  $t' = t - t_1$ .

Quelles sont les évolutions de  $i_d$  et  $v_{ce}$  ?

Représenter les graphes de  $i_c(t')$ ,  $i_d(t')$  et  $v_{ce}(t')$ .

1.2.2. Donner l'expression de  $i_c(t')$  pendant la commutation. En déduire l'expression de l'énergie  $W_2$  perdue dans  $T_r$  au moment du blocage.

1.2.3. Le fonctionnement de  $T_r$  étant périodique de fréquence  $f$ , établir l'expression puis calculer la puissance  $P_2$  dissipée dans  $T_r$  aux moments des blocages. On donne :

$$E = 220 \text{ V} ; f = 10 \text{ kHz} ; t_f = 0,5 \mu\text{s} \text{ et } I_0 = 5 \text{ A.}$$

1.2.4. Indiquer le déplacement du point de fonctionnement de  $T_r$  dans le plan  $(i_c, v_{ce})$ .

## 2. Etude de la commutation avec circuit d'aide à la commutation :

Le circuit d'aide à la commutation complet est représenté figure 3. On étudiera séparément les rôles de  $\lambda$  et de  $C$  (cf. figures 4 et 5).

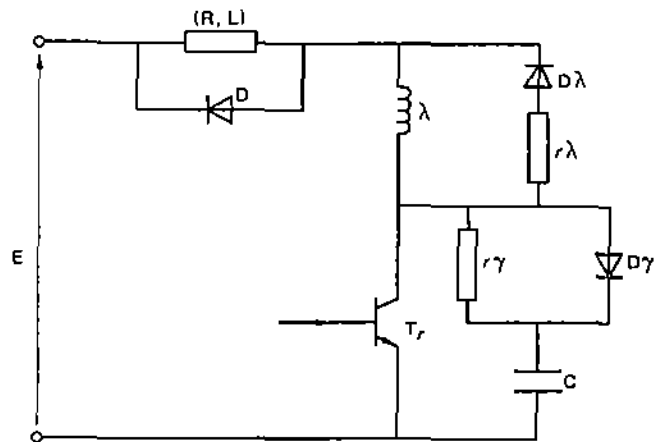


Fig. 5.3.

### 2.1. Mise en conduction de $T_r$ :

Pour limiter la vitesse de croissance du courant  $i_c$ , on place en série avec  $T_r$  une inductance  $\lambda$  (cf. figure 4). C'est elle qui alors impose les variations de  $i_c$  et on admet que, dès que  $i_c \neq 0$ , la tension  $v_{ce}$  s'annule.

2.1.1. Le courant  $i_c$  commence à croître à l'instant  $t = 0$ . Écrire l'équation liant  $i_c$ ,  $v_{ce}$ ,  $\lambda$  et  $E$ .

2.1.2. En déduire l'expression  $i_c(t)$  pour  $t > 0$ .

Représenter les graphes de  $i_c(t)$ ,  $v_{ce}(t)$  et  $i_d(t)$ .

2.1.3. Quelle est l'énergie  $W_1$  perdue dans  $T_r$  au moment de la mise en conduction ?

2.1.4. Quel est le déplacement du point de fonctionnement de  $T_r$  dans le plan  $(i_c, v_{ce})$  ?

### 2.2. Blocage de $T_r$ :

Pour retarder la croissance de la tension  $v_{ce}$ , on place un condensateur de capacité  $C$  entre le collecteur et l'émetteur de  $T_r$  (cf. figure 5).

On suppose le condensateur  $C$  initialement déchargé.

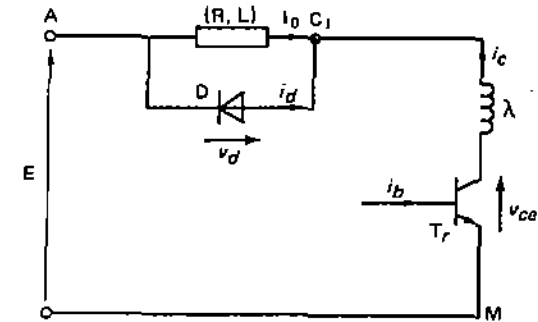


Fig. 5.4.

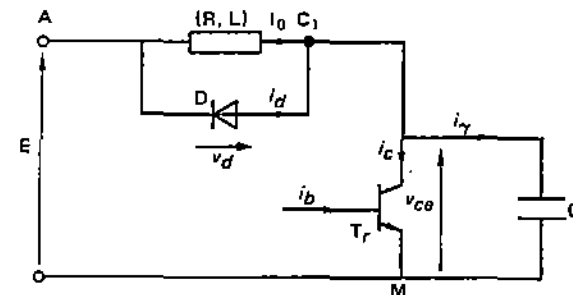


Fig. 5.5.

2.2.1. Le courant  $i_c$  commence à décroître, à un instant  $t_1$  que l'on prendra comme nouvelle origine des temps, conformément au graphe de la figure 2. On posera  $t' = t - t_1$ .

Quel est l'état de la diode  $D$  à  $t' = 0$  ? En déduire la relation liant  $i_c$ ,  $i_\gamma$  et  $I_0$ .

2.2.2. Rappeler l'expression de  $i_c$ , en fonction du temps  $t'$  (voir question 1.2.2). En déduire celles de  $i_\gamma$  et  $v_{ce}$  en fonction de  $t'$ .

2.2.3. Représenter pour  $t' \leq t_f$  les graphes de  $i_c(t')$ ,  $i_\gamma(t')$ ,  $v_{ce}(t')$  et donner les valeurs des différentes grandeurs pour  $t' = t_f$ . On donne :

$$C = 100 \text{ nF} ; t_f = 0,5 \mu\text{s} \text{ et } I_0 = 5 \text{ A.}$$

2.2.4. Que vaut  $i_\gamma$  pour  $t' > t_f$  ? En déduire l'expression de  $v_{ce}$  en fonction de  $t'$  pour  $t' > t_f$ .

Pour quelle valeur de  $v_{ce}$ , la diode D devient-elle passante ?

Compléter les graphes de  $i_c(t')$ ,  $i_d(t')$  et  $v_{ce}(t')$  pour  $t' > t_f$ .

Représenter  $i_d(t')$ .

2.2.5. Le fonctionnement de  $T_r$  étant périodique de fréquence  $f$ , déterminer l'expression puis calculer la puissance  $P_2$  dissipée dans  $T_r$  aux moments des blocages. On donne :

$$C = 100 \text{ nF} ; t_f = 0,5 \mu\text{s} ; f = 10 \text{ kHz} \text{ et } I_0 = 5 \text{ A.}$$

2.2.6. Représenter approximativement le déplacement du point de fonctionnement de  $T_r$ , pendant le blocage, dans le plan  $(i_c, v_{ce})$ .

(B.T.S. Electrotechnique, 1985)

### Solution et commentaires

Dans tout le problème, la constante de temps  $\tau = \frac{L}{R}$  est supposée grande devant les temps de commutation du transistor  $T_r$ . Pour cette raison, on admettra que la charge se comporte comme une source de courant d'intensité constante  $I_0$  lors des changements d'état.

#### 1. Etude de la commutation sans circuit d'aide à la commutation :

##### 1.1. Mise en conduction de $T_r$ :

1.1.1. Reprenons le schéma de la figure 1.

D'après la figure 1 bis, on peut écrire :

— au nœud  $C_1$  :

$$I_0 = i_c + i_d \quad (1)$$

où  $i_c$  représente le courant collecteur du transistor  $T_r$  et  $i_d$ , celui traversant la diode D.

— le long de la maille (A,  $C_1$ , M, A) :

$$E = -v_d + v_{ce} \quad (2)$$

où  $v_{ce}$  est la tension collecteur-émetteur de  $T_r$  et  $v_d$ , celle aux bornes de D.

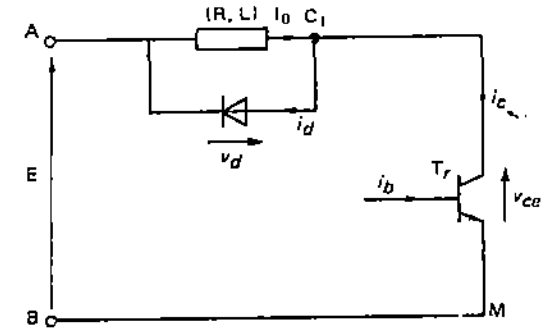


Fig. 5.1bis.

- La relation (1) montre clairement que la somme  $(i_c + i_d)$  est constante quel que soit  $t$ . Par conséquent, la valeur initiale  $i_d(0)$  de  $i_d$  est :

$$i_d(0) = I_0$$

car d'après la figure 2, la valeur initiale  $i_c(0)$  de  $i_c$  est nulle.

La diode est donc passante. Par suite, la valeur initiale  $v_d(0)$  de  $v_d$  est :

$$v_d(0) = 0$$

Portons ce résultat dans (2). Il vient :

$$v_{ce}(0) = E$$

La valeur initiale  $v_{ce}(0)$  vaut E.

- On sait que  $i_c$  croît linéairement. Comme la somme  $(i_c + i_d)$  est constante (cf. relation (1)), on déduit que  $i_d$  décroît linéairement. Dès que  $i_c$  vaut  $I_0$ ,  $i_d$  s'annule.

Les courbes représentatives de  $i_c(t)$  et  $i_d(t)$  sont données figure 6.

- Tant que  $i_d > 0$  ( $0 \leq t < t_r$ ), D conduit. Par suite

$$v_d = 0$$

et (cf. formule (2)) :

$$v_{ce} = E$$

La diode se bloque à  $t = t_r$  car c'est à cet instant que  $i_d$  devient nul. Ce qui entraîne  $i_c(t_r) = I_0$  : le transistor devient passant et

$$v_{ce} = 0$$

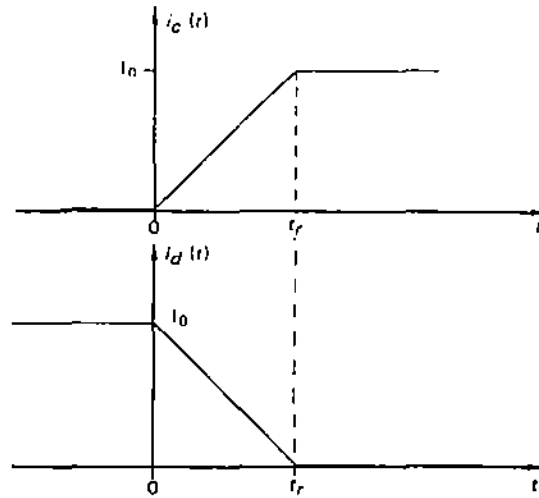


Fig. 5.6. - Courbes  $i_c(t)$  et  $i_d(t)$ .

Le graphe de  $v_{ce}(t)$  est donné figure 7.

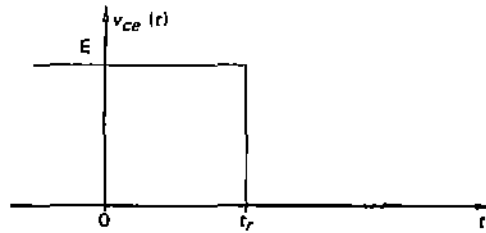


Fig. 5.7. - Courbe  $v_{ce}(t)$ .

1.1.2. Rappelons que  $i_c$  croît linéairement lors de la commutation. Son expression est donc de la forme :

$$i_c(t) = a \cdot t + b \quad (3)$$

D'après la figure 2,  $i_c(0) = 0$  et  $i_c(t_r) = I_0$ .

En substituant dans l'équation (3),  $t$  par respectivement 0 et  $t_r$ , on obtient :

$$a = \frac{I_0}{t_r} \text{ et } b = 0$$

$$\text{D'où } i_c(t) = \frac{I_0}{t_r} t \quad (4)$$

• La variation de l'énergie  $dW_1$  dissipée dans le transistor  $T_r$  pendant l'intervalle  $dt$  est :

$$dW_1 = v_{ce}(t) \cdot i_c(t) dt \quad (5)$$

D'où l'énergie  $W_1$  perdue dans  $T_r$  au moment de la mise en conduction (c'est-à-dire pour  $0 \leq t < t_r$ ) :

$$W_1 = \int_0^{t_r} v_{ce}(t) i_c(t) dt$$

Or pour  $0 \leq t < t_r$  :

$$v_{ce}(t) = E \quad (\text{cf. figure 7}) \quad (6)$$

$$\text{et } i_c(t) = \frac{I_0}{t_r} t \quad (\text{cf. relation (4)})$$

Par suite :

$$W_1 = \int_0^{t_r} E \cdot \frac{I_0}{t_r} t dt$$

$$\text{Soit } W_1 = \frac{1}{2} E I_0 t_r$$

1.1.3. La puissance instantanée  $p_1$  dissipée dans  $T_r$  s'écrit :

$$p_1 = \frac{dW_1}{dt} = v_{ce}(t) i_c(t)$$

D'où la puissance moyenne  $P_1$  dissipée dans  $T_r$  aux moments des mises en conduction :

$$P_1 = \frac{1}{T} \int_0^{t_r} v_{ce}(t) i_c(t) dt$$

En tenant compte des relations (4) et (6), le calcul de cette intégrale donne :

$$P_1 = \frac{E I_0 t_r}{2 T}$$

$$\text{A.N. : } P_1 = 1,1 \text{ W.}$$



1.1.4. Pendant la mise en conduction,  $i_c$  varie linéairement de 0 à  $I_0$  et  $v_{ce}$  reste égale à E (cf. figures 6 et 7). Dès que  $T_r$  devient passant (à  $t = t_r$ ),  $v_{ce}$  s'annule brusquement et  $i_c$  garde la valeur  $I_0$ .

Le déplacement du point de fonctionnement de  $T_r$  dans le plan ( $v_{ce}$ ,  $i_c$ ) est schématisé figure 8.

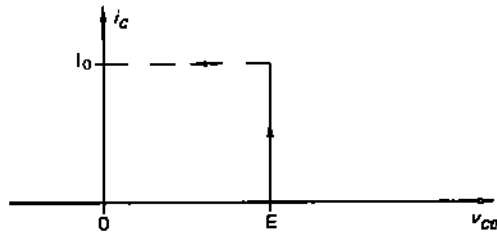


Fig. 5.8. - Déplacement du point de fonctionnement de  $T_r$ .

• Rappelons que dans le plan ( $v_{ce}$ ,  $i_c$ ), le fonctionnement d'un transistor donné est caractérisé par trois régions (cf. figure 9) :

- une région de sécurité (1)
- une hyperbole de dissipation maximale (2) précisée par le constructeur
- une zone de destruction du transistor (3).

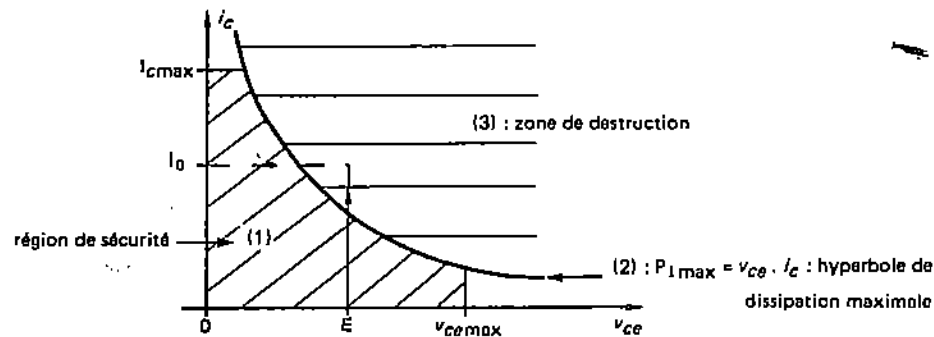


Fig. 5.9. - Zones de fonctionnement d'un transistor donné.

La figure 9 montre clairement que le point de fonctionnement risque de sortir de l'aire de sécurité au cours de la commutation.

**Remarque :**

Considérons le réseau de caractéristiques d'un transistor donné (cf. figure 10).

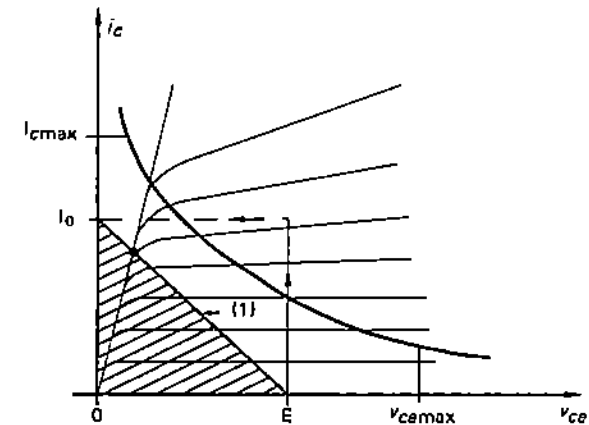


Fig. 5.10. - Réseau de caractéristiques d'un transistor donné.  
(1) : Droite de charge.

Pour éviter tout risque, il est préférable que le point de fonctionnement du transistor ne quitte jamais l'aire délimitée par la droite de charge (zone hachurée : cf. figure 10).

## 1.2. Blocage de $T_r$ :

1.2.1. Rappelons que la somme ( $i_c + i_d$ ) est constante (cf. relation (1)). Comme  $i_c$  est décroissant, on déduit que  $i_d$  est croissant.

Posons  $t' = t - t_1$ . A l'instant  $t' = 0^+$ , le courant  $i_d$  devient positif : la diode devient passante et  $v_d = 0$ . Par suite (cf. formule (2))

$$v_{ce} = E$$

• Les courbes représentatives de  $i_c(t')$ ,  $i_d(t')$  et  $v_{ce}(t')$  sont données figure 11.

1.2.2. Pendant la commutation,  $i_c(t')$  décroît linéairement. Son expression est donc de la forme :

$$i_c(t') = a t' + b \quad (7)$$

D'après la figure 11,  $i_c(t' = 0) = I_0$  et  $i_c(t' = t_f) = 0$ .

En substituant dans (7),  $t'$  par respectivement 0 et  $t_f$ , il vient :

$$I_0 = b$$

$$\text{et} \quad 0 = a t_f + b$$

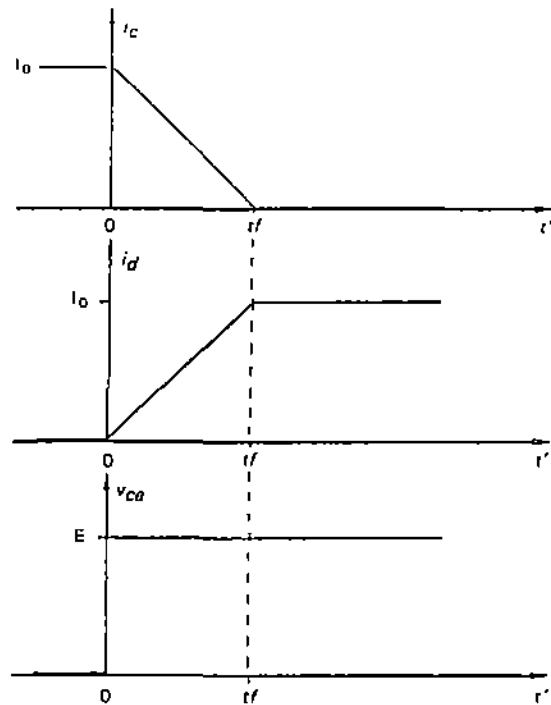


Fig. 5.11. - Courbes  $i_c(t')$ ,  $i_d(t')$  et  $v_{ce}(t')$  ; avec  $t' = t - t_1$ .

Ce qui donne  $a_0 = -\frac{I_0}{t_f}$  et  $b = I_0$ .

D'où  $i_c(t') = -\frac{I_0}{t_f} t' + I_0$  (8)

• La variation de l'énergie  $dW_2$  dissipée dans  $T_r$  pendant l'intervalle  $dt'$  est :

$$dW_2 = v_{ce}(t') i_c(t') dt'$$

D'où l'énergie  $W_2$  perdue dans  $T_r$  au moment du blocage (c'est-à-dire pour  $0 \leq t' < t_f$ ) :

$$W_2 = \int_0^{t_f} v_{ce}(t') i_c(t') dt'$$

Or pour  $0 \leq t' < t_f$  :

$$v_{ce}(t') = E \quad (\text{cf. figure 11}) \quad (9)$$

et  $i_c(t') = -\frac{I_0}{t_f} t' + I_0$  (cf. relation (8))

Par suite :

$$W_2 = \int_0^{t_f} E \left( -\frac{I_0}{t_f} t' + I_0 \right) dt'$$

Soit  $W_2 = E I_0 \frac{t_f}{2}$

1.2.3. La puissance instantanée  $p_2$  dissipée dans  $T_r$  s'écrit :

$$p_2 = \frac{dW_2}{dt'} = v_{ce}(t') i_c(t') \quad (10)$$

D'où la puissance moyenne  $P_2$  dissipée dans  $T_r$  aux moments des blocages :

$$P_2 = \frac{1}{T} \int_0^{t_f} v_{ce}(t') i_c(t') dt'$$

En tenant compte des formules (8) et (9), le calcul de cette intégrale donne :

$$P_2 = \frac{E I_0}{2T} t_f$$

A.N. :  $P_2 = 2,75 \text{ W}$ .

1.2.4. A l'instant  $t' = 0^+$ ,  $v_{ce}$  prend instantanément la valeur  $E$ . Pendant la durée du blocage,  $i_c$  décroît linéairement passant de  $I_0$  à 0 tandis que  $v_{ce}$  reste égale à  $E$  (cf. figure 11).

Dès que  $i_c$  s'annule (à  $t' = t_f$ ), le transistor se bloque et la valeur de  $v_{ce}$  reste inchangée.

Le déplacement du point de fonctionnement de  $T_r$  dans le plan  $(v_{ce}, i_c)$  est schématisé figure 12.

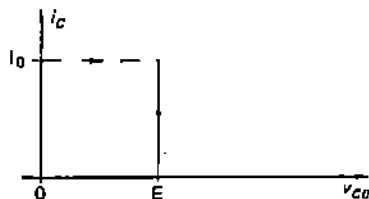


Fig. 5.12. - Déplacement du point de fonctionnement de  $T_r$ .

## 2. Etude de la commutation avec circuit d'aide à la commutation :

### 2.1. Mise en conduction de $T_r$ :

2.1.1. D'après la figure 4, on peut écrire :

— au nœud  $C_1$  :

$$i_c + i_d = I_0 \quad (11)$$

— le long de la maille (A,  $C_1$ , M, A) :

$$v_d + \lambda \frac{di_c}{dt} + v_{ce} = E \quad (12)$$

A l'instant  $t = 0$ ,  $i_c$  commence à croître ; ce qui entraîne la décroissance de  $i_d$ .

Les valeurs initiales  $i_c(0)$  et  $i_d(0)$  sont telles que :

$$i_c(0) = 0 \quad \text{et} \quad i_d(0) = I_0$$

$i_d$  étant positif, la diode conduit. En conséquence :

$$v_d = 0$$

Portons ce résultat dans (12). Il vient :

$$\lambda \frac{di_c}{dt} + v_{ce} = E \quad (13)$$

C'est l'équation différentielle demandée.

2.1.2. Pour  $t > 0$ ,  $i_c$  devient positif :  $v_{ce}$  s'annule (\*) et l'équation (13) s'écrit :

$$\lambda \frac{di_c}{dt} = E$$

(\*) Car on admet que dès que  $i_c \neq 0$ ,  $v_{ce}$  s'annule (voir énoncé).

Sa solution est :

$$i_c(t) = \frac{E}{\lambda} t + K_1 \quad (14)$$

où  $K_1$  est une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

A l'instant  $t = 0$ ,  $i_c(0) = 0$ . Par suite

$$K_1 = 0$$

$$\text{D'où} \quad i_c(t) = \frac{E}{\lambda} t \quad (15)$$

Le courant  $i_c$  va croître. Lorsqu'il prend la valeur  $I_0$ , il cessera de croître.

- Rappelons que la valeur initiale de  $i_d$  est  $I_0$ . Pour  $t > 0$ ,  $i_d$  décroît et sera nul dès que  $i_c = I_0$  car la somme ( $i_c + i_d$ ) est constante.
- Tant que  $i_c$  est nul,  $v_{ce}$  vaut  $E$ . Dès que  $i_c$  est positif,  $v_{ce}$  s'annule (\*).
- Les courbes représentatives de  $i_c(t)$ ,  $v_{ce}(t)$  et  $i_d(t)$  sont données figure 13.

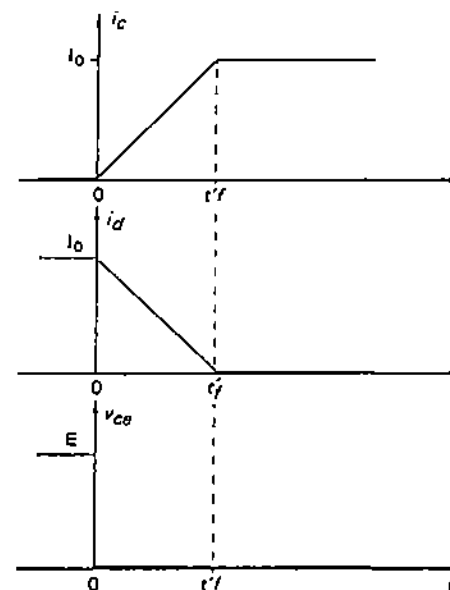


Fig. 5.13. - Courbes  $i_c(t)$ ,  $i_d(t)$  et  $v_{ce}(t)$

(\*) Car on admet que dès que  $i_c \neq 0$ ,  $v_{ce}$  s'annule (voir énoncé).

Remarque :

Recherchons l'instant  $t'_f$  pour lequel  $i_c$  vaut  $I_0$ . Cet instant est tel que (cf. relation (15)) :

$$I_0 = \frac{E}{\lambda} t'_f$$

$$\text{soit } t'_f = I_0 \cdot \frac{\lambda}{E}$$

2.1.3. L'énergie  $W'_1$  perdue dans  $T_r$  au moment de la mise en conduction est nulle. En effet, lorsque  $v_{ce}$  vaut  $E$ ,  $i_c$  est nul et lorsque  $i_c \neq 0$ , c'est  $v_{ce}$  qui est nulle.

2.1.4. Pendant la mise en conduction,  $i_c$  varie linéairement de 0 à  $I_0$ . Initialement égale à  $E$ , la tension  $v_{ce}$  s'annule aussitôt que  $i_c \neq 0$ .

Le déplacement du point de fonctionnement de  $T_r$  dans le plan ( $v_{ce}$ ,  $i_c$ ) est schématisé figure 14.

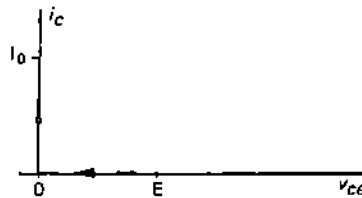


Fig. 5.14. - Déplacement du point de fonctionnement de  $T_r$ .

## 2.2. Blocage de $T_r$ :

2.2.1. D'après la figure 5, on peut écrire :

- au nœud  $C_1$  :

$$I_0 = i_d + i_c + i_\gamma \quad (16)$$

- le long de la maille (A,  $C_1$ , M, A)

$$E = v_d + v_{ce} \quad (17)$$

• A l'instant  $t' = 0$  (avec  $t' = t - t_1$ ),  $i_c$  commence à décroître tandis que  $v_{ce}$  reste nulle car le condensateur  $C$  retarde sa croissance. De ce fait,  $T_r$  est encore passant et  $D$  bloquée. Par suite,  $i_d = 0$  et (16) s'écrit :

$$I_0 = i_c + i_\gamma \quad (18)$$

C'est la relation demandée.

2.2.2. Pour  $0 \leq t' \leq t_f$  :

• l'expression de  $i_c(t')$  est (cf. question 1.2.2) :

$$i_c(t') = -\frac{I_0}{t_f} t' + I_0 \quad (19)$$

avec  $t' = t - t_1$

• la relation (18) donne :

$$i_\gamma(t') = I_0 - i_c(t')$$

soit en remplaçant  $i_c(t')$  par (19) :

$$i_\gamma(t') = \frac{I_0}{t_f} t' \quad (20)$$

• Le courant  $i_\gamma$  peut aussi s'écrire :

$$i_\gamma = C \frac{dv_{ce}}{dt'} \quad (21)$$

car  $v_{ce}$  représente également la tension aux bornes du condensateur  $C$ .

D'où :

$$v_{ce}(t') = \frac{1}{C} \int i_\gamma(t') dt'$$

Substituons  $i_\gamma(t')$  par (20). Il vient :

$$v_{ce}(t') = \frac{1}{C} \int \frac{I_0}{t_f} t' dt'$$

Soit

$$v_{ce}(t') = \frac{I_0}{C \cdot t_f} \cdot \frac{t'^2}{2} + K_2$$

$K_2$  étant une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

A l'instant  $t' = 0$ ,  $v_{ce}(t' = 0) = 0$ . Par suite

$$K_2 = 0$$

$$\text{D'où } v_{ce}(t') = \frac{I_0}{C t_f} \cdot \frac{t'^2}{2} \quad (22)$$

On remarque que pour  $0 \leq t' \leq t_f$ , le graphe de  $v_{ce}(t')$  est un arc de parabole.

2.2.3. Les courbes représentatives de  $i_c(t')$ ,  $i_\gamma(t')$  pour  $t' \leq t_f$  sont données figure 15.

- A l'instant  $t' = t_f$ , on a :

$$i_c(t_f) = 0$$

$$i_\gamma(t_f) = I_0$$

et 
$$v_{ce}(t_f) = \frac{I_0}{2C} t_f$$

Ces résultats sont obtenus en remplaçant  $t'$  par  $t_f$  dans les relations (19), (20) et (22)

A.N. :  $i_c(t_f) = 0$   $i_\gamma(t_f) = 5 \text{ A}$  et  $v_{ce}(t_f) = 12,5 \text{ V}$ .

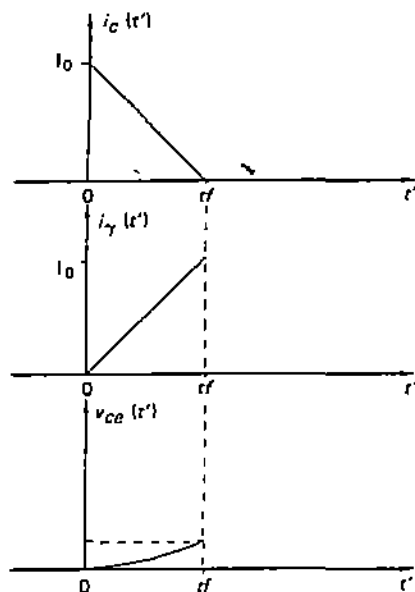


Fig. 5.15. - Courbes  $i_c(t')$ ,  $i_\gamma(t')$  et  $v_{ce}(t')$ .

2.2.4. Lorsque  $t'$  est supérieur à  $t_f$ ,  $T_r$  est bloqué et  $i_c = 0$ . En conséquence (cf. formule (18)) :

$$i_\gamma = I_0$$

et l'équation (21) s'écrit :

$$C \frac{d v_{ce}}{d t'} = I_0$$

Sa solution est :

$$v_{ce}(t') = \frac{I_0}{C} t' + K_3$$

$K_3$  étant une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

A l'instant  $t' = t_f$ ,  $v_{ce}(t_f) = \frac{I_0}{2C} t_f$ . Par suite

$$\frac{I_0}{2C} t_f = \frac{I_0}{C} t_f + K_3$$

Soit 
$$K_3 = -\frac{I_0}{2C} t_f$$

D'où : 
$$v_{ce}(t') = \frac{I_0}{C} t' - \frac{I_0}{2C} t_f$$

Cette expression peut aussi s'écrire :

$$v_{ce}(t') = \frac{I_0}{C} (t' - t_f) + \frac{I_0}{2C} t_f \quad (23)$$

On remarque que pour  $t' > t_f$ , le graphe de  $v_{ce}(t')$  est une droite.

- Rappelons que (cf. formule (19)) :

$$E = v_{ce}(t') + v_d(t')$$

L'équation (23) montre que la tension  $v_{ce}(t')$  croît. D'après la relation précédente, dès que  $v_{ce} = E$ ,  $v_d$  devient nulle ; ce qui rend la diode passante.

C'est donc pour  $v_{ce} = E$  que D devient passante.

- Lorsqu'elle vaut E, la tension  $v_{ce}$  ne varie plus. Par conséquent :

$$i_\gamma(t') = C \frac{d v_{ce}}{d t'} = 0$$

Sachant que  $i_c(t')$  est nul (\*), il vient (cf. relation (18)) :

$$i_d(t') = I_0$$

(\*)  $i_c(t') = 0$  car le transistor est bloqué.

On voit que lorsque D devient passante, le courant  $i_d$  prend instantanément la valeur  $I_0$ .

Les courbes représentatives de  $i_c(t')$ ,  $i_g(t')$ ,  $v_{ce}(t')$  et  $i_d(t')$  sont données figure 16.

2.2.5. La puissance instantanée  $p'_2$  dissipée dans  $T_r$  s'écrit :

$$p'_2 = v_{ce}(t') i_c(t')$$

D'où la puissance moyenne  $P'_2$  dissipée dans  $T_r$  aux moments des blocages :

$$P'_2 = \frac{1}{T} \int_0^{t_f} v_{ce}(t') i_c(t') dt'$$

Substituons  $i_c(t')$  et  $v_{ce}(t')$  par respectivement (19) et (22). Il vient :

$$P'_2 = \frac{1}{T} \int_0^{t_f} \left( \frac{I_0}{C t_f} \cdot \frac{t'^2}{2} \right) \left( -\frac{I_0}{t_f} t' + I_0 \right) dt'$$

Le calcul de cette intégrale donne :

$$P'_2 = \frac{I_0^2 t_f^2}{24 C}$$

A.N. :  $P'_2 = 26 \text{ mW}$ .

Remarque :

En comparant  $P_2$  à  $P'_2$ , on constate que  $P'_2 \ll P_2$ . On conclut que le circuit d'aide à la commutation permet de réduire considérablement la puissance dissipée dans le transistor.

2.2.6. D'après la figure 16, lorsque  $0 \leq t' < t_f$ ,  $i_c(t')$  décroît linéairement et  $v_{ce}(t')$  croît de façon non linéaire.

A l'instant  $t' = t_f$ , on a :

$$i_c(t_f) = 0 \text{ et } v_{ce}(t_f) = \frac{I_0}{2C} \cdot t_f.$$

Pour  $t' > t_f$ ,  $i_c(t')$  reste nul et  $v_{ce}(t')$  continue à croître jusqu'à devenir égale à E ; la croissance étant cette fois linéaire.

Le déplacement du point de fonctionnement de  $T_r$  dans le plan  $(v_{ce}, i_c)$  est schématisé figure 17.

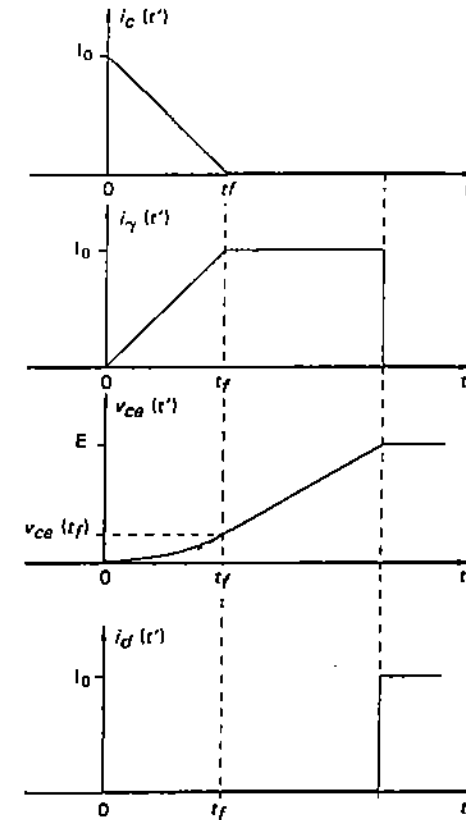


Fig. 5.16. - Courbes  $i_c(t')$ ,  $i_g(t')$ ,  $v_{ce}(t')$  et  $i_d(t')$ .

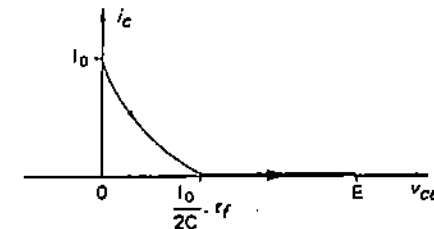


Fig. 5.17. - Déplacement du point de fonctionnement de  $T_r$ .



## Onduleur autonome

On se propose d'étudier un onduleur autonome à transistors dont la charge sera successivement résistive, inductive puis oscillante. Le schéma de principe de cet onduleur est représenté figure 1.

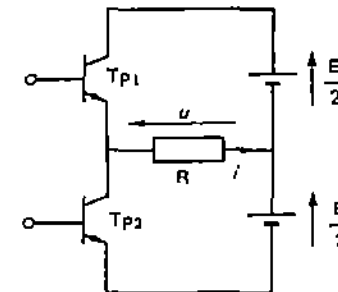


Fig. 6.1. - Schéma de principe de l'onduleur étudié.

Les transistors  $TP_1$  et  $TP_2$  jouent le rôle d'interrupteurs et, par conséquent, travaillent en commutation.

### 1. Etude du circuit de commande :

La première partie de ce circuit est représentée figure 2. Les deux parties conformes aux figures 3 et 4 sont identiques et commandent respectivement les transistors  $TP_1$  et  $TP_2$ .





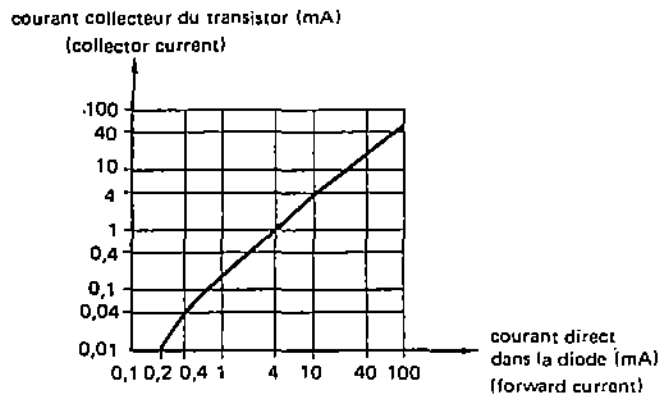


Fig. 6.5. - Caractéristique de l'optocoupleur.  
les échelles sont logarithmiques.

## 2.1. Débit résistif (cf. figure 1)

2.1.1. Représenter, dans ce cas, la tension  $u(t)$ . Calculer  $R$  pour que la valeur absolue maximale du courant  $i$  soit de 1 A. On donne  $E = 50$  V.

2.1.2. Afin de réaliser pratiquement les deux sources  $\frac{E}{2}$ , on utilise une source de valeur  $E$  et deux condensateurs  $C_1$  et  $C_2$ . On considère que les schémas des figures 1 et 6 sont équivalents lorsque  $RC_1 = RC_2 \gg \frac{1}{f}$ .

Montrer que  $i_{c1} = -i_{c2}$ . En déduire la valeur de  $i_a$  lorsque  $TP_1$  est passant puis lorsque  $TP_2$  est passant. ( $i_a$  est fourni par  $E$ )

2.1.3. Donner l'expression de la puissance dissipée dans  $R$  et celle de la puissance délivrée par la source  $E$ . Quel est le rendement théorique ?

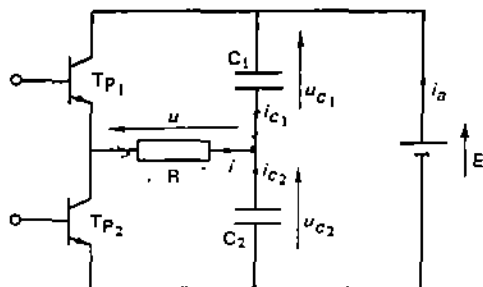


Fig. 6.6.

## 2.2. Débit inductif (cf. figure 7)

Représenter les allures de  $u(t)$  et  $i(t)$ . Indiquer les intervalles de conduction de  $TP_1$ ,  $TP_2$ ,  $D_1$  et  $D_2$ . Quel est le rôle de  $D_1$  et  $D_2$  ?

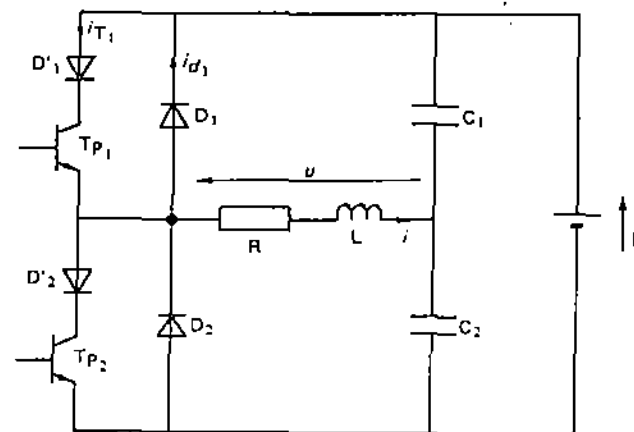


Fig. 6.7. -  $TP_1 = TP_2$  : 2 N 3055 ou BUX 48  
 $D_1 = D_2 = D_3 = D_4$  : BYX 61200  
 $C_1 = C_2 = 470 \mu F$ .

## 2.3. Débit sur charge oscillante (cf. figure 8)

2.3.1. Sachant que  $L = 15$  mH, déterminer la valeur de  $C$  pour avoir la résonance lorsque  $f = 1$  kHz.

2.3.2. Donner la décomposition en série de Fourier du signal  $u(t)$ . En déduire l'expression et l'allure de  $i(t)$  à la fréquence de résonance : on calculera  $R$  de façon à ce que le fondamental  $i_1(t)$  de  $i(t)$  ait pour valeur efficace  $I_1 = 2$  A.

2.3.3. Que se passe-t-il si  $f$  varie ? En déduire l'ordre de commutation des composants lorsque  $f$  est supérieure à la fréquence de résonance puis inférieure à la fréquence de résonance.

(D'après B.T.S Electrotechnique 1983, mesures électroniques et électriques)

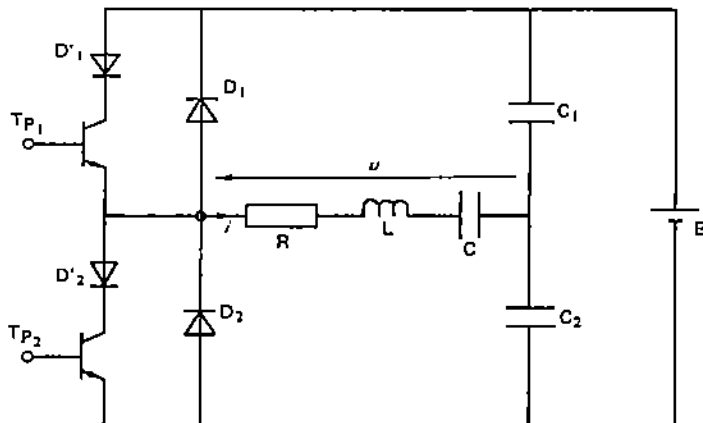


Fig. 6.8.

L'amplificateur opérationnel est supposé parfait. Pour cela, on admettra, dans cette question, que les courants de polarisation  $i_+$  et  $i_-$  sont nuls.

La réaction introduite par  $R_B$  étant positive, l'amplificateur opérationnel fonctionne en comparateur (\*).

Exprimons  $v^+$  en fonction de  $v_s$  : entre les points A et M, on peut écrire :

$$v^+ = R_A i$$

Entre S et M, on a :

$$v_s = (R_A + R_B) i \quad (\text{car } i_+ = 0)$$

ce qui donne :

$$i = \frac{v_s}{(R_A + R_B)}$$

$$\text{d'où } v^+ = \left( \frac{R_A}{R_A + R_B} \right) v_s \quad (1)$$

$$\text{A.N. : } R_A = 10 \text{ k}\Omega, \quad R_B = 100 \text{ k}\Omega$$

$$v^+ = \frac{v_s}{11}$$

L'amplificateur opérationnel fonctionnant en comparateur, deux cas peuvent se présenter :

$$\text{a) } v_e < v^+$$

$i_-$  étant nul, on a :

$$v_e = v^-$$

Par suite :

$$v^+ - v^- > 0$$

Ceci entraîne :

$$v_s = +V_{\text{sat}} = +14 \text{ V}$$

$$\text{et } v^+ = 1,27 \text{ V} \quad (\text{cf. relation (1)})$$

Dès que la tension d'entrée  $v_e$  devient supérieure à  $v^+ = 1,27 \text{ V}$ ,  $v_s$  bascule à  $-V_{\text{sat}} = -14 \text{ V}$ .

(\*) Pour plus de détails, voir problème «BTS Electrotechnique 1982» question 2.2, page 57 - TOME 1.

## Solution et commentaires

### 1. Etude du circuit de commande

Le montage de la figure 2 se divise en deux parties :

- un étage à amplificateur opérationnel
- un étage à transistors.

#### 1.1. Etude du premier étage (cf. figure 9)

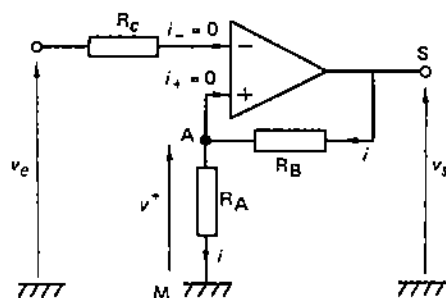


Fig. 6.9.

b)  $v_e > v^+$ .

Dans ce cas :

$$v^+ - v^- < 0$$

soit  $v_s = -V_{sat} = -14 \text{ V}$

et  $v^+ = -1,27 \text{ V}$ .

Dès que  $v_e$  devient inférieure à  $v^+ = -1,27 \text{ V}$ ,  $v_s$  bascule à  $+V_{sat} = +14 \text{ V}$  et on retrouve le cas précédent.

Remarque :

Le cas  $v_e = v^+$  conduit à un fonctionnement aléatoire.

En effet, la tension  $v_s$  prendra la valeur  $+ \text{ ou } - V_{sat}$  au moindre déséquilibre intervenant dans le fonctionnement du montage ou de l'amplificateur opérationnel.

La caractéristique de transfert  $v_s = f(v_e)$  est donnée figure 10.

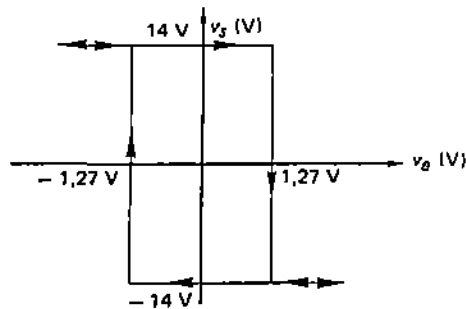


Fig. 6.10. - Caractéristique de transfert  $v_s = f(v_e)$

Ce montage est un comparateur à hystérésis.

Les courbes  $v_e(t)$  et  $v_s(t)$ , lorsque  $v_e(t) = V_M \sin(2\pi f t)$ , sont représentées figure 11.

A.N. :  $V_M = 5 \text{ V}$ ,  $f = 1 \text{ kHz}$  et  $T = 1 \text{ ms}$ .

Remarque :

Calculons  $t_1$ , décalage entre le passage par zéro de  $v_e(t)$  et celui de  $v_s(t)$ . D'après la figure 11, on peut écrire :

$$1,27 = 5 \sin(2\pi f t_1)$$

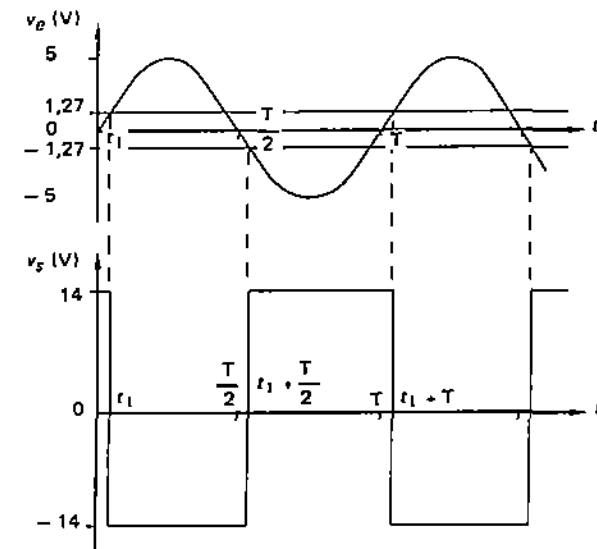


Fig. 6.11. -  $v_e(t)$  et  $v_s(t)$  avec  $v_e(t) = V_M \sin(2\pi f t)$ .

$$\text{soit } t_1 = \frac{\arcsin\left(\frac{1,27}{5}\right)}{2\pi f} \quad (2)$$

A.N. :  $t_1 = 41 \mu\text{s}$ .

## 1.2. Etude du deuxième étage (cf. figure 12)

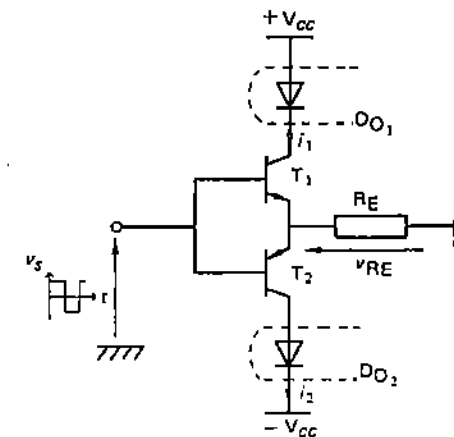


Fig. 6.12.

Selon la valeur de  $v_s$  (+ ou  $-V_{sat}$ ), deux cas dont à étudier :

a)  $v_s = +V_{sat} = +14\text{ V}$

Le transistor  $T_1$  (NPN) est passant, tandis que le transistor  $T_2$  (PNP) est bloqué. Le schéma précédent devient (cf. figure 13).

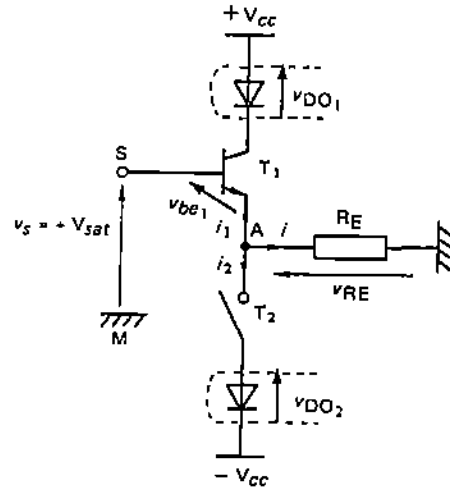


Fig. 6.13. -  $T_1$  est saturé et  $T_2$  est bloqué.  
 $T_2$  est symbolisé par un interrupteur ouvert.

Au nœud A, on peut écrire :

$$i = i_1 - i_2 \quad (3)$$

Or  $i_2 = 0$  car  $T_2$  est bloqué, ce qui entraîne :

$$i = i_1 \quad (4)$$

Le long de la maille (M, S, A, M), on a :

$$V_{sat} = v_{be1} + R_E i$$

$$\text{soit } i_1 = i = \frac{V_{sat} - v_{be1}}{R_E} \quad (5)$$

b)  $v_s = -V_{sat} = -14\text{ V}$

Dans ce cas,  $T_1$  est bloqué et  $T_2$  est passant. Le schéma de la figure 12 devient (cf. figure 14).

$T_1$  étant bloqué, la relation (3) devient :

$$i_2 = -i \quad (6)$$

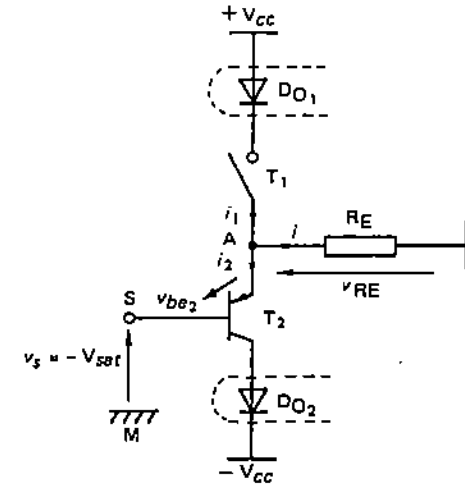


Fig. 6.14. - •  $T_1$  est bloqué et  $T_2$  est saturé  
•  $T_1$  est symbolisé par un interrupteur ouvert.

Le long de la maille (M, S, A, M), on peut écrire :

$$-V_{sat} = R_E i + v_{be2}$$

$$\text{soit } i_2 = -i = \frac{V_{sat} + v_{be2}}{R_E} \quad (7)$$

Les graphes de  $v_s(t)$ ,  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ , ainsi que les intervalles de conduction de  $T_1$  et  $T_2$  sont donnés figure 15.

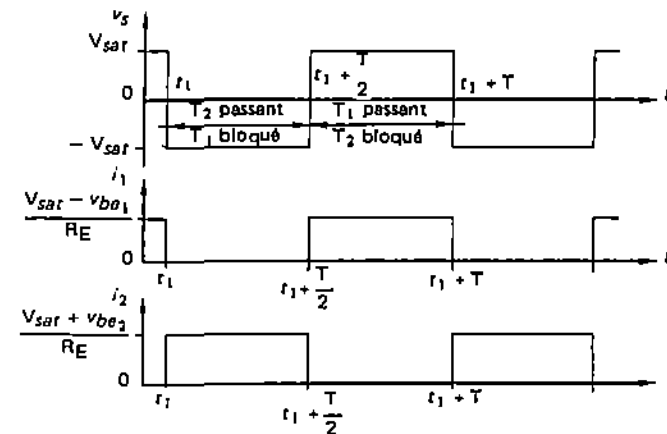


Fig. 6.15. - • Courbes  $v_s(t)$ ,  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$   
• Intervalles de conduction de  $T_1$  et  $T_2$

1.3. Le courant  $i_1$  (ou  $i_2$ ) est le même que celui traversant la diode  $DO_1$  (ou  $DO_2$ ) de l'optocoupleur. On voit, en se reportant à la caractéristique de la figure 5, qu'à un courant  $i_{c1}$  (ou  $i_{c2}$ ) de 3 mA correspond un courant direct dans la diode de l'ordre de 8 mA. Par suite :

$$i_1 = 8 \text{ mA} \quad (i_2 = 8 \text{ mA})$$

pendant l'intervalle où  $T_1$  (ou  $T_2$ ) est passant.

– Calcul de  $R_E$  :

La relation (5) permet d'écrire :

$$R_E = \frac{V_{sat} - v_{be1}}{i_1} \quad \text{quand } T_1 \text{ conduit}$$

De même la relation (7) :

$$R_E = \frac{V_{sat} + v_{be2}}{i_2} \quad \text{quand } T_2 \text{ conduit}$$

A.N. : en prenant  $v_{be1} = -v_{be2} = 0,6 \text{ V}$ ,  $V_{sat} = 14 \text{ V}$  et  $i_1 = i_2 = 8 \text{ mA}$ .  
 $R_E = 1,675 \text{ k}\Omega$ .

1.4. Reprenons le circuit de la figure 3 (cf. figure 16)

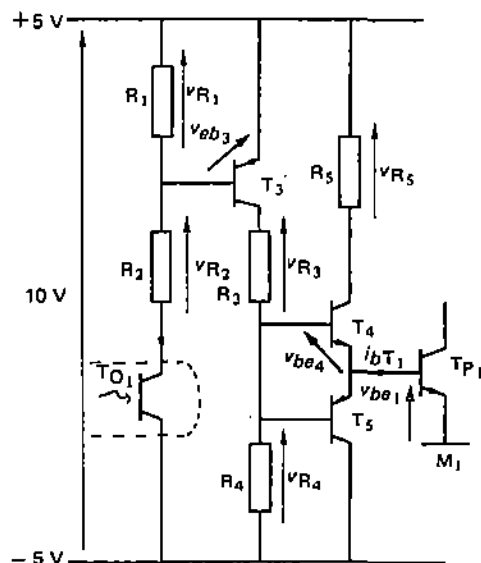


Fig. 6.16. - Les tensions de saturation de  $T_3$ ,  $T_4$  et  $T_5$  sont nulles.

Considérons les deux états de  $TO_1$ .

a)  $TO_1$  est passant

Dans ce cas, les résistances  $R_1$  et  $R_2$  forment un pont diviseur de tension : la tension, à vide (\*), aux bornes de  $R_1$  est :

$$v_{R1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times (10)$$

A.N. :  $v_{R1} = 1,26 \text{ V}$ .

On constate que  $v_{R1} > v_{be3} \approx 0,6 \text{ V}$ . Par conséquent, le courant de base  $i_{bT3}$  est important : le transistor  $T_3$  est saturé. Les résistances  $R_3$  et  $R_4$  forment alors un pont diviseur ; la tension, à vide (\*), aux bornes de  $R_4$  est :

$$v_{R4} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \times (10)$$

A.N. :  $v_{R4} = 7,2 \text{ V}$ .

On voit que  $v_{R4} > (v_{be4} + v_{be1}) \approx 1,2 \text{ V}$ . Le courant de base  $i_{bT4}$  est important :  $T_4$  est saturé. La base de  $TP_1$  est alors alimentée par l'intermédiaire de  $R_5$ , entraînant la saturation de  $TP_1$ .

b)  $TO_1$  est bloqué

Dans ce cas, la base de  $T_3$  est portée à un potentiel positif (+ 5 V). Par suite,  $T_3$  est bloqué (car c'est un PNP) et la base de  $T_4$  est soumise à une tension négative par  $R_4$ , ce qui entraîne le blocage de  $T_4$  (car c'est un NPN) et la saturation de  $T_5$  (car c'est un PNP). Celui-ci porte la base de  $TP_1$  à un potentiel négatif et entraîne le blocage de  $TP_1$ .

Le rôle de  $T_5$  est d'assurer un blocage efficace et rapide de  $TP_1$  en soumettant sa base à une tension négative au lieu d'une tension nulle.

L'étude portant sur le circuit de la figure 4 est identique, soit :

- $TP_2$  conduit lorsque  $TO_2$  est passant
- $TP_2$  est bloqué lorsque  $TO_2$  est bloqué.

$TO_1$  et  $TO_2$  étant alternativement passants,  $TP_1$  et  $TP_2$  le sont également.

1.5.  $M_1$  et  $M_2$  sont les points milieux des alimentations ( $-5 \text{ V}$ ,  $+5 \text{ V}$ ) de la commande. Le montage de la figure 1 devient (cf. figure 17) :

(\*) C'est-à-dire lorsque la base de  $T_3$  (ou  $T_4$ ) est déconnectée.

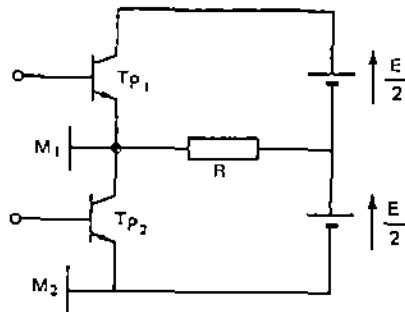


Fig. 6.17.

On voit immédiatement que la liaison des points  $M_1$  et  $M_2$  entraîne le court-circuit de  $T_{P2}$ . En conséquence,  $M_1$  et  $M_2$  doivent être isolés l'un de l'autre.

1.6. Lorsque  $T_{P1}$  est bloqué, son courant de base  $i_{bT1}$  est nul. Lorsque  $T_4$  est passant,  $T_{P1}$  l'est aussi : la maille concernée par ce fonctionnement est représentée figure 18.

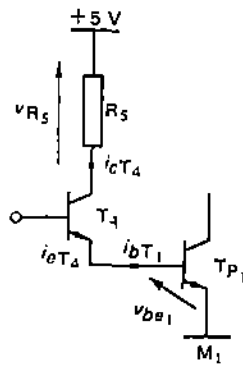


Fig. 6.18.

Le long de cette maille, on peut écrire :

$$5 = R_S i_{cT4} + v_{be1}$$

avec  $i_{cT4} \simeq i_{eT4} = i_{bT1}$

soit  $i_{bT1} \simeq \frac{5 - v_{be1}}{R_S}$

(8)

A.N. :  $i_{bT1} \simeq 420 \text{ mA}$ .

L'étude du courant de base  $i_{bT2}$  de  $T_{P2}$  est identique et entraîne :

- $i_{bT2} = 0$  lorsque  $T_{P2}$  est bloqué
- $i_{bT2} \simeq 420 \text{ mA}$  lorsque  $T_{P2}$  est passant.

Remarque :

Les tensions de saturation  $V_{CEsat}$  des transistors ont été négligées dans cette question. Sachant que leur valeur est de l'ordre de 0,2 V à 0,4 V, on voit immédiatement, à travers les résultats (\*), que cet affaiblissement ne modifie pas les divers états des transistors.

— Lorsque  $T_{P1}$  conduit, le courant de charge  $i$  est égal au courant émetteur  $i_{eT1}$  de  $T_{P1}$  (cf. figure 19).

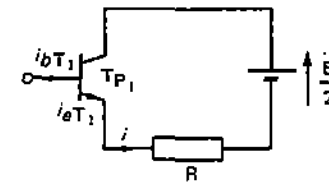


Fig. 6.19. -  $T_{P1}$  est passant.

Or le gain minimum  $\beta_{\min}$  des transistors  $T_{P1}$  et  $T_{P2}$  est égal à 10. Par suite, le courant  $i$  ne pourra excéder la valeur  $(\beta_{\min} + 1) i_{bT1}$ .

A.N. :  $\beta_{\min} = 10$  et  $i_{bT1} = 0,42 \text{ A}$ .

$$i \leq 4,62 \text{ A}.$$

De même, lorsque  $T_{P2}$  conduit,  $i = -i_{cT2}$ , où  $i_{cT2}$  est le courant collecteur de  $T_{P2}$  (cf. figure 20).

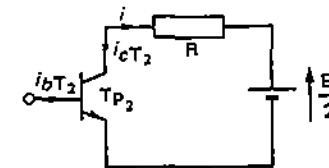


Fig. 6.20. -  $T_{P2}$  est passant.

(\*) cf. questions 1.4, 1.5 et 1.6.

Comme  $i_{cT_2} = \beta_{\min} i_{bT_2}$ , on obtient l'inégalité :

$$i \geq -\beta_{\min} i_{bT_2}$$

A.N. :  $i \geq -4,2 \text{ A}$ .

Pour obtenir un courant  $i(t)$  périodique de valeur moyenne nulle, la condition sur le courant de charge est :

$$|i| \leq 4,2 \text{ A} \quad (9)$$

-- La puissance moyenne dissipée par  $R_s$  s'écrit :

$$P_{R_s} = \frac{1}{T} \int_0^T v_{R_s}(t) i_{R_s}(t) dt$$

Sachant que  $T_{P_1}$  est passant de  $t_1$  à  $t_1 + \frac{T}{2}$ , on a (cf. figure 18) :

$$v_{R_s} = 5 - v_{be_1} \quad \text{et} \quad i_{R_s} = i_{bT_1} \quad (\text{cf. relation (8)})$$

avec  $v_{be_1} = 0,6 \text{ V}$  : constante et  $i_{bT_1} = 0,42 \text{ A}$  : constant.

Par suite :

$$P_{R_s} \simeq \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1 + \frac{T}{2}} (5 - v_{be_1}) \times (i_{bT_1}) dt$$

ce qui donne :

$$P_{R_s} \simeq \frac{1}{2} [(5 - v_{be_1}) \times (i_{bT_1})]$$

A.N. :  $P_{R_s} = 0,882 \text{ W}$ .

## 2. Etude de l'onduleur

### 2.1. Débit résistif (cf. figure 1)

2.1.1. Lorsque  $T_{P_1}$  est passant,  $T_{P_2}$  est bloqué ; on obtient :

$$u = \frac{E}{2} \quad \text{et} \quad i = \frac{E}{2R} \quad (10)$$

Lorsque  $T_{P_2}$  est passant,  $T_{P_1}$  est bloqué et on a :

$$u = -\frac{E}{2} \quad \text{et} \quad i = -\frac{E}{2R} \quad (11)$$

La figure 21 représente  $u = f(t)$ .

En choisissant une valeur absolue maximale de 1 A pour  $i$ , il vient (cf. relations (10) et (11)) :

$$R = \frac{E}{2|i|} \quad (12)$$

A.N. :  $E = 50 \text{ V}, \quad |i| = 1 \text{ A}$   
 $R = 25 \Omega$ .

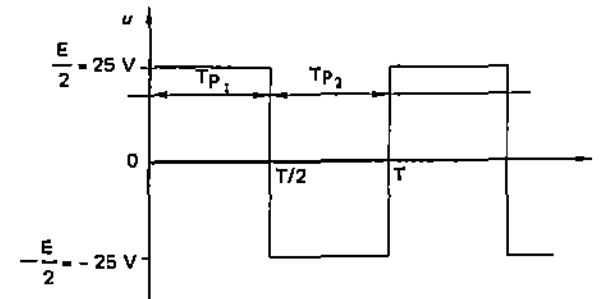


Fig. 6.21. - Courbe  $u = f(t)$  ; l'origine des temps est prise à un instant de commutation.

2.1.2. La condition  $RC_1 = RC_2 \gg f$  permet :

- d'écrire  $C_1 = C_2$
- de supposer les sources  $\frac{E}{2}$ , ainsi réalisées, constantes quel que soit  $i$ .

Démontrons que  $i_{c_1} = -i_{c_2}$  ;

d'après la figure 6 :

$$u_{c_1} + u_{c_2} = E$$

En dérivant par rapport à  $t$ , cette expression s'écrit :

$$\frac{du_{c_1}}{dt} + \frac{du_{c_2}}{dt} = 0$$

$$\text{Or } \frac{du_{c_1}}{dt} = \frac{i_{c_1}}{C_1} \quad \text{et} \quad \frac{du_{c_2}}{dt} = \frac{i_{c_2}}{C_2} ;$$

l'équation précédente devient :

$$\frac{i_{c_1}}{C_1} + \frac{i_{c_2}}{C_2} = 0$$

Comme  $C_1 = C_2$ , il vient :

$$i_{c1} = -i_{c2} \quad (13)$$

– D'après la figure 6 :

$$i = i_{c2} - i_{c1}$$

soit, en tenant compte de la relation (13) :

$$i_{c1} = -\frac{i}{2} \quad (14)$$

$$\text{et } i_{c2} = \frac{i}{2} \quad (15)$$

Selon les états de  $T_{P1}$  et  $T_{P2}$ , deux cas sont à considérer :

- $T_{P1}$  est passant ( $T_{P2}$  bloqué), ce qui entraîne :

$$i_a = i_{c1}$$

par conséquent (cf. relations (10) et (15))

$$i_a = \frac{i}{2} = \frac{E}{4R}$$

- $T_{P2}$  est passant ( $T_{P1}$  bloqué) ; dans ce cas :

$$i_a = i_{c2}$$

soit (cf. relations (11) et (14))

$$i_a = -\frac{i}{2} = -\frac{E}{4R}$$

On remarque que la source  $E$  débite un courant  $i_a$  constant tel que  $i_a = I_a = \frac{E}{4R}$ .

A.N. :  $I_a = 0,5 \text{ A}$ .

2.1.3. La puissance  $P_R$  dissipée par  $R$  s'écrit :

$$P_R = \frac{E^2}{4R} \quad (16)$$

La puissance  $P_a$ , délivrée par la source, est :

$$P_a = E \times I_a$$

$$\text{soit } P_a = \frac{E^2}{4R} \quad (17)$$

Les expressions (16) et (17) sont identiques : le rendement théorique

que  $\eta = \frac{P_R}{P_a}$  est égal à 1.

## 2.2. Débit inductif

### a) courbe $u(t)$

La courbe  $u(t)$  est identique à celle représentée figure 21.

### b) calcul de $i(t)$

Considérons le montage de la figure 7. Selon la valeur de  $u$ , deux cas sont à étudier :

$$\bullet \underline{u(t) = \frac{E}{2} \text{ et } i(t) = i_A(t)}$$

on peut alors écrire :

$$\frac{E}{2} = R i_A + L \frac{di_A}{dt}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre dont la solution est (cf. cours de mathématiques) :

$$i_A(t) = \frac{E}{2R} + A e^{-\frac{R}{L}t} \quad (18)$$

où  $A$  est une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

$$\bullet \underline{u(t) = -\frac{E}{2} \text{ et } i(t) = i_B(t)}$$

Dans ce cas :

$$-\frac{E}{2} = R i_B + L \frac{di_B}{dt}$$

$$\text{soit } i_B(t) = -\frac{E}{2R} + B e^{-\frac{R}{L}(t - \frac{T}{2})} \quad (19)$$

où  $B$  est une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.



Calculons les constantes A et B :

$u(t)$  étant périodique, de valeur moyenne nulle et symétrique par rapport au point d'abscisse  $\frac{T}{2}$ , on peut écrire :

$$i(0) = -i\left(\frac{T}{2}\right) \quad (*)$$

$$\text{soit } \frac{E}{2R} + A = \frac{E}{2R} - B$$

$$\text{ou encore } A = -B \quad (20)$$

$$\text{En outre, } i_A\left(\frac{T}{2}\right) = i_B\left(\frac{T}{2}\right) ; \text{ ceci entraîne :}$$

$$\frac{E}{2R} + A e^{-\left(\frac{RT}{2L}\right)} = -\frac{E}{2R} + B \quad (21)$$

Les expressions (20) et (21) forment un système de deux équations à deux inconnues. Sa résolution donne :

$$A = -\frac{E}{R} \left[ \frac{1}{1 + e^{-\left(\frac{RT}{2L}\right)}} \right] \quad (22)$$

$$\text{et } B = \frac{E}{R} \left[ \frac{1}{1 + e^{-\left(\frac{RT}{2L}\right)}} \right] \quad (23)$$

En portant ces résultats dans (18) et (19), il vient :

$$i_A(t) = \frac{E}{2R} \left[ 1 - 2 \left( \frac{1}{1 + e^{-\left(\frac{RT}{2L}\right)}} \right) e^{-\left(\frac{R}{L}t\right)} \right] \quad (24)$$

$$\text{et } i_B(t) = -\frac{E}{2R} \left[ 1 - 2 \left( \frac{1}{1 + e^{-\left(\frac{RT}{2L}\right)}} \right) e^{-\left[\frac{R}{L}\left(t - \frac{T}{2}\right)\right]} \right] \quad (25)$$

Les courbes  $u(t)$  et  $i(t)$  sont données figure 22.

(\*) On suppose, de plus, le régime permanent établi.

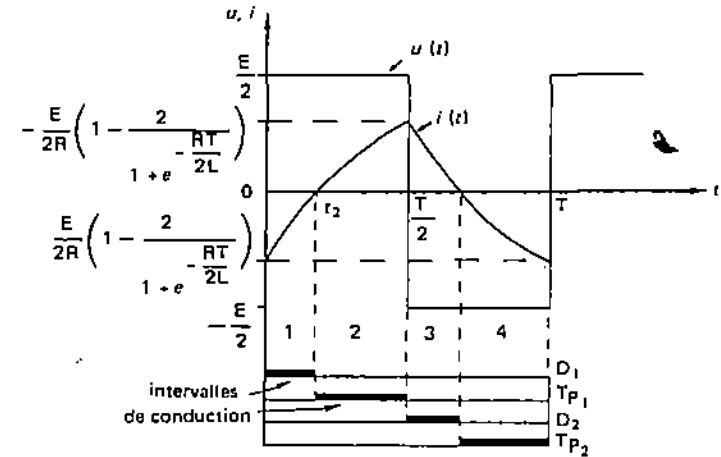


Fig. 6.22. - courbes  $u(t)$  et  $i(t)$  en débit inductif  
- intervalles de conduction de  $D_1, D_2, TP_1, TP_2$ .

L'examen, sur une période, de cette figure montre qu'il y a quatre séquences de fonctionnement. Le schéma équivalent à la figure 7 et correspondant à chaque séquence sera représenté.

- séquence 1 :  $u(t) > 0$  et  $i(t) < 0$ .

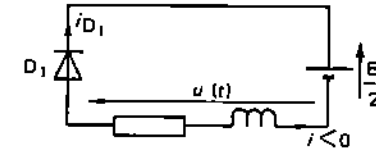


Fig. 6.23.a.

$TP_2$  et  $D_2$  sont bloqués. Le courant  $i_{D_1}$  est égal à  $-i$ . Par conséquent, il est positif :  $D_1$  (\*) est passante et  $TP_1$  bloqué, car  $D_1$  empêche toute conduction inverse de celui-ci.

(\*) Les tensions de seuil des diodes sont négligées devant  $\frac{E}{2}$ .

— séquence 2 :  $u(t) > 0$  et  $i(t) > 0$ .

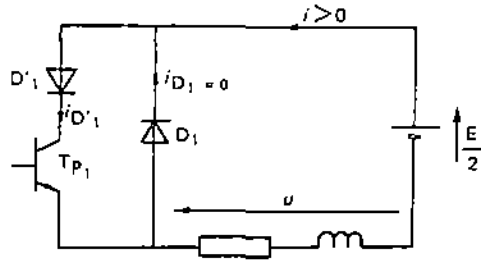


Fig. 6.23.b.

$TP_2$  et  $D_2$  sont bloqués. Le courant  $i_{D_1}$  tend à devenir négatif, ce qui provoque le blocage de  $D_1$ . Le courant  $i_{D'_1}$ , égal à  $i$ , est positif et  $D'_1$  (\*) conduit. Le transistor  $TP_1$  est alors passant.

— séquence 3 :  $u(t) < 0$  et  $i(t) > 0$ .

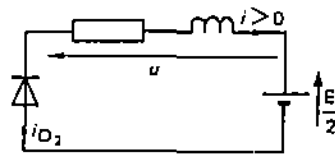


Fig. 6.23.c.

$TP_1$  et  $D_1$  sont bloqués. Le courant  $i_{D_2}$  est égal à  $i$ .

Par conséquent  $D_2$  est passante et  $TP_2$  bloqué car  $D'_2$  empêche toute conduction inverse de celui-ci.

— séquence 4 :  $u(t) < 0$  et  $i(t) < 0$ .

$TP_1$  et  $D_1$  sont bloqués. Le courant  $i_{D_2}$  tend à devenir négatif, ce qui provoque le blocage de  $D_2$ . Le courant  $i_{D'_2}$ , égal à  $-i$ , est positif et  $D'_2$  conduit. Le transistor  $TP_2$  est alors passant.

Les intervalles de conduction de  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $TP_1$  et  $TP_2$  sont donnés figure 22.

(\*) Les tensions de seuil des diodes sont négligées devant  $\frac{E}{2}$ .

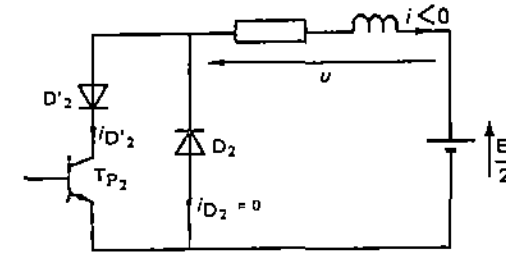


Fig. 6.23.d.

#### • Rôle de $D_1$ et $D_2$

En régime de commutation, un transistor de type NPN ne laisse passer que les alternances positives. Par conséquent, lorsque le courant dans la charge est négatif (\*), le transistor reste bloqué même si l'impulsion de base qui le commande n'est pas nulle.

Pour expliquer que les diodes  $D_1$  et  $D_2$  sont indispensables, raisonnons sur  $TP_1$  et  $D_1$ .

D'après la figure 22, le courant  $i$  est négatif dans l'intervalle  $[0, t_2[$  :  $TP_1$  est bloqué. C'est donc à travers  $D_1$  que  $i$  s'écoule. Il en est de même pour  $D_2$ . Ce phénomène est dû à la bobine qui retarde le courant  $i$  par rapport à la tension  $u$ .

La suppression de  $D_1$  et  $D_2$  entraînerait de fortes surtensions (notamment aux bornes des transistors), dues à la rupture du circuit inductif  $\left( L \frac{di}{dt} \text{ tendant vers l'infini} \right)$ .

### 2.3. Débit sur charge oscillante

2.3.1.  $u(t)$  n'étant pas sinusoïdal, la résonance considérée est celle calculée pour  $f = 1 \text{ kHz}$ . Cette fréquence correspond à la pulsation du fondamental de  $u(t)$ .

D'après la figure 8, la condition de résonance du circuit  $(R, L, C)$  série est :

$$LC \omega^2 = 1$$

$$\text{soit } C = \frac{1}{L(2\pi f)^2}$$

(\*) C'est-à-dire de sens opposé au courant collecteur (ou émetteur) du transistor.

A.N. :  $L = 15 \text{ mH}$ ,  $f = 1 \text{ kHz}$   
 $C = 1,69 \text{ }\mu\text{F}$ .

2.3.2. Le signal  $u(t)$  est périodique de période  $T = \frac{1}{f}$  : il peut être décomposé en série de Fourier (\*). En outre, il possède les particularités suivantes :

- sa valeur moyenne est nulle
- il est impair :  $u(-t) = -u(t)$ .

Par conséquent, les termes en cosinus de la décomposition disparaissent et il ne reste que les termes en sinus impairs, que l'on appellera  $a_{(2k+1)}$ . D'où (\*)

$$a_{(2k+1)} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} u(t) \sin[(2k+1)\omega t] dt$$

avec  $u(t) = \frac{E}{2}$  pour  $0 \leq t \leq \frac{T}{4}$

ce qui donne — tous calculs faits — :

$$a_{(2k+1)} = \frac{2E}{(2k+1)\pi} \quad (26)$$

soit :

$$u(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin[(2k+1)\omega t] \quad (27)$$

— Le courant  $i(t)$  est la somme des courants générés par chaque harmonique de  $u(t)$ , soit :

$$i(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \times \frac{1}{z_{(2k+1)}} \sin[(2k+1)\omega t] \quad (28)$$

où  $z_{(2k+1)}$  est l'impédance du circuit (R, L, C) série relative à la pulsation  $(2k+1)\omega$ .

Soit  $\underline{Z}_{(2k+1)}$ , l'impédance complexe de  $z_{(2k+1)}$  ; on a, à la résonance :

- $\underline{Z}_1 = R$
- $\underline{Z}_3 = R + j \left( 3L\omega - \frac{1}{3C\omega} \right)$

(\*) cf. TOME 1, «Analyse harmonique», question 1.2. et problème 8, question 2.2.

- $\underline{Z}_{(2k+1)} = R + j \left( (2k+1)L\omega - \frac{1}{(2k+1)C\omega} \right)$

En désignant par  $Z_1, Z_3, \dots, Z_{(2k+1)}$ , les modules de  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_3, \dots, \underline{Z}_{(2k+1)}$ , on obtient :

- $Z_1 = R$
- $Z_3 = \sqrt{R^2 + \left( 3L\omega - \frac{1}{3C\omega} \right)^2}$
- $Z_{(2k+1)} = \sqrt{R^2 + \left( (2k+1)L\omega - \frac{1}{(2k+1)C\omega} \right)^2}$

Le fondamental  $i_1(t)$  de  $i(t)$  s'écrit :

$$i_1(t) = \frac{2E}{\pi R} \sin \omega t$$

Sa valeur efficace  $I_1$  est :

$$I_1 = \frac{2E}{\sqrt{2}\pi R} \quad (29)$$

soit  $R = \frac{2E}{\sqrt{2}\pi I}$

A.N. :  $E = 50 \text{ V}$ ,  $I_1 = 2 \text{ A}$  :  
 $R = 11,25 \text{ }\Omega$ .

— Le calcul de  $I_3$  et  $I_5$  donne

$$I_3 = \frac{2E}{3\sqrt{2}\pi Z_3}$$

et  $I_5 = \frac{2E}{5\sqrt{2}\pi Z_5}$

A.N. :  $I_3 = 0,03 \text{ A}$  et  $I_5 = 0,01 \text{ A}$ .

En se limitant aux trois premiers termes de la décomposition de  $i(t)$ , la valeur efficace  $I$  de  $i(t)$  s'écrit :

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2}$$

A.N. :  $I = 2,0025 \text{ A}$ .

On constate que  $I \simeq I_1$  à la résonance.

Le courant  $i(t)$  est pratiquement sinusoïdal et s'écrit :

$$i(t) \simeq \frac{2E}{\pi R} \sin \omega t \quad (30)$$

avec  $\omega = 2\pi f$  et  $f = 1 \text{ kHz}$ .

Sa courbe représentative est donnée figure 24.

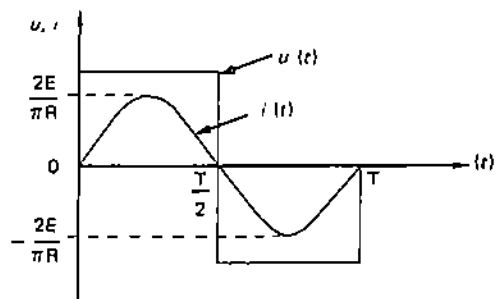


Fig. 6.24. - Courbes  $i(t)$  et  $u(t)$  à la résonance.

2.3.3. Lorsqu'on s'éloigne de la fréquence de résonance (notée  $f_r$ ) le terme  $I_1$  s'écrit :

$$I_1 = \frac{2E}{\pi \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

avec  $\omega = 2\pi f$ .

Comparée à (29), cette expression montre clairement que  $I_1$  diminue. Par conséquent, le terme  $I_H$ , dû aux harmoniques et tel que :  $I_H = \sqrt{I_3^2 + I_5^2 + \dots + I_{(2k+1)}^2}$ , devient non négligeable par rapport à  $I_1$  : le courant  $i(t)$  n'est plus sinusoïdal.

En outre, deux cas sont à considérer :

a)  $f < f_r$

Dans ce cas, l'effet capacitif de l'impédance (dû au terme  $\frac{1}{C\omega}$ )

l'emporte sur l'effet inductif (dû à  $L\omega$ ). Le courant  $i(t)$  est en avance sur le fondamental de  $u(t)$ .

Les courbes  $u(t)$  et  $i(t)$ , ainsi que les intervalles de conduction de  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $TP_1$  et  $TP_2$ , sont représentées figure 25.

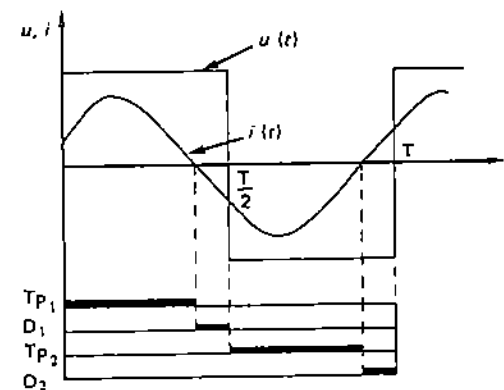


Fig. 6.25. - Courbes  $u(t)$  et  $i(t)$  pour  $f < f_r$   
- Intervalles de conduction de  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $TP_1$  et  $TP_2$

b)  $f > f_r$

L'effet inductif ( $L\omega$ ) de l'impédance l'emporte sur l'effet capacitif

$\frac{1}{C\omega}$ . Le courant  $i(t)$  est en retard sur le fondamental de  $u(t)$ . Ce fonctionnement, ainsi que les intervalles de conduction de  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $TP_1$  et  $TP_2$ , est représenté figure 26.

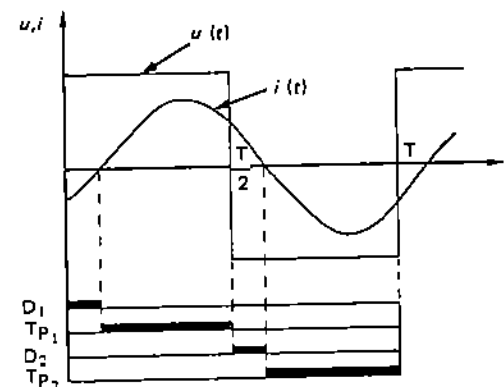


Fig. 6.26. - courbes  $u(t)$  et  $i(t)$  pour  $f > f_r$   
- intervalles de conduction de  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $TP_1$ ,  $TP_2$

**Etude d'un four à induction alimenté  
par un onduleur autonome monophasé à thyristors**

Un four à induction est équivalent à un circuit série composé d'une inductance pure  $L = 60 \mu\text{H}$  et d'une résistance  $R = 10 \text{ m}\Omega$ . La fréquence de fonctionnement de la tension d'alimentation du four est fixée à  $f = 600 \text{ Hz}$ .

**1. Alimentation par source de tension alternative sinusoïdale :**

**1.1. Alimentation directe sous tension nominale  $V_N$  : (cf. figure 1)**

Le four est alimenté par un générateur de tension alternative de valeur efficace  $V_N = 1000 \text{ V}$  et de fréquence  $f = 600 \text{ Hz}$ .

Calculer :

*1.1.1.* Le module  $Z$  de l'impédance du four.

*1.1.2.* L'intensité efficace du courant nominal absorbé  $I_N$ .

*1.1.3.* La puissance active  $P$  consommée par le four.

## 1.2. Alimentation indirecte sous tension réduite $V' = 90 \text{ V}$ .

On ne dispose en réalité que d'un générateur de tension sinusoïdale de valeur efficace  $V' = 90 \text{ V}$  et de fréquence  $f = 600 \text{ Hz}$ .

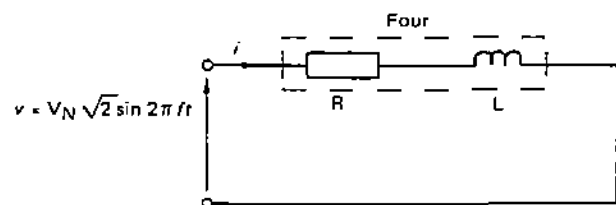


Fig. 7.1. - Four alimenté sous tension nominale  $V_N = 1000 \text{ V}$ .

Voulant obtenir pour le four le même point de fonctionnement (même intensité efficace  $I_N$ ), on ajoute en série avec celui-ci un condensateur de capacité  $C$  que l'on se propose de calculer (cf. figure 2).

1.2.1. Quel doit être le module  $Z'$  de l'impédance de l'ensemble du circuit (four + condensateur) pour que l'intensité efficace traversant l'ensemble reste égale à  $I_N$  calculée en 1.1.2.

1.2.2. En déduire le facteur de puissance  $\cos \varphi'$  de l'ensemble du circuit. Quelles sont alors les deux valeurs possibles du déphasage de la tension  $v'$  par rapport au courant  $i$  ?

1.2.3. Calculer la capacité  $C$  du condensateur. Montrer qu'il existe deux valeurs possibles  $C_1$  et  $C_2$  correspondant aux deux déphasages.

On adoptera dans la suite, la valeur de  $C$  pour laquelle le courant  $i$  (de valeur efficace  $I_N$ ) est en avance sur la tension  $v'$  du générateur.

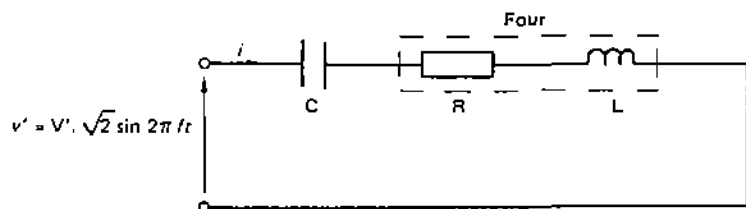


Fig. 7.2. - Four alimenté sous tension réduite  $V' = 90 \text{ V}$ .

## 2. Alimentation par source de tension alternative «carrée» de fréquence $f = 600 \text{ Hz}$ :

### 2.1. Alimentation indirecte :

Un générateur délivre une tension  $u(t)$  alternative carrée de rapport cyclique  $\alpha = \frac{1}{2}$  (cf. figure 3). Cette tension a pour développement en série de Fourier :

$$u(t) = \frac{4E}{\pi} \left( \sin \omega t - \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t \dots \right)$$

On appelle harmonique 1 ou fondamentale, la tension :

$$v_1(t) = \frac{4E}{\pi} \sin \omega t \quad \text{avec} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 600 \text{ Hz}$$

et harmonique 3, la tension :

$$v_3(t) = -\frac{4E}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \sin 3\omega t$$

et ainsi de suite. On donne  $E = 100 \text{ V}$ .

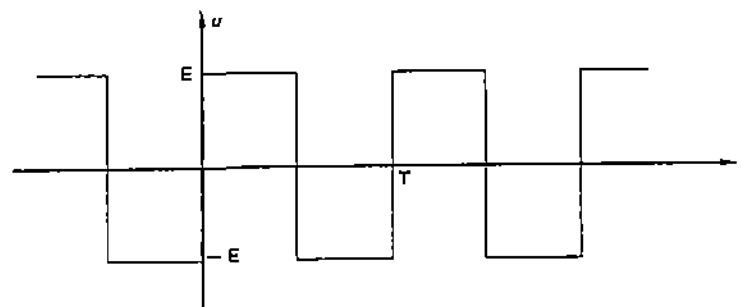


Fig. 7.3. - Graphe de  $u(t)$ .

2.1.1. Calculer les valeurs efficaces  $V_1$  et  $V_3$  des tensions sinusoïdales  $v_1(t)$  et  $v_3(t)$ .

Comparer  $V_1$  avec la tension  $V'$  de la question 1.2.

2.1.2. Le générateur délivrant la tension  $u(t)$  alimente le circuit série comprenant le four à induction et le condensateur de capacité  $C = 1080 \mu\text{F}$  (cf. figure 4).

a) Calculer les modules  $Z_1$  et  $Z_3$  des impédances de ce circuit relatives aux harmoniques 1 et 3. Vérifier que  $Z_1 = Z'_1$ .

b) En déduire les valeurs efficaces  $I_1$  et  $I_3$  des courants correspondants.

Comparer  $I_3$  avec  $I_1$ . Montrer qu'on peut considérer que le courant  $i(t)$  dans le circuit est pratiquement sinusoïdal.

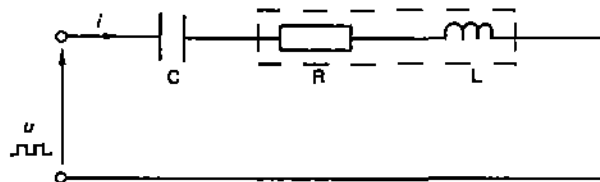


Fig. 7.4. - Four alimenté sous tension alternative carrée.

## 2.2. Etude du générateur :

- Le générateur délivrant la tension  $u(t)$  est un onduleur autonome alimenté par la batterie de force électromotrice  $E$  (cf. figure 5). Il est constitué de quatre «interrupteurs électroniques» fonctionnant simultanément deux par deux.
- Pendant une demi-période de fonctionnement, les interrupteurs  $K_1$  et  $K_3$  sont fermés alors que les interrupteurs  $K_2$  et  $K_4$  restent ouverts. Pendant la demi-période suivante, c'est l'inverse :  $K_1$  et  $K_2$  sont ouverts tandis que  $K_2$  et  $K_4$  sont fermés.
- Les interrupteurs  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  et  $K_4$  sont constitués d'un thyristor et d'une diode en antiparallèle (cf. figure 6).
- Les composants sont supposés parfaits et la commande des thyristors n'est pas représentée (ni à l'amorçage ni éventuellement au blocage).

2.2.1. On admet que le courant  $i(t)$  dans le circuit «four + condensateur» est sinusoïdal ; avec :

$$i(t) = 4400\sqrt{2} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{3} \right)$$

a) Indiquer les séquences pendant lesquelles les thyristors et les diodes sont passants.

b) Précisez si le mode de commutation des thyristors est naturel ou forcé.

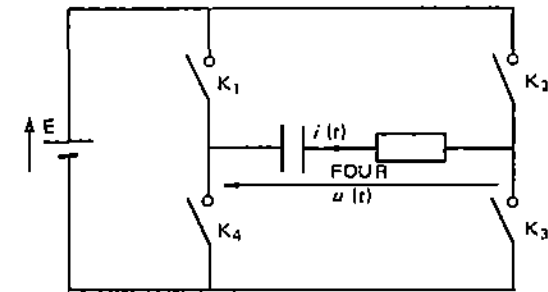


Fig. 7.5. - Schéma simplifié de l'ensemble «onduleur-four».

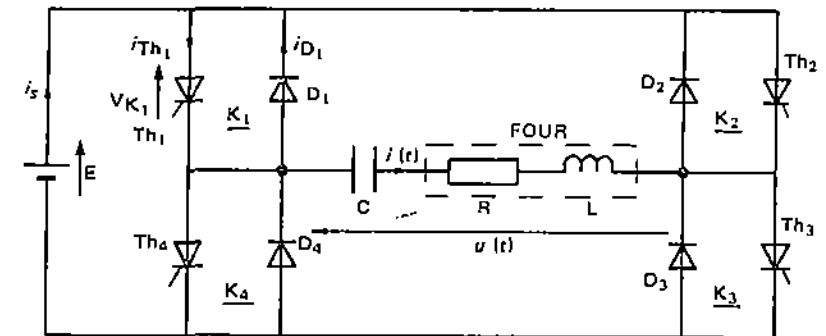


Fig. 7.6. - Schéma complet de l'ensemble «onduleur-four».

### 2.2.2. Représenter en fonction du temps :

- les courants  $i_{Th1}$  dans le thyristor  $Th_1$ ,  $i_{D1}$  dans la diode  $D_1$  et  $i_s$  dans la source de tension  $E$ .
- la tension  $v_{K1}$  aux bornes de l'ensemble «thyristor  $Th_1$  - diode  $D_1$ » (interrupteur  $K_1$ ).

2.2.3. Calculer les valeurs moyennes des intensités des courants dans un thyristor, une diode et dans la source de tension continue  $E$ .

2.2.4. Montrer que la puissance active fournie par la source de tension continue  $E$  s'écrit :

$$P = E \cdot \bar{I}_s$$

où  $\bar{I}_s$  est la valeur moyenne du courant  $i_s$ .

Calculer  $P$  et comparer la valeur obtenue avec la puissance nominale du four, calculée à la question 1.1.3.

### 3. Alimentation directe du four :

Dans cette question, le four est alimenté directement par la tension  $u(t)$  (cf. figure 3) fournie par l'onduleur et le condensateur est supprimée (cf. figure 7).

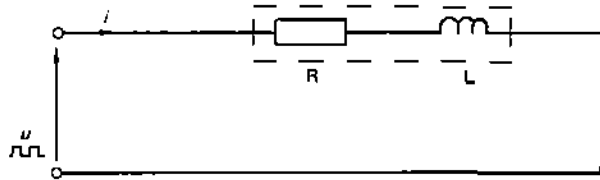


Fig. 7.7. - Four alimenté sous tension alternative carrée — Le condensateur C est supprimé.

#### 3.1. Etude du courant dans le four :

3.1.1. Ecrire les équations différentielles relatives à chaque demi-période permettant de déterminer la loi du courant  $i(t)$  dans le four.

3.1.2. Montrer qu'en régime permanent, en prenant la valeur moyenne des deux membres de l'équation différentielle.

$$u(t) = L \frac{di}{dt} + R i,$$

on déduit que la valeur moyenne  $\bar{I}$  du courant  $i$  est nulle.

3.1.3. Calculer la constante de temps  $\tau = \frac{L}{R}$  du four et la comparer avec la demi-période  $\frac{T}{2}$  de l'onduleur.

En déduire que le four se comporte comme une inductance pure. (On admettra que l'effet résistif est négligeable devant l'effet inductif dès que  $\left(\frac{\tau}{\frac{T}{2}}\right)^2 > 10$ ).

3.1.4. Résoudre dans ces conditions, les équations différentielles simplifiées en fonction des valeurs extrémales du courant ( $+I_M$  et  $-I_M$ ).

3.1.5. Calculer  $I_M$  et représenter graphiquement le courant  $i$  en fonction du temps.

#### 3.2. Etude de l'onduleur :

Représenter graphiquement en fonction du temps :

3.2.1. La tension  $v_{K_1}$  aux bornes de l'interrupteur  $K_1$ .

3.2.2. Les courants  $i_{Th_1}$  dans le thyristor  $Th_1$ ,  $i_{D_1}$  dans la diode  $D_1$  et  $i_s$  dans la source de tension  $E$ .

3.2.3. En déduire le régime de commutation des thyristors.

(B.T.S. Electrotechnique, 1983.)

### Solution et commentaires

#### 1. Alimentation par source de tension alternative sinusoïdale :

1.1. Alimentation directe sous tension nominale  $V_N$  : (cf. figure 1)

1.1.1. On sait que le four est équivalent à un circuit composé d'une inductance pure  $L = 60 \mu H$  en série avec une résistance  $R = 10 m\Omega$ . Dans ce cas, le module  $Z$  de l'impédance du four s'écrit :

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \quad (1)$$

A.N. :  $Z = 0,2264 \Omega$ .

1.1.2. L'intensité efficace du courant nominal  $I_N$  absorbé est :

$$I_N = \frac{V_N}{Z} \quad (2)$$

A.N. :  $I_N \simeq 4417 A$ .

1.1.3. La puissance active  $P$  consommée par le four s'écrit :

$$P = R I_N^2 = \frac{V_N^2}{Z} \quad (3)$$

A.N. :  $P = 195 kW$ .



1.2. Alimentation indirecte sous tension réduite  $V' = 90 \text{ V}$  : (cf. figure 2).

1.2.1. On désire avoir la même intensité  $I_N$  que celle obtenue précédemment (cf. question 1.1.2). On peut donc écrire :

$$I_N = \frac{V'}{Z'} \quad (4)$$

où  $Z'$  est le module de l'impédance de l'ensemble «four + condensateur».

La relation (4) donne :

$$Z' = \frac{V'}{I_N} \quad (5)$$

A.N. :  $Z' = 20,38 \text{ m}\Omega$ .

1.2.2. Le facteur de puissance  $\cos \varphi'$  de l'ensemble étudié est :

$$\cos \varphi' = \frac{R}{Z'} \quad (6)$$

Soit  $\cos \varphi' = 0,4907$  (7)

La résolution de l'équation (7) donne les deux valeurs possibles  $\varphi'_1$  et  $\varphi'_2$  du déphasage  $\varphi'$  de la tension  $v'$  par rapport au courant  $i$  :

$$\varphi'_1 = +60,6^\circ$$

et  $\varphi'_2 = -60,6^\circ$

1.2.3. Le module  $Z'$  de l'impédance de l'ensemble «four + condensateur» est donné par l'expression

$$Z' = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (8)$$

et  $\tan \varphi'$  par :

$$\tan \varphi' = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \quad (9)$$

Aux deux valeurs  $\varphi'_1$  et  $\varphi'_2$  du déphasage  $\varphi'$ , il correspond deux valeurs pour  $\tan \varphi'$  ; c'est-à-dire :

$$\tan \varphi'_1 = 1,7747$$

et  $\tan \varphi'_2 = -1,7747$ .

Ce résultat montre clairement qu'il y a deux valeurs possibles  $C_1$  et  $C_2$  pour la capacité  $C$ . On a, compte tenu de la relation (9) :

$$\frac{L\omega - \frac{1}{C_1\omega}}{R} = 1,7747$$

$$\text{et } \frac{L\omega - \frac{1}{C_2\omega}}{R} = -1,7747$$

A.N. :  $C_1 = 1272,6 \mu\text{F}$  et  $C_2 = 1087,3 \mu\text{F}$ .

Pour que le courant  $i(t)$  soit en avance sur la tension  $v'(t)$ , il faut choisir  $C_2 = 1087,3 \mu\text{F}$ .

2. Alimentation par source de tension alternative carrée de fréquence  $f = 600 \text{ Hz}$ .

2.1. Alimentation directe :

2.1.1. On sait que  $v_1(t)$  et  $v_3(t)$  s'écrivent :

$$v_1(t) = \frac{4E}{\pi} \sin \omega t \quad (10)$$

$$\text{et } v_3(t) = -\frac{4E}{3\pi} \sin 3\omega t \quad (11)$$

Posons  $V_{1m} = \frac{4E}{\pi}$  et  $V_{3m} = \frac{4E}{3\pi}$ . Il vient :

$$v_1(t) = V_{1m} \sin \omega t \quad \text{et} \quad v_3(t) = -V_{3m} \sin 3\omega t.$$

On voit que  $V_{1m}$  et  $V_{3m}$  représentent respectivement les valeurs maximales (ou crêtes) de  $v_1(t)$  et  $v_3(t)$ . D'où les valeurs efficaces  $V_1$  et  $V_3$  :

$$V_1 = \frac{V_{1m}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad V_3 = \frac{V_{3m}}{\sqrt{2}}$$

A.N. :  $V_1 = 90 \text{ V}$  et  $V_3 = 30 \text{ V}$ .

On remarque que  $V_1 = V'$ .

2.1.2. a) Le module  $Z_1$  de l'impédance relative à l'harmonique 1 s'écrit :

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (12)$$

où  $\omega = 2\pi f$ ;  $f$  étant la fréquence de l'harmonique 1 (ou fondamentale).

Le module  $Z_3$  de l'impédance relative à l'harmonique 3 est obtenue en remplaçant  $\omega$  par  $3\omega$  dans la formule (12). Par suite,

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + \left(L3\omega - \frac{1}{C3\omega}\right)^2}$$

A.N. :  $Z_1 = 21,84 \text{ m}\Omega$  et  $Z_3 \simeq 0,6 \Omega$ .

On constate que  $Z_1 \simeq Z'$ .

*Remarque :*

Le faible écart entre  $Z_1$  et  $Z'$  est simplement dû au choix de la valeur de  $C$  ( $1080 \mu\text{F}$ ). En prenant  $C = 1087 \mu\text{F}$  (cf. question 1.2.3)  $Z_1$  et  $Z'$  seraient rigoureusement égales.

b) Les valeurs efficaces  $I_1$  et  $I_3$  des courants générés par les harmoniques 1 et 3 (c'est-à-dire  $v_1(t)$  et  $v_3(t)$ ) valent respectivement :

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_1} \quad \text{et} \quad I_3 = \frac{V_3}{Z_3}$$

A.N. :  $I_1 \simeq 4121 \text{ A}$  et  $I_3 = 50 \text{ A}$ .

On constate que  $I_1 \gg I_3$ .

*Remarque :*

Les valeurs efficaces des courants générés par les autres harmoniques de  $v(t)$  sont obtenues en procédant comme pour le calcul de  $I_1$  et  $I_3$ . On a donc :

$$I_5 = \frac{V_5}{Z_5} ; I_7 = \frac{V_7}{Z_7} ; I_9 = \frac{V_9}{Z_9} \dots \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{V_{2p+1}}{Z_{2p+1}}$$

A.N. :  $I_5 \simeq 16,6 \text{ A}$ ,  $I_7 \simeq 8,3 \text{ A}$  et  $I_9 \simeq 5 \text{ A}$ .

La valeur efficace d'un harmonique de courant est d'autant plus faible que son rang est élevé.

En comparant  $I_1$  et  $I_9$ , on constate que le rapport  $\frac{I_9}{I_1} \simeq 10^{-3}$ . C'est pourquoi on limitera le développement de  $i(t)$  à l'harmonique

7. Soit :

$$i(t) = i_1(t) + i_3(t) + i_5(t) + i_7(t) \quad (14)$$

• Pour vérifier que  $i(t)$  est pratiquement sinusoïdal, il faut montrer que  $i(t) \simeq i_1(t)$ . Pour cela, calculons la valeur efficace  $I$  de  $i(t)$  et comparons-la à celle de  $i_1(t)$ . On a :

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2}$$

A.N. :  $I = 4121 \text{ A}$ .

On remarque que  $I = I_1$ . En conséquence,  $i = i_1(t)$  : on peut donc considérer que le courant  $i(t)$  est sinusoïdal.

## 2.2. Etude du générateur :

2.2.1. a) Pour rechercher les séquences pendant lesquelles les thyristors et les diodes sont passants, il faut d'une part, représenter  $i(t)$  et  $u(t)$  et d'autre part, indiquer sur une période  $T$ , les intervalles de temps durant lesquels  $i(t)$  est soit strictement positif, soit négatif ou nul.

• *Graphes de  $i(t)$  et  $u(t)$  :*

Rappelons que :

– Pour  $0 \leq t < \frac{T}{2}$ ,  $K_1$  et  $K_3$  sont passants et,  $K_2$  et  $K_4$  sont ouverts. Dans ce cas :

$$u(t) = E \quad (15)$$

– Pour  $\frac{T}{2} \leq t < T$ ,  $K_1$  et  $K_3$  sont ouverts et,  $K_2$  et  $K_4$  sont passants. Dans ce cas :

$$u(t) = -E \quad (16)$$

La tension  $u(t)$  est donc formée de créneaux.

– le courant  $i(t)$  est tel que (voir énoncé) :

$$i(t) = 4400\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (17)$$

Les relations (15), (16) et (17) permettent de tracer les graphes de  $u(t)$  et  $i(t)$ . Nous les donnons figure 8a.

- Intervalles de temps pendant lesquels  $i(t)$  est soit strictement positif, soit négatif ou nul :

Pour rechercher ces intervalles, calculons sur une période, les instants  $t_1$  et  $t_2$  où  $i(t)$  est nul. Pour cela, écrivons que :

$$4400\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Les solutions de cette équation sont :

$$t_1 = \frac{T}{3} \text{ et } t_2 = \frac{5T}{6} \quad (18)$$

D'après la figure 8a, le courant  $i(t)$  est strictement positif dans les intervalles  $[0, t_1[$  et  $]t_2, T]$  et négatif ou nul dans l'intervalle  $[t_1, t_2]$ .

- Recherche des séquences demandées :

Considérons séparément les deux demi-périodes de fonctionnement  $\left[0, \frac{T}{2}\right]$  et  $\left[\frac{T}{2}, T\right]$ .

$$1) 0 \leq t < \frac{T}{2} :$$

Durant cette demi-période,  $K_2$  et  $K_4$  sont toujours ouverts. En conséquence, les thyristors  $Th_2$  et  $Th_4$  et les diodes  $D_2$  et  $D_4$  sont bloqués. Par suite,

$$i_{Th_2} = i_{Th_4} = 0$$

$$\text{et } i_{D_2} = i_{D_4} = 0$$

Par contre,  $K_1$  et  $K_3$  sont fermés. Pour connaître l'état de  $Th_1$ ,  $Th_3$ ,  $D_1$  et  $D_3$ , il faut étudier indépendamment les intervalles  $[0, t_1[$  et  $\left[t_1, \frac{T}{2}\right]$  :

$$- 0 \leq t < t_1 : \left(\text{avec } t_1 = \frac{T}{3}\right).$$

Le courant  $i(t)$  est strictement positif. Il provient de la source, traverse  $Th_1$ , le four,  $Th_3$  et retourne à la source. De ce fait,  $Th_1$  et  $Th_3$  sont passants tandis que  $D_1$  et  $D_3$  sont bloquées (\*). On a donc :

$$i(t) = i_{Th_1} = i_{Th_3} = i_s$$

$$\text{et } i_{D_1} = i_{D_3} = 0$$

(\*)  $D_1$  et  $D_3$  sont bloquées car elles sont montées en parallèle inverse sur  $Th_1$  et  $Th_3$ .

$$- t_1 \leq t < \frac{T}{2} :$$

Durant cet intervalle,  $i(t)$  devient négatif ou nul :  $Th_1$  et  $Th_3$  se bloquent. Le courant circule alors le long de la maille ( $D_3$ , four,  $D_1$ , source) :  $D_1$  et  $D_3$  sont donc passantes. En conséquence :

$$i_{Th_1} = i_{Th_3} = 0$$

$$\text{et } i_{D_1} = i_{D_3} = -i(t)$$

Le signe «-» est dû au fait que  $i_{D_1}(t)$  et  $i(t)$  sont opposés (cf. figure 6).

Remarquons que :

$$i_{D_1}(t) = -i_s(t)$$

Comme  $i_{D_1}(t) = -i(t)$ , on a :  $i_s(t) = i(t)$ .

$$2) \frac{T}{2} \leq t < T :$$

$K_1$  et  $K_3$  sont toujours ouverts. En conséquence,  $Th_1$ ,  $Th_3$ ,  $D_1$  et  $D_3$  sont bloqués. Par suite :

$$i_{Th_1} = i_{Th_3} = 0$$

$$\text{et } i_{D_1} = i_{D_3} = 0.$$

$K_2$  et  $K_4$  sont fermés. Pour connaître l'état de  $Th_2$ ,  $Th_4$ ,  $D_2$  et  $D_4$ , il faut procéder comme dans le cas précédent ; c'est-à-dire étudier séparément les intervalles  $\left[\frac{T}{2}, t_2\right]$  et  $]t_2, T[$ . Il vient pour :

$$- \frac{T}{2} \leq t \leq t_2 : \left(\text{avec } t_2 = \frac{5T}{6}\right)$$

$Th_2$  et  $Th_4$  sont passants et,  $D_2$  et  $D_4$  bloquées avec :

$$i_{Th_2} = i_{Th_4} = -i(t)$$

$$i_{D_2} = i_{D_4} = 0$$

$$\text{et } i_s = -i(t)$$

$$- t_2 < t < T :$$

$Th_2$  et  $Th_4$  sont bloqués et  $D_2$  et  $D_4$  passantes avec :

$$i_{Th_2} = i_{Th_4} = 0$$

$$i_{D_2} = i_{D_4} = i(t)$$

$$\text{et } i_s(t) = -i(t).$$

Les séquences demandées sont tracées en tenant compte des résultats obtenus ci-dessus (cf. figure 8.b).

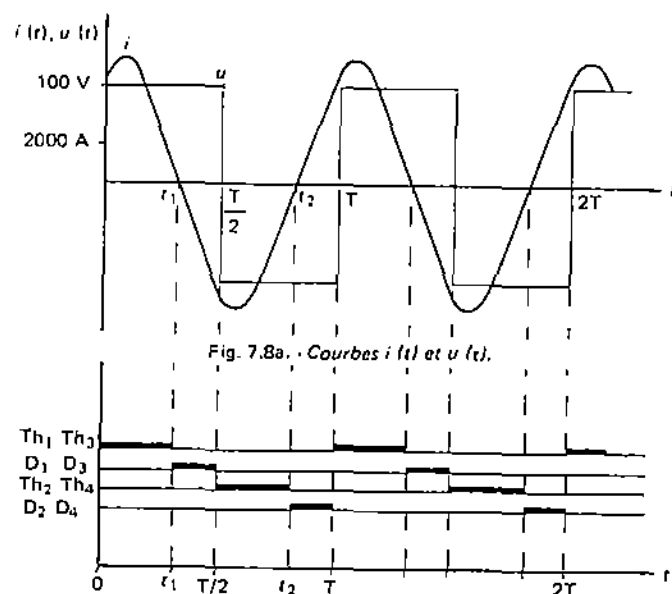


Fig. 7.8a. - Courbes  $i(t)$  et  $u(t)$ .

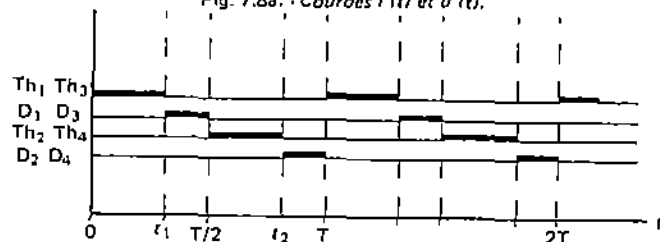


Fig. 7.8b. - Séquences de fonctionnement des thyristors et des diodes.

- Etat passant : trait gras.
- Etat bloqué : trait fin.

2.2.1. b) Le mode de commutation des thyristors est naturel. En effet, ceux-ci se bloquent dès que le courant qui les traverse devient négatif ou nul (voir problème n° 1 question 213).

2.2.2. a) Pour tracer  $i_{Th1}$ ,  $i_{D1}$  et  $i_s$  en fonction du temps, rappelons leurs expressions respectives (cf. question 2.2.1.a).

- Expression de  $i_{Th1}$  :

$$\left. \begin{aligned} i_{Th1}(t) &= i(t) & \text{pour } 0 \leq t < t_1 \\ \text{et } i_{Th1}(t) &= 0 & \text{pour } t_1 \leq t < T \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

- Expression de  $i_{D1}$  :

$$\left. \begin{aligned} i_{D1}(t) &= -i(t) & \text{pour } t_1 \leq t < \frac{T}{2} \\ \text{et } i_{D1}(t) &= 0 & \text{pour } 0 \leq t < t_1 \text{ et } \frac{T}{2} \leq t < T \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

- Expression de  $i_s$  :

$$\left. \begin{aligned} i_s(t) &= i(t) & \text{pour } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ \text{et } i_s(t) &= -i(t) & \text{pour } \frac{T}{2} \leq t < T \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\text{Avec } i(t) = 4400\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ et } t_1 = \frac{T}{3}.$$

Les courbes  $i_{Th1}$ ,  $i_{D1}$  et  $i_s$  en fonction du temps sont tracées à l'aide des expressions ci-dessus. Ces courbes sont données respectivement figures 9a, 9b et 9c.

Remarque :

D'après les figures 9a, 9b et 9c, on observe que les périodes de  $i_{Th1}$  et  $i_{D1}$  sont égales à  $T$  et celle de  $i_s$  à  $\frac{T}{2}$ .

2.2.2. b) Lorsque l'interrupteur  $K_1$  est :

1) fermé  $\left(0 \leq t < \frac{T}{2}\right)$ , la tension  $v_{K1}$  à ses bornes est nulle, soit :

$$v_{K1} = 0$$

2) ouvert  $\left(\frac{T}{2} \leq t < T\right)$ ,  $v_{K1} = -u(t)$ . En effet,  $K_2$  et  $K_4$  étant fermés, l'ensemble «four + condensateur» est en parallèle avec  $K_1$ . Comme dans l'intervalle considéré,  $u(t) = -E$  (cf. question 2.2.1.a), on a :

$$v_{K1} = E$$

La courbe représentative de  $v_{K1}$  est donnée figure 10.

2.2.3. Les valeurs moyennes  $\bar{i}_{Th1}$  de  $i_{Th1}$ ,  $\bar{i}_{D1}$  de  $i_{D1}$  et  $\bar{i}_s$  de  $i_s$  s'écrivent respectivement :

$$\bar{i}_{Th1} = \frac{1}{T} \int_0^T i_{Th1}(t) dt \quad (22)$$

$$\bar{i}_{D1} = \frac{1}{T} \int_0^T i_{D1}(t) dt \quad (23)$$

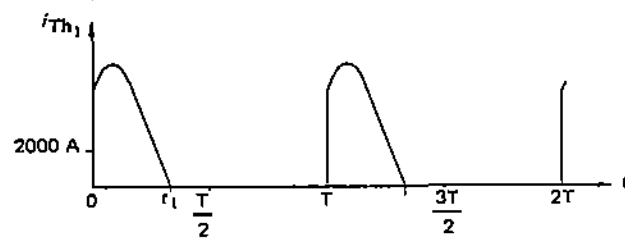


Fig. 7.9a. - Courbe  $i_{Th1}(t)$ .

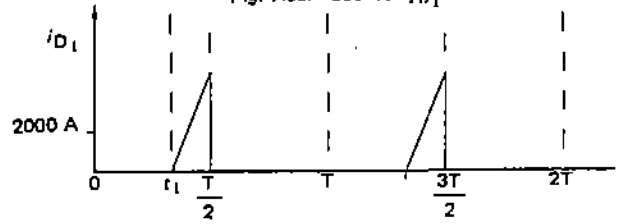


Fig. 7.9b. - Courbe  $i_{D1}(t)$ .

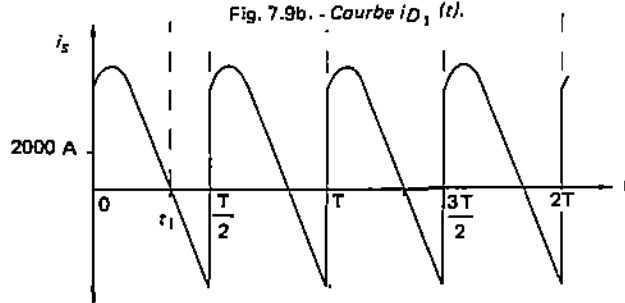


Fig. 7.9c. - Courbe  $i_s(t)$ .

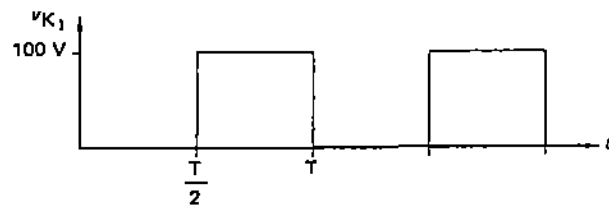


Fig. 7.10. - Courbe  $v_{K1}(t)$ .

$$\text{et} \quad \bar{I}_s (*) = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} i_s(t) dt \quad (24)$$

(\*) Rappelons que la période de  $i_s$  est  $\frac{T}{2}$ .

Soit en tenant compte des relations (19), (20) et (21) :

$$\bar{I}_{Th1} = \frac{1}{T} \int_0^{t_1} i(t) dt \quad (25)$$

$$\bar{I}_{D1} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{T/2} i(t) dt \quad (26)$$

$$\text{et} \quad \bar{I}_s = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i(t) dt \quad (27)$$

Après avoir remplacé  $i(t)$  par (17) et  $t_1$  par  $\frac{T}{3}$ , le calcul des trois intégrales précédentes donne :

$$\bar{I}_{Th1} = 1485,5 \text{ A}$$

$$\bar{I}_{D1} = 495 \text{ A}$$

$$\text{et} \quad \bar{I}_s = 1980,7 \text{ A.}$$

2.2.4. La puissance instantanée  $p$  fournie par la source s'écrit :

$$p = E \cdot i_s(t) \quad (28)$$

D'où la puissance active  $P$  fournie :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} E i_s(t) dt \quad (29)$$

$$\text{Soit} \quad P = E \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i_s(t) dt \quad (30)$$

Notons que  $\frac{2}{T} \int_0^{T/2} i_s(t) dt = \bar{I}_s$  (cf. relation (27)). Par suite :

$$P = E \cdot \bar{I}_s \quad (31)$$

$$\text{A.N. : } P = 198 \text{ kW.}$$

On remarque que la puissance fournie par la source est pratiquement égale à la puissance nominale du four (195 kW : cf. question 1.1.3).

### 3. Alimentation directe du four : (cf. figure 7)

#### 3.1. Etude du courant dans le four :

3.1.1. Appliquons la loi d'Ohm au circuit de la figure 1. Il vient :

$$L \frac{di}{dt} + R i = u(t) \quad (32)$$

Considérons séparément les deux demi-périodes de fonctionnement :

$$a) 0 \leq t < \frac{T}{2} :$$

Dans ce cas,  $u(t) = +E$  (cf. relation (15)) et l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$L \frac{di}{dt} + R i = +E \quad (33)$$

$$b) \frac{T}{2} \leq t < T :$$

Dans ce cas,  $u(t) = -E$  (cf. relation (16)) et l'équation (32) devient :

$$L \frac{di}{dt} + R i = -E \quad (34)$$

3.1.2. En régime établi et en considérant les valeurs moyennes, la relation (32) s'écrit :

$$\bar{U} = L \frac{d\bar{i}}{dt} + R \bar{i} \quad (35)$$

où  $\bar{U}$ ,  $L \frac{d\bar{i}}{dt}$  et  $\bar{i}$  représentent respectivement les valeurs moyennes de  $u(t)$ ,  $L \frac{di}{dt}$  et  $i(t)$ .

Remarquons que :

1)  $\bar{U} = 0$ . En effet :

$$\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \left\{ \int_0^{T/2} E dt + \int_{T/2}^T -E dt \right\} = 0$$

2)  $L \frac{d\bar{i}}{dt} = 0$  car, sur une période, la valeur moyenne de la tension aux bornes d'une bobine (\*) est nulle.

Compte tenu de ces deux remarques, (35) s'écrit :

$$R \bar{i} = 0$$

Cette relation montre clairement que la valeur moyenne  $\bar{i}$  du courant  $i$  est nulle.

3.1.3. La constante de temps  $\tau$  est telle que :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$A.N. : \tau = 6 \text{ ms et } \frac{T}{2} = 0,833 \text{ ms.}$$

On constate que  $\tau > \frac{T}{2}$ .

• Pour montrer que le four se comporte comme une inductance pure, montrons que le rapport  $\left(\frac{\tau}{\frac{T}{2}}\right)^2$  est supérieur à 10.

$$A.N. : \left(\frac{\tau}{\frac{T}{2}}\right)^2 = 51,84.$$

Nous déduisons, compte tenu de ce résultat, que l'effet résistif est négligeable devant l'effet inductif. Dans ces conditions, les équations différentielles (33) et (34) se simplifient. On obtient :

– Pour  $0 \leq t < \frac{T}{2}$  :

$$L \frac{di}{dt} = E \quad (36)$$

– Pour  $\frac{T}{2} \leq t < T$  :

$$L \frac{di}{dt} = -E \quad (37)$$

(\*) Pour plus de précisions, voir Problème n° 1 question.3.3.3.

3.1.4. Les solutions des équations précédentes s'écrivent :

1) Pour  $0 \leq t < \frac{T}{2}$  :

$$i(t) = \frac{E}{L} t + K_1$$

où  $K_1$  est une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

A l'instant  $t = 0$ ,  $i(0) = -I_M$ . En effet,  $i(t)$  étant une fonction croissante, sa valeur à l'origine est nécessairement égale à  $-I_M$ . Par suite :

$$-I_M = 0 + K_1$$

D'où :  $K_1 = -I_M$

$$\text{et } i(t) = \frac{E}{L} t - I_M \quad (38)$$

2) Pour  $\frac{T}{2} \leq t < T$  :

$$i(t) = -\frac{E}{L} t + K_2$$

où  $K_2$  est une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

A l'instant  $t = \frac{T}{2}$ ,  $i\left(\frac{T}{2}\right) = +I_M$ . En effet, dans la demi-période considérée,  $i(t)$  est une fonction décroissante. De ce fait, sa valeur à  $t = \frac{T}{2}$  est nécessairement égale à  $+I_M$ . Par suite,

$$I_M = -\frac{E}{L} \cdot \frac{T}{2} + K_2$$

$$\text{D'où : } K_2 = I_M + \frac{E}{L} \cdot \frac{T}{2}$$

$$\text{et } i(t) = -\frac{E}{L} t + \left( I_M + \frac{E}{L} \cdot \frac{T}{2} \right)$$

ou encore :

$$i(t) = -\frac{E}{L} \left( t - \frac{T}{2} \right) + I_M \quad (39)$$

3.1.5. La relation précédente montre que  $i(t)$  décroît depuis  $t = \frac{T}{2}$  jusqu'à  $T$ . A cet instant  $i = i(T) = -I_M$  : le cycle recommence.

Par suite,

$$-I_M = -\frac{E}{L} \left( T - \frac{T}{2} \right) + I_M$$

$$\text{Soit } I_M = \frac{ET}{4L} \quad (40)$$

$$A.N. : I_M = 694,4 \text{ A.}$$

La courbe représentant le courant en fonction du temps est donnée figure 11.

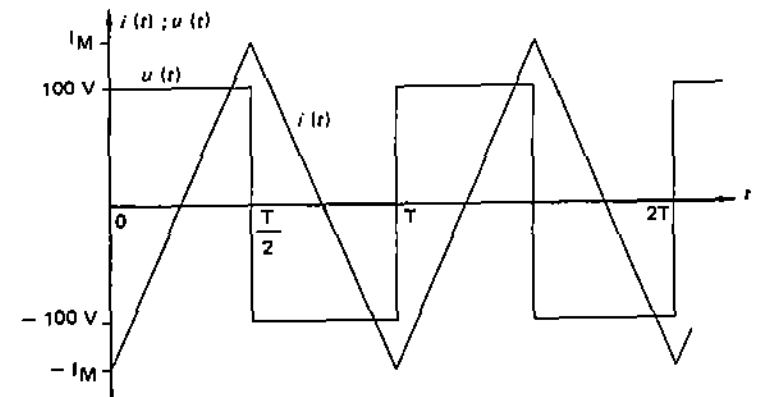


Fig. 7.11. - Graphes de  $i(t)$  et  $u(t)$ .  $I_M = 694,4 \text{ A}$ .

Remarque :

Les valeurs extrêmes du courant sont égales en valeur absolue car d'une part,  $u(t)$  est un signal carré symétrique de valeur moyenne nulle. D'autre part,  $i(t)$  est formée de rampes dont les pentes sont égales et opposées.

### 3.2. Etude de l'onduleur :

Signalons que le comportement du four comme une inductance pure ne modifie pas le fonctionnement de l'onduleur.

3.2.1. L'expression de la tension  $v_{K_1}$  aux bornes de  $K_1$  s'écrit (cf. question 2.2.2.b) :

$$v_{K_1} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq t < \frac{T}{2}$$

$$\text{et} \quad v_{K_1} = +E \quad \text{pour} \quad \frac{T}{2} \leq t < T.$$

La courbe représentative de  $v_{K_1}(t)$  est donnée figure 12.

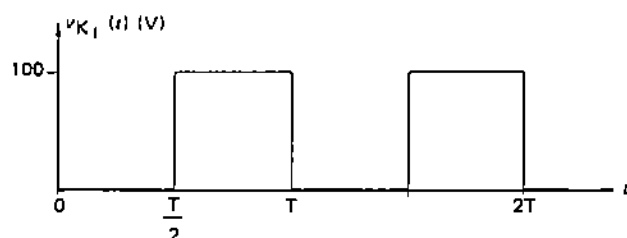


Fig. 7.12. - Courbe  $v_{K_1}(t)$ .

3.2.2. Les expressions des courants  $i_{Th_1}$ ,  $i_{D_1}$  et  $i_s$  sont obtenues en utilisant un raisonnement analogue à celui de la question 2.2.2.a. La différence résulte dans le fait que  $i(t)$  n'est plus sinusoïdal mais est formé de rampes ; avec (cf. question 3.1.4) :

$$i(t) = \frac{E}{L} t - I_M \quad \text{pour} \quad 0 \leq t < \frac{T}{2}$$

$$\text{et} \quad i(t) = -\frac{E}{L} \left( t - \frac{T}{2} \right) + I_M \quad \text{pour} \quad \frac{T}{2} \leq t < T.$$

- Les instants  $t'_1$  et  $t'_2$  pour lesquels  $i(t)$  est nul sont obtenus en posant :

$$\frac{E}{L} t'_1 - I_M = 0$$

$$\text{et} \quad -\frac{E}{L} \left( t'_2 - \frac{T}{2} \right) + I_M = 0$$

La résolution de ces deux équations donne :

$$t'_1 = I_M \frac{L}{E} \quad \text{et} \quad t'_2 = I_M \frac{L}{E} + \frac{T}{2}$$

Soit, après avoir remplacé  $I_M$  par  $\frac{ET}{4L}$  :

$$t'_1 = \frac{T}{4} \quad \text{et} \quad t'_2 = \frac{3T}{4}$$

- Expression de  $i_{Th_1}$  :

$$i_{Th_1}(t) = i(t) \quad \text{pour} \quad t'_1 < t < \frac{T}{2}$$

$$\text{et} \quad i_{Th_1}(t) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq t'_1 \quad \text{et} \quad \frac{T}{2} \leq t < T$$

- Expression de  $i_{D_1}$  :

$$i_{D_1}(t) = i(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t < t'_1$$

$$\text{et} \quad i_{D_1}(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t'_1 \leq t < T$$

- Expression de  $i_s$  :

$$i_s(t) = i(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t < \frac{T}{2}$$

$$\text{et} \quad i_s(t) = -i(t) \quad \text{pour} \quad \frac{T}{2} \leq t < T.$$

Les courbes représentant les courants  $i_{Th_1}$ ,  $i_{D_1}$  et  $i_s$  en fonction du temps sont respectivement données figures 13a, 13b et 13c.

Remarque :

D'après les figures 13a, 13b et 13c, on observe que les périodes de  $i_{Th_1}$  et  $i_{D_1}$  sont égales à  $T$  et celle de  $i_s$  à  $\frac{T}{2}$ .

3.2.3. La commutation des thyristors est forcée. En effet, ils doivent être bloqués alors que le courant qui les traverse n'est pas nul. Prenons par exemple  $Th_1$ . Il faut le bloquer à  $t = \frac{T}{2}$ . A cet instant,  $i_{Th_1}$  vaut  $I_M > 0$  (cf. figures 13a) : on doit prévoir un circuit d'extinction pour le blocage.



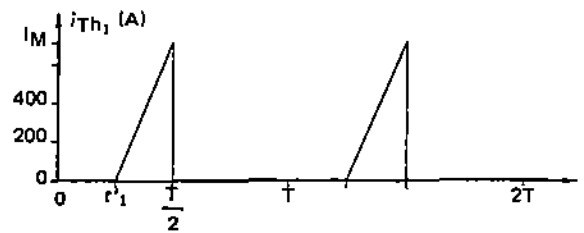


Fig. 7.13a. - Courbe  $i_{Th1}(t)$ .  $I_M = 694,4 \text{ A}$ ,  $t_1 = \frac{T}{4}$ .

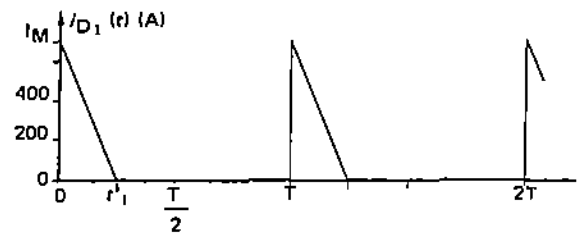


Fig. 7.13b. - Courbe  $i_{D1}(t)$ .  $I_M = 694,4 \text{ A}$ ;  $t_1 = \frac{T}{4}$ .

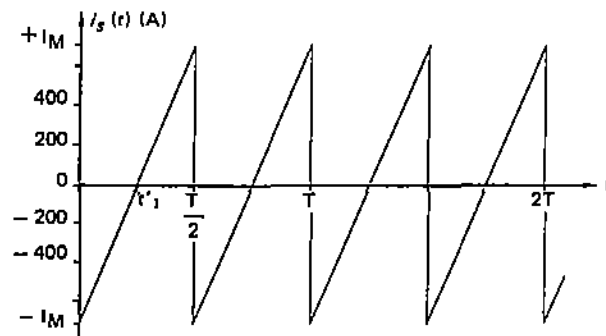


Fig. 7.13c. - Courbe  $i_s(t)$ .

### Onduleur autonome triphasé alimentant un moteur asynchrone

- Etude des harmoniques
- Etude du circuit de blocage

Dans ce problème, on se propose de faire l'étude complète d'un onduleur autonome triphasé alimenté par une batterie de f.e.m. E.

Cet onduleur — destiné à commander un moteur asynchrone triphasé — est d'une part à transistors (cf. question 31) et d'autre part, à thyristors (cf. question 32).

#### 1. Etude de l'onduleur :

L'onduleur étudié est constitué de six interrupteurs parfaits fonctionnant simultanément trois par trois (cf. figure 1).

Les séquences d'ouverture et de fermeture des six interrupteurs sont données dans le tableau I.

	0	T/6	T/3	T/2	2T/3	5T/6	T
$K_1$	1	1	1	0	0	0	
$K_2$	0	1	1	1	0	0	
$K_3$	0	0	1	1	1	0	
$K_4$	0	0	0	1	1	1	
$K_5$	1	0	0	0	1	1	
$K_6$	1	1	0	0	0	1	

Tableau I : Séquences de fermeture et d'ouverture des interrupteurs.  
1 : Etat fermé. 0 : Etat ouvert.

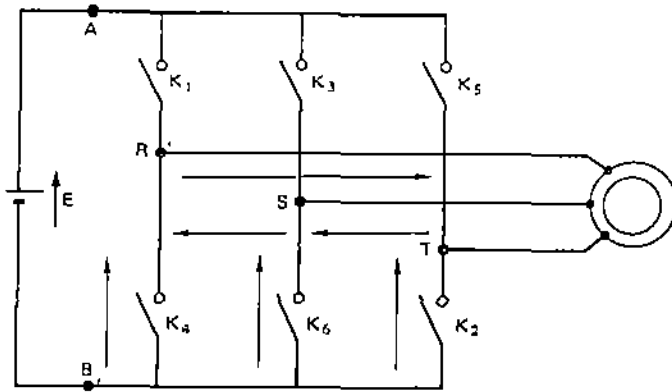


Fig. 8.1. - Schéma de principe de l'onduleur.

On remarquera que chaque interrupteur est fermé pendant une demi-période et ouvert pendant la demi-période suivante.

1.1. Représenter en fonction du temps :

- les tensions simples  $u_{RB}$ ,  $u_{SB}$  et  $u_{TB}$ .
- les tensions composées  $u_{RS}$ ,  $u_{ST}$  et  $u_{TR}$ .

1.2. Calculer :

- les valeurs efficaces  $U_{RB}$  de  $u_{RB}$  et  $U_{RS}$  de  $u_{RS}$ .
- les valeurs moyennes  $\bar{U}_{RB}$  de  $u_{RB}$  et  $\bar{U}_{RS}$  de  $u_{RS}$ .

On prendra  $E = 400 \text{ V}$  et  $f = 600 \text{ Hz}$ .

## 2. Alimentation du moteur :

On rappelle que la charge de l'onduleur est un moteur asynchrone triphasé équilibré. Celui-ci est schématisé par trois circuits ( $R_1$ ,  $L_1$ ) montés en étoile (cf. figure 2). On donne :

$$R_1 = 15 \Omega \text{ et } L_1 = 2,3 \text{ mH.}$$

2.1. Etude en régime non sinusoïdal :

2.1.1. Exprimer les tensions  $u_{RN}$ ,  $u_{SN}$  et  $u_{TN}$  en fonction des courants  $i_R$ ,  $i_S$  et  $i_T$ .

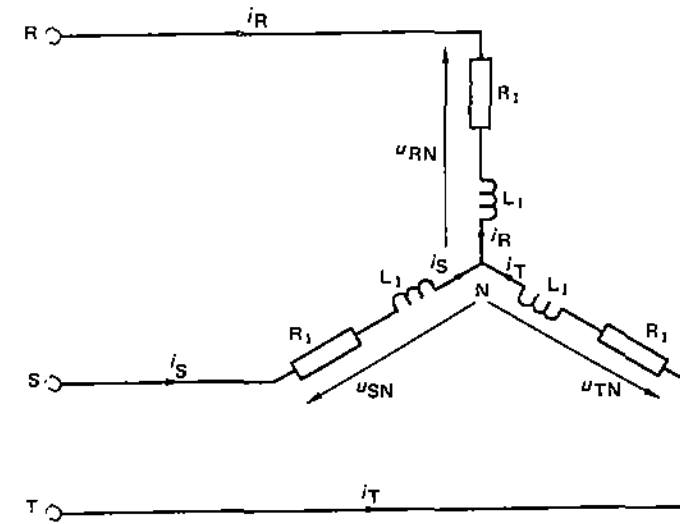


Fig. 8.2. - Schématisation du moteur asynchrone.

2.1.2.a. Montrer que la somme ( $u_{RN} + u_{SN} + u_{TN}$ ) est nulle.

2.1.2.b. En déduire les expressions de  $u_{RN}$ ,  $u_{SN}$  et  $u_{TN}$  en fonction des tensions composées  $u_{RS}$ ,  $u_{ST}$  et  $u_{TR}$ .

2.1.2.c. Représenter en fonction du temps, les tensions  $u_{RN}$ ,  $u_{SN}$  et  $u_{TN}$ .

2.1.3. Calculer les valeurs efficace et moyenne de  $u_{RN}$ .

## 2.2. Développement en série de Fourier :

2.2.1.a. Montrer que le développement en série de Fourier de  $u_{RS}$  s'écrit :

$$u_{RS} = \frac{2E\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{5} \sin\left(5\omega t - \frac{5\pi}{3}\right) + \frac{1}{7} \sin\left(7\omega t - \frac{7\pi}{3}\right) - \frac{1}{11} \sin\left(11\omega t - \frac{11\pi}{3}\right) + \frac{1}{13} \sin\left(13\omega t - \frac{13\pi}{3}\right) \dots \right\}$$

On rappelle que :

$$\cos n \frac{5\pi}{3} = \cos n\pi \cos n \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{et } \sin n \frac{5\pi}{3} = \cos n\pi \sin n \frac{2\pi}{3}$$

2.2.1.b. Donner sans faire de longs calculs, les développements de  $u_{ST}$  et  $u_{TR}$ .

2.2.2. Dédire des résultats précédents, les développements de  $u_{RN}$ ,  $u_{SN}$  et  $u_{TN}$ .

### 2.3. Etude en régime sinusoïdal :

2.3.1. Montrer qu'on peut considérer les courants  $i_R$ ,  $i_S$  et  $i_T$  comme sinusoïdaux. (On admet qu'une grandeur est sinusoïdale si le taux de distorsion est  $\leq 10\%$ ).

2.3.2. On néglige l'influence des harmoniques de rang  $> 1$ .

- Donner les expressions en fonction du temps des tensions simples et des courants dans les phases du moteur.
- Représenter ces grandeurs.

### 3. Réalisation de l'onduleur :

Dans cette partie, les tensions  $u_{RN}$ ,  $u_{SN}$  et  $u_{TN}$  et les courants  $i_R$ ,  $i_S$  et  $i_T$  sont supposés sinusoïdaux.

#### 3.1. L'onduleur est à transistors (cf. figure 3) :

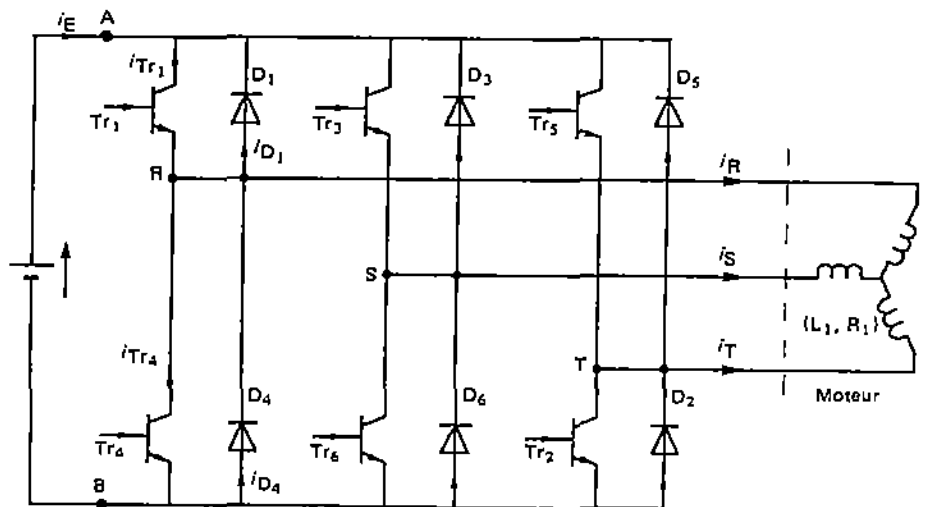


Fig. B.3. - Schéma de l'onduleur à transistors.

- Les composants utilisés sont supposés parfaits.
- Chaque transistor reçoit sur sa base un signal  $v_{be}$  rectangulaire de période  $T$  et de durée  $T/2$  (cf. figure 4). Ce signal est tel que :
  - lorsque  $v_{be} = 0$ , le transistor est bloqué.
  - lorsque  $v_{be} = 1$ , le courant de base est suffisant pour que le transistor soit saturé. On admet que  $\beta \gg 1$ .

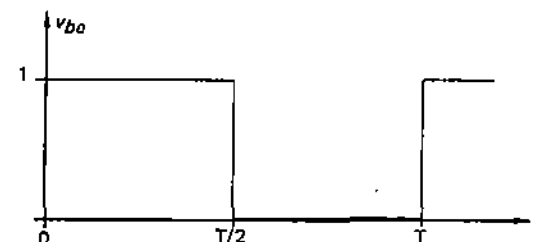


Fig. 8.4.

- Les transistors  $Tr_1$  à  $Tr_6$  sont commandés successivement par des impulsions séparées par un sixième de période (cf. tableau II).

	0	T/6	T/3	T/2	2T/3	5T/6	T
$v_{be1}$	1	1	1	0	0	0	
$v_{be2}$	0	1	1	1	0	0	
$v_{be3}$	0	0	1	1	1	0	
$v_{be4}$	0	0	0	1	1	1	
$v_{be5}$	1	0	0	0	1	1	
$v_{be6}$	1	1	0	0	0	1	

Tableau II : Séquences de commande des transistors.  
1 : transistor saturé. 0 : transistor bloqué.

3.1.1. Montrer que la présence des diodes est indispensable pour que le montage puisse fonctionner.

3.1.2. Indiquer en traits pleins les séquences pendant lesquelles les transistors et les diodes sont passants.

3.1.3. Représenter en fonction du temps les courants :

- $i_{Tr1}$  et  $i_{Tr4}$  dans les transistors  $Tr_1$  et  $Tr_4$ .
- $i_{D1}$  et  $i_{D4}$  dans les diodes  $D_1$  et  $D_4$ .
- $i_E$  dans la source.

3.1.4. Calculer les valeurs moyenne  $\bar{i}_{T1}$  de  $i_{T1}$ ,  $\bar{i}_{D1}$  de  $i_{D1}$  et  $\bar{i}_E$  dans la source de tension continue E.

3.1.5. Montrer que la puissance active fournie par la source de tension continue E s'écrit :

$$P = E \cdot \bar{i}_E$$

$\bar{i}_E$  étant la valeur moyenne du courant  $i_E$ .

3.2. L'onduleur est à thyristors (cf. figure 5) :

- Le fonctionnement de cet onduleur est identique à celui à transistors. Il ne sera donc pas étudié.
- La difficulté réside dans la commutation « état passant-état bloqué ». En effet, il faut quelquefois bloquer un thyristor alors que le courant qui le traverse est supérieur au courant de maintien. Pour remédier à cet inconvénient, on utilise un circuit d'extinction forcée.

Dans cette partie, on se propose d'étudier un tel circuit. Celui-ci assure par l'intermédiaire des thyristors d'aiguillage  $Th'_1$  à  $Th'_6$ , le blocage cyclique des thyristors principaux  $Th_1$  à  $Th_6$  (cf. figure 5).

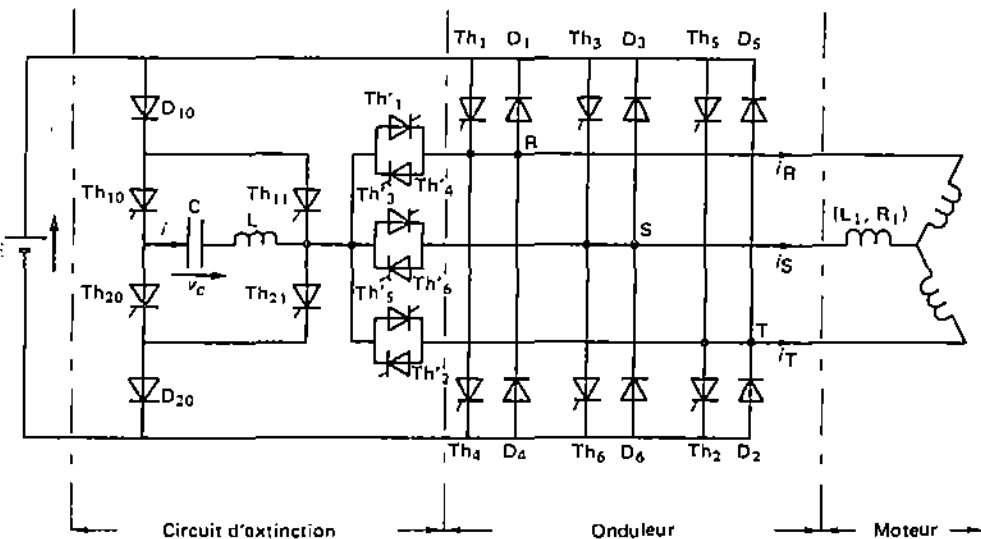


Fig. 8.5. - Schéma complet de l'onduleur à thyristors.

- Les composants utilisés sont tous supposés parfaits. On admet néanmoins que les thyristors  $Th_1$  à  $Th_6$  ont un temps de blocage  $t_q \approx 10 \mu s$ .

- $Th_1$  à  $Th_6$  sont commandés successivement par des impulsions (de durée  $T/4$ ) séparées par un sixième de période (cf. tableau III).

	0	T/6	T/3	T/2	2T/3	5T/6	T
$Th_1$	1	1	1	0	0	0	
$Th_2$	0	1	1	1	0	0	
$Th_3$	0	0	1	1	1	0	
$Th_4$	0	0	0	1	1	1	
$Th_5$	1	0	0	0	1	1	
$Th_6$	1	1	0	0	0	1	

Tableau III : Séquences d'amorçage et de blocage des thyristors principaux.  
1 : état passant. 0 : état bloqué.

- Les gâchettes des autres thyristors reçoivent en temps voulu des impulsions très brèves assurant leur fermeture.
- La bobine de self L a une résistance nulle et le condensateur C est initialement déchargé. On donne :

$$C = 12,74 \text{ nF et } L = 3,18 \text{ mH.}$$

3.2.1. Charge du condensateur.

On amorce  $Th_{11}$  et  $Th_{20}$ .

- Ecrire l'équation différentielle liant  $v_c$  à L et C.
- Calculer l'instant  $t_0$  où  $i$  s'annule.
- Représenter graphiquement  $i$  et  $v_c$  en fonction du temps.
- Donner la valeur finale de  $v_c$  et l'état des thyristors  $Th_{11}$  et  $Th_{20}$ .

3.2.2. On étudie en premier lieu le désamorçage de  $Th_1$  et  $Th_2$  et, en second lieu, celui de l'ensemble des thyristors principaux.

- A l'instant  $t_1 = \frac{T}{2} - t_0$ , il faut bloquer  $Th_1$  (cf. tableau III). Pour cela, on rend passant  $Th'_1$  et  $Th_{10}$ . Expliquer pourquoi.

Pour quelle raison est-il nécessaire d'amorcer  $Th_{21}$  à l'instant  $\frac{T}{2} - \frac{t_0}{2}$  une fois  $Th_1$  ouvert ?

Dans ce cas, la tension  $v_c$  aux bornes du condensateur C évolue.

- Ecrire l'équation différentielle liant  $v_c$  à L et C.
- Représenter graphiquement  $i$  et  $v_c$  en fonction du temps.
- Donner la valeur finale de  $v_c$  et l'état des thyristors  $Th_{10}$ ,  $Th_{21}$  et  $Th'_1$ .

3.2.3. A l'instant  $t_2 = \frac{2T}{3} - t_0$ ,  $Th_2$  doit être bloqué. Quel(s) thyristor(s) doit-on amorcer :

- pour bloquer  $Th_2$  ?
- après avoir bloqué  $Th_2$  ?

3.2.4. A l'instant  $t_3 = \frac{5T}{6} - t_0$ , c'est  $Th_3$  qui doit être ouvert. Expliquer rapidement ce qu'il faut faire.

3.2.5. Indiquer le processus à suivre pour bloquer les six thyristors principaux. On précisera clairement les différentes dates d'amorçage et de blocage.

(Niveau B.T.S. électrotechnique, Maîtrise EEA)

### Solution et commentaires

#### 1. Etude de l'onduleur :

##### 1.1. Reprenons le schéma de la figure 1.

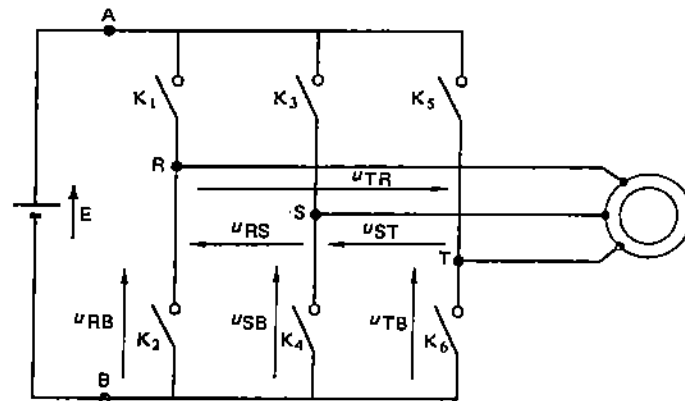


Fig. 8.1 bis.

La loi des mailles appliquée au circuit de la figure 1 bis permet d'écrire :

$$u_{RS} = u_{RB} - u_{SB} \quad (1)$$

$$u_{ST} = u_{SB} - u_{TB} \quad (2)$$

$$u_{TR} = u_{TB} - u_{RB} \quad (3)$$

D'après le tableau I, tous les sixièmes de période, trois interrupteurs sont fermés. Aussi, pour représenter les tensions demandées, on étudiera le fonctionnement de l'onduleur dans l'intervalle  $[0, \frac{T}{6}]$  puis on généralisera l'étude à la totalité de la période.

#### • Fonctionnement de l'onduleur dans l'intervalle $[0, \frac{T}{6}]$ :

Les interrupteurs  $K_1$ ,  $K_5$  et  $K_6$  sont fermés. Dans ce cas, le schéma de la figure 1 bis est équivalent à celui donné figure 6.

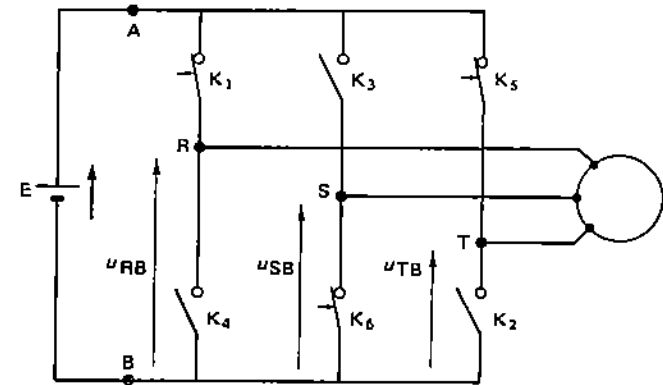


Fig. 8.6.

D'après la figure 6 :

$$u_{RB} = E \quad u_{SB} = 0 \quad \text{et} \quad u_{TB} = E$$

Portons ces résultats dans les relations (1), (2) et (3). Il vient :

$$u_{RS} = E \quad u_{ST} = -E \quad \text{et} \quad u_{TR} = E$$

#### • Fonctionnement de l'onduleur durant une période :

Il suffit de faire une étude analogue à la précédente dans les intervalles  $[T/6, T/3]$ ,  $[T/3, T/2]$ ,  $[T/2, 2T/3]$ ,  $[2T/3, 5T/6]$  et  $[5T/6, T]$ .

Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau IV. Ils représentent les expressions des tensions simples et composées en fonction du temps.

	0	T/6	T/3	T/2	2T/3	5T/6	T
$u_{RB} =$	E	E	E	0	0	0	(4)
$u_{SB} =$	0	0	E	E	E	0	(5)
$u_{TB} =$	E	0	0	0	E	E	(6)
$u_{RS} =$	E	E	0	-E	-E	0	(7)
$u_{ST} =$	-E	0	E	E	0	-E	(8)
$u_{TR} =$	0	-E	-E	0	E	E	(9)

Tableau IV : expressions en fonction du temps des tensions simples ( $u_{RB}$ ,  $u_{SB}$  et  $u_{TB}$ ) et composées ( $u_{RS}$ ,  $u_{ST}$  et  $u_{TR}$ ).

Les courbes représentatives de  $u_{RB}$ ,  $u_{SB}$  et  $u_{TB}$  sont données figures 7 et celles de  $u_{RS}$ ,  $u_{ST}$  et  $u_{TR}$ , figures 8.

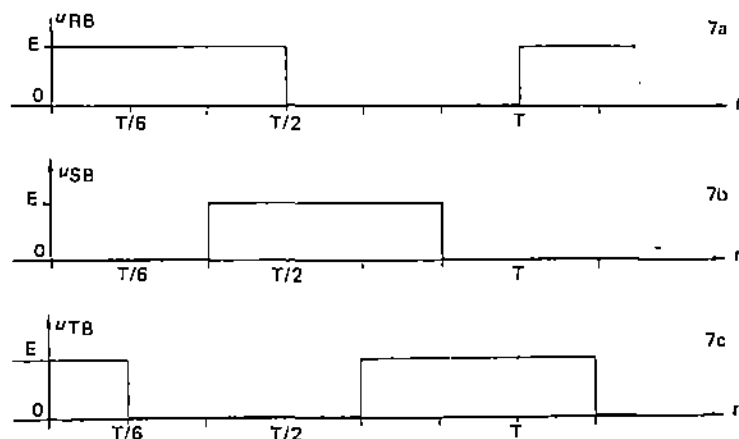


Fig. 8.7. - Courbes  $u_{RB}(t)$ ,  $u_{SB}(t)$  et  $u_{TB}(t)$ .

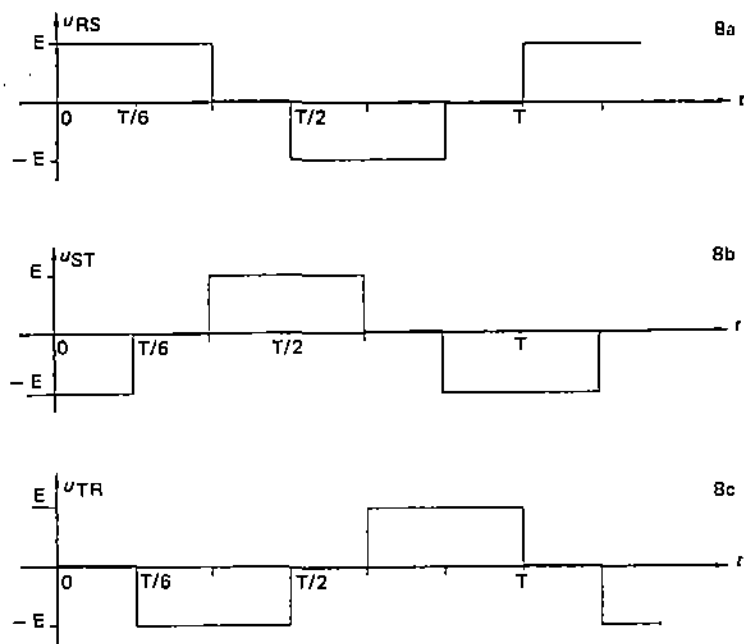


Fig. 8.8. - Courbes  $u_{RS}(t)$ ,  $u_{ST}(t)$  et  $u_{TR}(t)$ .

Remarque :

Les courbes des figures 7 et 8 ont pour période  $T$  et sont déphasées entre elles de  $T/3$ .

1.2.a. Par définition :

$$U_{RB}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u_{RB}^2 dt$$

$$\text{et } U_{RS}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u_{RS}^2 dt$$

$U_{RB}$  étant la valeur efficace de  $u_{RB}$  et  $U_{RS}$ , celle de  $u_{RS}$ .

En substituant  $u_{RB}$  par (4) et  $u_{RS}$  par (7), il vient :

$$U_{RB}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} E^2 dt$$

$$\text{et } U_{RS}^2 = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{T/3} E^2 dt + \int_{T/2}^{5T/6} (-E)^2 dt \right]$$

Le calcul de ces deux intégrales donne :

$$U_{RB}^2 = \frac{E^2}{2} \quad \text{et} \quad U_{RS}^2 = \frac{2}{3} E^2$$

D'où :

$$U_{RB} = \frac{E}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad U_{RS} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot E$$

$$\text{A.N. : } U_{RB} = 282,84 \text{ V} \quad \text{et} \quad U_{RS} = 326,6 \text{ V}$$

1.2.b. Par définition :

$$\bar{U}_{RB} = \frac{1}{T} \int_0^T u_{RB} dt$$

$$\text{et } \bar{U}_{RS} = \frac{1}{T} \int_0^T u_{RS} dt$$

$\bar{U}_{RB}$  étant la valeur moyenne de  $u_{RB}$  et  $U_{RS}$ , celle de  $u_{RS}$ .

En remplaçant  $u_{RB}$  par (4) et  $u_{RS}$  par (7), il vient :

$$\bar{U}_{RB} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} E dt$$

$$\text{et } \bar{U}_{RS} = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{T/3} E dt + \int_{T/2}^{5T/6} (-E) dt \right]$$

Le calcul de ces deux intégrales donne :

$$\bar{U}_{RB} = \frac{E}{2} \quad \text{et} \quad \bar{U}_{RS} = 0$$

$$A.N. : \bar{U}_{RB} = 200 \text{ V} \quad \text{et} \quad \bar{U}_{RS} = 0 \text{ V}$$

## 2. Alimentation du moteur :

### 2.1. Etude en régime non sinusoïdal :

2.1.1. D'après la figure 2, on peut écrire :

— au nœud N :

$$i_R + i_S + i_T = 0 \quad (10)$$

— le long de la maille (R, N, R) :

$$u_{RN} = R_1 i_R + L_1 \frac{di_R}{dt} \quad (11)$$

— le long de la maille (S, N, S) :

$$u_{SN} = R_1 i_S + L_1 \frac{di_S}{dt} \quad (12)$$

— le long de la maille (T, N, T) :

$$u_{TN} = R_1 i_T + L_1 \frac{di_T}{dt} \quad (13)$$

2.1.2.a. En additionnant membre à membre les trois dernières équations, on obtient :

$$u_{RN} + u_{SN} + u_{TN} = R_1 (i_R + i_S + i_T) + L_1 \left( \frac{di_R}{dt} + \frac{di_S}{dt} + \frac{di_T}{dt} \right)$$

ou encore :

$$u_{RN} + u_{SN} + u_{TN} = R_1 (i_R + i_S + i_T) + L_1 \frac{d}{dt} (i_R + i_S + i_T)$$

Sachant que  $i_R + i_S + i_T = 0$  (cf. formule (10)), on déduit que :

$$u_{RN} + u_{SN} + u_{TN} = 0 \quad (14)$$

2.1.2.b. Les tensions composées  $u_{RS}$ ,  $u_{ST}$  et  $u_{TR}$  sont liées aux tensions simples par les relations suivantes :

$$u_{RS} = u_{RN} - u_{SN} \quad (15)$$

$$u_{ST} = u_{SN} - u_{TN} \quad (16)$$

$$\text{et } u_{TR} = u_{TN} - u_{RN} \quad (17)$$

Pour trouver les expressions de  $u_{RN}$ ,  $u_{SN}$  et  $u_{TN}$  en fonction de  $u_{RS}$ ,  $u_{ST}$  et  $u_{TR}$ , soustrayons membre à membre (17) de (15), (15) de (16) et (16) de (17). Il vient :

$$u_{RS} - u_{TR} = 2 u_{RN} - (u_{SN} + u_{TN}) \quad (18)$$

$$u_{ST} - u_{RS} = 2 u_{SN} - (u_{RN} + u_{TN}) \quad (19)$$

$$\text{et } u_{TR} - u_{ST} = 2 u_{TN} - (u_{RN} + u_{SN}) \quad (20)$$

L'identité (14) donne successivement :

$$(u_{SN} + u_{TN}) = -u_{RN}$$

$$(u_{RN} + u_{TN}) = -u_{SN}$$

$$(u_{RN} + u_{SN}) = -u_{TN}$$

Portons ces résultats dans les égalités (18), (19) et (20). On obtient :

$$3 u_{RN} = (u_{RS} - u_{TR})$$

$$3 u_{SN} = (u_{ST} - u_{RS})$$

$$3 u_{TN} = (u_{TR} - u_{ST})$$

Par suite :

$$u_{RN} = \frac{1}{3} (u_{RS} - u_{TR}) \quad (21)$$

$$u_{SN} = \frac{1}{3} (u_{ST} - u_{RS}) \quad (22)$$

$$\text{et } u_{TN} = \frac{1}{3} (u_{TR} - u_{ST}) \quad (23)$$

2.1.2.c. Pour représenter les tensions  $u_{RN}$ ,  $u_{SN}$  et  $u_{TN}$ , il faut déterminer leurs expressions en fonction du temps. Pour cela, remplaçons dans les trois relations précédentes,  $u_{RS}$  par (7),  $u_{ST}$  par (8) et  $u_{TR}$  par (9). Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau V.

	0	T/6	T/3	T/2	2T/3	5T/6	T
$u_{RN} =$	$\frac{E}{3}$	$\frac{2E}{3}$	$\frac{E}{3}$	$-\frac{E}{3}$	$-\frac{2E}{3}$	$-\frac{E}{3}$	
$u_{SN} =$	$-\frac{2E}{3}$	$-\frac{E}{3}$	$\frac{E}{3}$	$\frac{2E}{3}$	$\frac{E}{3}$	$-\frac{E}{3}$	
$u_{TN} =$	$\frac{E}{3}$	$-\frac{E}{3}$	$-\frac{2E}{3}$	$-\frac{E}{3}$	$\frac{E}{3}$	$\frac{2E}{3}$	

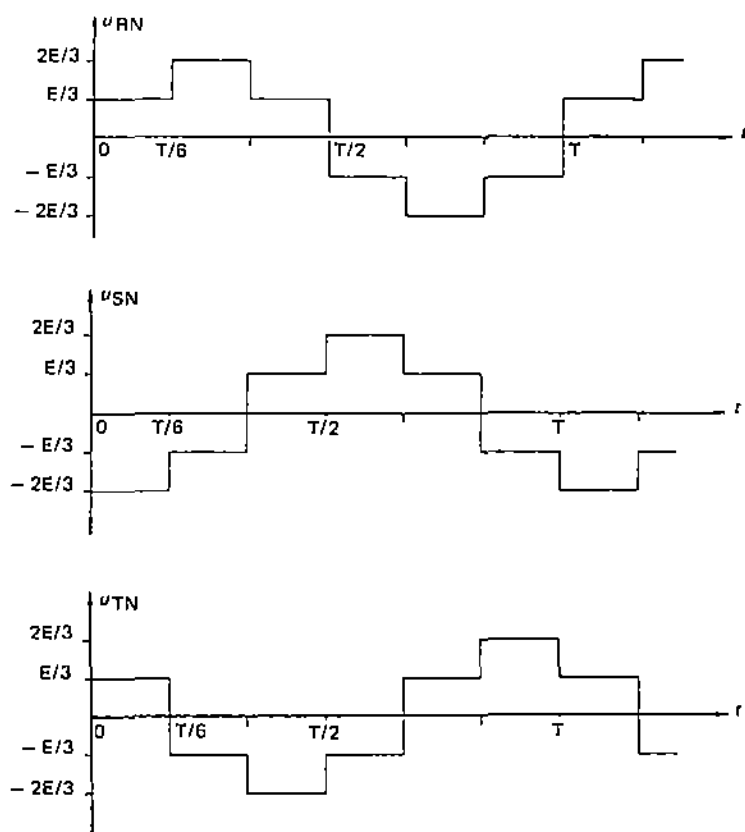
(24)

(25)

(26)

Tableau V : Expressions en fonction du temps des tensions  $u_{RN}$ ,  $u_{SN}$  et  $u_{TN}$ .

Les courbes représentatives de  $u_{RN}$ ,  $u_{SN}$  et  $u_{TN}$  sont données figure 9.

Fig. 8.9. - Courbes  $u_{RN}(t)$ ,  $u_{SN}(t)$  et  $u_{TN}(t)$ .

2.1.3. Par définition :

$$U_{RN}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u_{RN}^2 dt$$

$$\text{et } \bar{U}_{RN} = \frac{1}{T} \int_0^T u_{RN} dt$$

$U_{RN}$  étant la valeur efficace de  $u_{RN}$  et  $\bar{U}_{RN}$ , sa valeur moyenne.

En substituant  $u_{RN}$  par la relation (24), il vient :

$$U_{RN}^2 = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{T/6} \left(\frac{E}{3}\right)^2 dt + \int_{T/6}^{T/3} \left(\frac{2E}{3}\right)^2 dt + \int_{T/3}^{T/2} \left(\frac{E}{3}\right)^2 dt + \right. \\ \left. + \int_{T/2}^{2T/3} \left(-\frac{E}{3}\right)^2 dt + \int_{2T/3}^{5T/6} \left(-\frac{2E}{3}\right)^2 dt + \int_{5T/6}^T \left(-\frac{E}{3}\right)^2 dt \right]$$

et

$$\bar{U}_{RN} = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{T/6} \left(\frac{E}{3}\right) dt + \int_{T/6}^{T/3} \left(\frac{2E}{3}\right) dt + \int_{T/3}^{T/2} \left(\frac{E}{3}\right) dt + \right. \\ \left. + \int_{T/2}^{2T/3} \left(-\frac{E}{3}\right) dt + \int_{2T/3}^{5T/6} \left(-\frac{2E}{3}\right) dt + \int_{5T/6}^T \left(-\frac{E}{3}\right) dt \right]$$

Le calcul de ces intégrales donne :

$$\bullet \quad U_{RN}^2 = \frac{2}{9} E^2$$

$$\text{D'où } U_{RN} = \frac{\sqrt{2}}{3} E$$

$$\bullet \quad \text{et : } \bar{U}_{RN} = 0$$

$$\text{A.N. : } U_{RN} = 188,56 \text{ V} \quad \text{et} \quad \bar{U}_{RN} = 0 \text{ V}$$



## 2.2. Développement en série de Fourier :

2.2.1. Rappelons que les tensions  $u_{ST}$  et  $u_{TR}$  sont respectivement déphasées de  $T/3$  et de  $2T/3$  par rapport à  $u_{RS}$  (cf. figure 8). Pour cette raison, leur développement en série de Fourier sera obtenue en faisant un simple changement de variable (voir question 2.2.1.b.).

### 2.2.1.a. Développement de $u_{RS}$ :

Etant périodique, le signal  $u_{RS}$  peut se décomposer en série de Fourier comme suit :

$$u_{RS}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (27)$$

où  $a_0$ ,  $a_n$  et  $b_n$  sont les coefficients de Fourier ; avec :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u_{RS}(t) dt \quad (28)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u_{RS}(t) \cos n\omega t dt \quad (29)$$

$$\text{et } b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u_{RS}(t) \sin n\omega t dt \quad (30)$$

Les coefficients  $a_0$ ,  $a_n$  et  $b_n$  sont obtenus en remplaçant  $u_{RS}(t)$  par la relation (7).

#### • Détermination de $a_0$ :

$$a_0 = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{T/3} E dt + \int_{T/2}^{5T/6} (-E) dt \right]$$

On obtient :  $a_0 = 0$

#### • Détermination de $a_n$ :

$$a_n = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{T/3} E \cos n\omega t dt + \int_{T/2}^{5T/6} (-E) \cos n\omega t dt \right]$$

Le calcul de  $a_n$  donne :

$$a_n = \frac{2E}{T\omega n} \left( \sin n \frac{2\pi}{3} - \sin n \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$\text{Or } T\omega = 2\pi \text{ et } \sin n \frac{5\pi}{3} = \cos n \pi \sin n \frac{2\pi}{3}$$

Par conséquent :

$$a_n = \frac{E}{\pi n} \sin n \frac{2\pi}{3} (1 - \cos n \pi)$$

En remarquant que  $\sin n \frac{2\pi}{3} = 2 \sin n \frac{\pi}{3} \cos n \frac{\pi}{3}$ ,  $a_n$  peut aussi s'écrire :

$$a_n = \frac{2E}{\pi n} (1 - \cos n \pi) \sin n \frac{\pi}{3} \cos n \frac{\pi}{3}$$

— Lorsque  $n$  est pair ou un multiple de 3 :

$$a_n = 0$$

car  $1 - \cos n \pi = 0$  (pour  $n$  pair) et  $\sin n \frac{\pi}{3} = 0$  (pour  $n$  multiple de 3).

— Lorsque  $n$  est impair sans être un multiple de 3 :

$$a_n = \frac{4E}{\pi n} \sin n \frac{\pi}{3} \cos n \frac{\pi}{3} \quad (31)$$

car  $1 - \cos n \pi = 2$

#### • Détermination de $b_n$ :

$$b_n = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{T/3} E \sin n\omega t dt + \int_{T/2}^{5T/6} (-E) \sin n\omega t dt \right]$$

Le calcul de  $b_n$  donne :

$$b_n = \frac{2E}{T\omega n} \left[ (1 - \cos n \pi) - \left( \cos n \frac{2\pi}{3} - \cos n \frac{5\pi}{3} \right) \right]$$

$$\text{Or } T\omega = 2\pi \text{ et } \cos n \frac{5\pi}{3} = \cos n \pi \cos n \frac{2\pi}{3}$$

Par conséquent :

$$b_n = \frac{E}{\pi n} (1 - \cos n \pi) \left( 1 - \cos n \frac{2\pi}{3} \right)$$

En remarquant que  $(1 - \cos n \frac{2\pi}{3}) = 2 \sin^2 n \frac{\pi}{3}$ ,  $b_n$  peut aussi s'écrire :

$$b_n = \frac{2E}{\pi n} (1 - \cos n \pi) \sin^2 n \frac{\pi}{3}$$

– Lorsque  $n$  est pair ou un multiple de 3 :

$$b_n = 0$$

– Lorsque  $n$  est impair sans être un multiple de 3 :

$$b_n = \frac{4E}{\pi n} \sin^2 n \frac{\pi}{3} \quad (32)$$

Puisque d'une part les harmoniques de rang pair et multiple de 3 n'existent pas et d'autre part,  $a_0$  est nul,  $u_{RS}$  s'écrit : (cf. relation (27)) :

$$u_{RS}(t) = (a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) + (a_5 \cos 5\omega t + b_5 \sin 5\omega t) + \\ + (a_7 \cos 7\omega t + b_7 \sin 7\omega t) + (a_{11} \cos 11\omega t + b_{11} \sin 11\omega t) + \dots \quad (33)$$

Calculons les sommes à l'intérieur des parenthèses :

A partir des formules (31) et (32), on déduit :

$$a_1 = \frac{4E}{\pi} \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad b_1 = \frac{4E}{\pi} \sin^2 \frac{\pi}{3}$$

Par suite :

$$(a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) = \frac{4E}{\pi} \sin \frac{\pi}{3} \left( \cos \omega t \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin \omega t \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{Or } \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \left( \cos \omega t \cos \frac{\pi}{3} + \sin \omega t \sin \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{3} \right)$$

D'où :

$$\bullet (a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) = \frac{2E\sqrt{3}}{\pi} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{3} \right)$$

En procédant de façon similaire, on obtient :

$$\bullet (a_5 \cos 5\omega t + b_5 \sin 5\omega t) = -\frac{2E\sqrt{3}}{5\pi} \cos \left( 5\omega t - \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$\bullet (a_7 \cos 7\omega t + b_7 \sin 7\omega t) = \frac{2E\sqrt{3}}{7\pi} \cos \left( 7\omega t - \frac{7\pi}{3} \right)$$

$$\bullet (a_{11} \cos 11\omega t + b_{11} \sin 11\omega t) = -\frac{2E\sqrt{3}}{11\pi} \cos \left( 11\omega t - \frac{11\pi}{3} \right)$$

• ... etc...

Portons ces résultats dans l'équation (33). Il vient :

$$u_{RS}(t) = \frac{2E\sqrt{3}}{\pi} \left[ \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{5} \cos \left( 5\omega t - \frac{5\pi}{3} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{7} \cos \left( 7\omega t - \frac{7\pi}{3} \right) - \frac{1}{11} \cos \left( 11\omega t - \frac{11\pi}{3} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{13} \cos \left( 13\omega t - \frac{13\pi}{3} \right) \dots \right] \quad (34)$$

On retrouve bien le résultat de l'énoncé.

### 2.2.1.b. Développement de $u_{ST}$ et $u_{TR}$ :

Effectuons les changements de variable  $t' = t - T/3$  pour  $u_{ST}$  et  $t'' = t - 2T/3$  pour  $u_{TR}$ . Dans ce cas, les courbes représentatives de  $u_{ST}$  et  $u_{TR}$  (cf. figures 8b et 8c) deviennent équivalentes à celles données figures 10a et 10b.

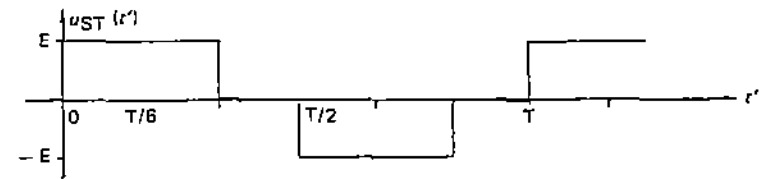


Fig. 8.10.a. - Courbe  $u_{ST}(t')$  ; avec  $t' = t - T/3$ .

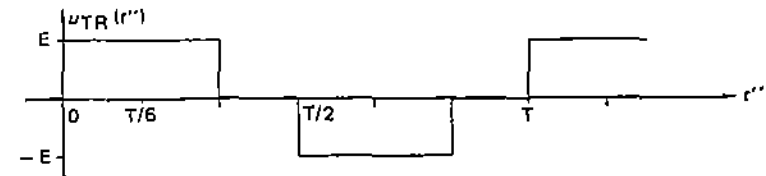


Fig. 8.10.b. - Courbe  $u_{TR}(t'')$  ; avec  $t'' = t - 2T/3$ .

On remarque que les graphes de  $u_{ST}(t')$  et  $u_{TR}(t'')$  sont identiques à celui de  $u_{RS}(t)$ . Par conséquent, leurs développements en série de Fourier s'écrivent (cf. relation (34)) :

$$u_{ST}(t') = \frac{2E\sqrt{3}}{\pi} \left[ \cos \left( \omega t' - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{5} \cos \left( 5\omega t' - \frac{5\pi}{3} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{7} \cos \left( 7\omega t' - \frac{7\pi}{3} \right) - \frac{1}{11} \cos \left( 11\omega t' - \frac{11\pi}{3} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{13} \cos \left( 13\omega t' - \frac{13\pi}{3} \right) \dots \right] \quad (35)$$

et

$$u_{TR}(t'') = \frac{2E\sqrt{3}}{\pi} \left[ \cos\left(\omega t'' - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{5} \cos\left(5\omega t'' - \frac{5\pi}{3}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{7} \cos\left(7\omega t'' - \frac{7\pi}{3}\right) - \frac{1}{11} \cos\left(11\omega t'' - \frac{11\pi}{3}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{13} \cos\left(13\omega t'' - \frac{13\pi}{3}\right) \dots \right] \quad (36)$$

Pour obtenir les développements en fonction de  $t$ , il suffit de remplacer  $t'$  par  $(t - T/3)$  dans l'identité (35) et  $t''$  par  $(t - 2T/3)$  dans l'identité (36). On trouve – tous calculs faits – :

$$u_{ST}(t) = \frac{2E\sqrt{3}}{\pi} \left[ \cos(\omega t - \pi) - \frac{1}{5} \cos(5\omega t - 5\pi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{7} \cos(7\omega t - 7\pi) - \frac{1}{11} \cos(11\omega t - 11\pi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{13} \cos(13\omega t - 13\pi) \dots \right] \quad (37)$$

et

$$u_{TR}(t) = \frac{2E\sqrt{3}}{\pi} \left[ \cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{3}\right) - \frac{1}{5} \cos\left(5\omega t - \frac{25\pi}{3}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{7} \cos\left(7\omega t - \frac{35\pi}{3}\right) - \frac{1}{11} \cos\left(11\omega t - \frac{55\pi}{3}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{13} \cos\left(13\omega t - \frac{65\pi}{3}\right) \dots \right] \quad (38)$$

2.2.2. Le développement de  $u_{RN}$  est obtenu en remplaçant dans la formule (21),  $u_{RS}$  par (34) et  $u_{TR}$  par (38). Par suite :

$$u_{RN}(t) = \frac{2E\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \left[ \left\{ \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{3}\right) \right\} - \right. \\ \left. - \frac{1}{5} \left\{ \cos\left(5\omega t - \frac{5\pi}{3}\right) - \cos\left(5\omega t - \frac{25\pi}{3}\right) \right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{7} \left\{ \cos\left(7\omega t - \frac{7\pi}{3}\right) - \cos\left(7\omega t - \frac{35\pi}{3}\right) \right\} \dots \right] \quad (39)$$

Calculons les différences à l'intérieur des accolades :

On a :

$$\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{3}\right) = -2 \sin(\omega t - \pi) \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Or : } \sin(\omega t - \pi) = -\sin \omega t \quad \text{et} \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Par suite :

$$\bullet \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \sin \omega t$$

En procédant de façon similaire, on obtient :

$$\bullet \cos\left(5\omega t - \frac{5\pi}{3}\right) - \cos\left(5\omega t - \frac{25\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \sin 5\omega t$$

$$\bullet \cos\left(7\omega t - \frac{7\pi}{3}\right) - \cos\left(7\omega t - \frac{35\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \sin 7\omega t$$

$$\bullet \cos\left(11\omega t - \frac{11\pi}{3}\right) - \cos\left(11\omega t - \frac{55\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \sin 11\omega t$$

• ... etc...

Portons ces résultats dans (39). Il vient après avoir simplifié par 3 :

$$u_{RN}(t) = \frac{2E}{\pi} \left[ \sin \omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \frac{1}{11} \sin 11\omega t + \right. \\ \left. + \frac{1}{13} \sin 13\omega t + \frac{1}{17} \sin 17\omega t + \dots \right] \quad (40)$$

Les développements de  $u_{SN}$  et  $u_{TN}$  sont obtenus en procédant comme pour  $u_{RN}(t)$ . Il suffit de substituer dans les formules (22) et (23)  $u_{RS}$  par (34),  $u_{ST}$  par (37) et  $u_{TR}$  par (38).

On trouve :

$$u_{SN}(t) = \frac{2E}{\pi} \left[ \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(5\omega t - \frac{10\pi}{3}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{7} \sin\left(7\omega t - \frac{14\pi}{3}\right) + \frac{1}{11} \sin\left(11\omega t - \frac{22\pi}{3}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{13} \sin\left(13\omega t - \frac{26\pi}{3}\right) \dots \right] \quad (41)$$

et

$$u_{TN}(t) = \frac{2E}{\pi} \left[ \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(5\omega t - \frac{20\pi}{3}\right) + \frac{1}{7} \sin\left(7\omega t - \frac{28\pi}{3}\right) + \frac{1}{11} \sin\left(11\omega t - \frac{44\pi}{3}\right) + \frac{1}{13} \sin\left(13\omega t - \frac{52\pi}{3}\right) + \dots \right] \quad (42)$$

### 2.3. Etude en régime sinusoïdal :

2.3.1. Considérons le développement en série de Fourier de  $u_{RN}(t)$ . On appelle :

- harmonique 1 ou fondamentale, la tension

$$u_{RN1} = \frac{2E}{\pi} \sin \omega t \quad (43)$$

- harmonique 5, la tension

$$u_{RN5} = \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{5} \sin 5\omega t \quad (44)$$

et ainsi de suite.

On a donc :

$$u_{RN}(t) = u_{RN1}(t) + u_{RN5}(t) + u_{RN7}(t) + u_{RN11}(t) + \dots$$

Le courant  $i_R$  s'écrit :

$$i_R(t) = i_{R1}(t) + i_{R5}(t) + i_{R7}(t) + i_{R11}(t) + \dots \quad (45)$$

où  $i_{R1}(t)$  est le courant généré par le fondamental  $u_{RN1}(t)$ ,  $i_{R5}(t)$  par l'harmonique  $u_{RN5}(t)$ ,  $i_{R7}(t)$  par l'harmonique  $u_{RN7}(t)$ ...

$$\text{Soit : } i_{R1}(t) = \frac{u_{RN1}(t)}{Z_1} \quad (46)$$

$$i_{R5}(t) = \frac{u_{RN5}(t)}{Z_5} \quad (47)$$

$$i_{R7}(t) = \frac{u_{RN7}(t)}{Z_7} \quad (48)$$

et ainsi de suite.

$Z_1, Z_5, Z_7, \dots$  étant les modules des impédances relatives au fondamental, à l'harmonique 5, à l'harmonique 7,...

Avec :

- $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (L_1 \omega)^2}$
- $Z_5 = \sqrt{R_1^2 + (L_1 5\omega)^2}$
- $Z_7 = \sqrt{R_1^2 + (L_1 7\omega)^2}$
- etc...

En remplaçant :

– d'une part,  $i_{R1}(t)$  par (46),  $i_{R5}(t)$  par (47)

– d'autre part  $u_{RN1}(t)$  par (43),  $u_{RN5}(t)$  par (44),... la relation (45) s'écrit :

$$i_R(t) = \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{Z_1} \sin \omega t + \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{5Z_5} \sin 5\omega t + \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{7Z_7} \sin 7\omega t + \dots$$

ou encore :

$$i_R(t) = I_{M1} \sin \omega t + I_{M5} \sin 5\omega t + I_{M7} \sin 7\omega t + \dots$$

Avec :

$$I_{M1} = \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{Z_1} \quad (49)$$

$$I_{M5} = \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{5Z_5} \quad (50)$$

$$I_{M7} = \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{7Z_7} \quad (51)$$

et ainsi de suite.

Pour montrer que  $i_R(t)$  est sinusoïdal, montrons que le taux de distorsion d'harmoniques D est inférieur à 10 %.

D est défini par :

$$D = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} I_{Mn}^2}}{I_{M1}}$$

où  $I_{M1}$  est l'amplitude maximale du fondamental et  $I_{Mn}$ , celle de l'harmonique de rang  $n$ .

Dans notre étude, les harmoniques de rang pair et multiple de 3 n'existent pas. Par suite :

$$D = \frac{\sqrt{I_{M5}^2 + I_{M7}^2 + I_{M11}^2 + \dots}}{I_{M1}}$$

Les amplitudes  $I_{M1}$ ,  $I_{M5}$ ,  $I_{M7}$ , ... sont déterminées à l'aide des relations (49), (50), (51), ...

On obtient :

$$\begin{array}{lll} I_{M1} = 14,69A & I_{M5} = 1,11A & I_{M7} = 0,581A \\ I_{M11} = 0,24A & I_{M13} = 0,173A & I_{M17} = 0,1A \end{array}$$

On a limité les calculs à  $I_{M17}$  car  $I_{M17}^2 \ll I_{M5}^2$  :

A.N. :  $D = 8,73 \%$ .

On remarque que  $D < 10 \%$ . On peut donc admettre que  $i_R(t)$  est sinusoïdal.

2.3.2. En négligeant l'influence des harmoniques de rang supérieur à 1,  $u_{RN}$ ,  $u_{SN}$  et  $u_{TN}$  se confondent avec leurs tensions fondamentales. Par conséquent :

$$u_{RN}(t) = \frac{2E}{\pi} \sin \omega t$$

$$u_{SN}(t) = \frac{2E}{\pi} \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\text{et } u_{TN}(t) = \frac{2E}{\pi} \sin \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right)$$

Ces grandeurs forment un système triphasé équilibré de tensions sinusoïdales. Il en est de même pour les courants  $i_R(t)$ ,  $i_S(t)$  et  $i_T(t)$  ; avec :

$$i_R(t) = \frac{2E}{\pi Z_1} \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (52)$$

$$i_S(t) = \frac{2E}{\pi Z_1} \cdot \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi \right) \quad (53)$$

$$\text{et } i_T(t) = \frac{2E}{\pi Z_1} \cdot \sin \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi \right) \quad (54)$$

où  $\varphi$  représente le déphasage des courants  $i_R$ ,  $i_S$  et  $i_T$  par rapport aux tensions  $u_{RN}$ ,  $u_{SN}$  et  $u_{TN}$ .

$$\text{On a : } \operatorname{tg} \varphi = \frac{L_1 \omega}{R_1}$$

A.N. :  $\varphi = 30^\circ$

• Les courbes représentatives de  $u_{RN}$ ,  $u_{SN}$  et  $u_{TN}$  sont données figure 11a et celles de  $i_R$ ,  $i_S$  et  $i_T$ , figure 11b.

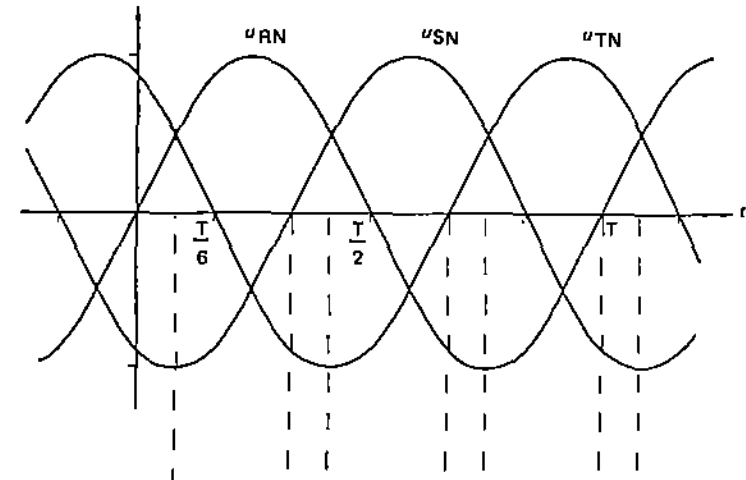


Fig. 8.11a. - Courbes  $u_{RN}(t)$ ,  $u_{SN}(t)$  et  $u_{TN}(t)$ .

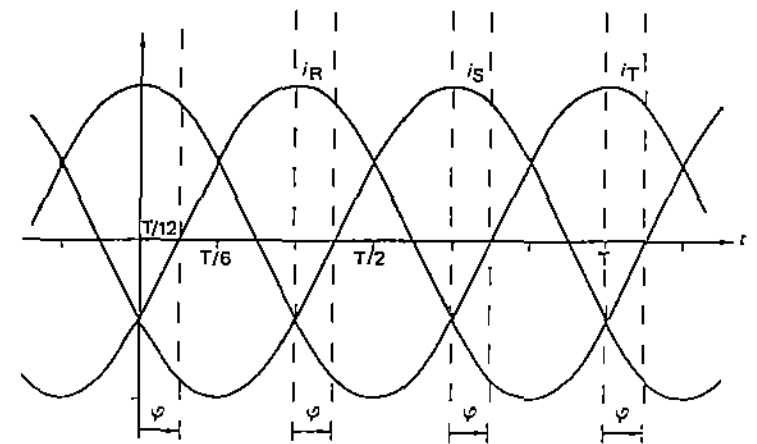


Fig. 8.11b. - Courbes  $i_R(t)$ ,  $i_S(t)$  et  $i_T(t)$ .

### 3. Réalisation de l'onduleur :

#### 3.1. L'onduleur est à transistors (cf. figure 3) :

Les composants utilisés sont supposés parfaits. Pour cette raison, on admet lorsqu'ils sont passants que :

- la chute de tension à leurs bornes (\*) est nulle
- leurs temps de commutation sont négligeables.

3.1.1. Rappelons qu'en régime de commutation, un transistor de type NPN ne laisse passer que les alternances positives (\*\*). Par conséquent, lorsque le courant dans la charge est négatif, le transistor reste bloqué même si l'impulsion de base qui le commande est à l'état 1.

Pour expliquer que les diodes sont indispensables, raisonnons par exemple sur  $Tr_1$  et  $D_1$ .

D'après la figure 11b, le courant dans la charge  $i_R$  est  $\leq 0$  dans l'intervalle  $[0, T/12]$  :  $Tr_1$  est bloqué. C'est donc à travers  $D_1$  que  $i_R$  s'écoule. Ce phénomène est dû à la bobine  $L_1$  qui retarde le courant sur  $u_{TN}$ . Il en est de même pour les autres diodes.

3.1.2. Pour rechercher les séquences pendant lesquelles les transistors et les diodes sont passants, il faut rechercher sur une période  $T$ , les intervalles de temps pendant lesquels les courants  $i_R$ ,  $i_S$  et  $i_T$  sont soit positifs, soit négatifs ou nuls. Pour cela calculons les instants :

- $t_{R1}$  et  $t_{R2}$  où  $i_R$  est nul
- $t_{S1}$  et  $t_{S2}$  où  $i_S$  est nul
- $t_{T1}$  et  $t_{T2}$  où  $i_T$  est nul.

Ces instants sont obtenus en écrivant :

$$i_R = \frac{2E}{\pi Z_1} \sin(\omega t - \varphi) = 0$$

$$i_S = \frac{2E}{\pi Z_1} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) = 0$$

$$\text{et } i_T = \frac{2E}{\pi Z_1} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) = 0$$

(\*)  $V_{CEsat}$  pour les transistors.

(\*\*) Le transistor PNP, lui, ne laisse passer que les alternances négatives.

La résolution de ces équations donne :

$$t_{R1} = \frac{T}{12}$$

$$t_{R2} = \frac{7T}{12}$$

$$t_{S1} = \frac{5T}{12}$$

$$t_{S2} = \frac{11T}{12}$$

$$\text{et } t_{T1} = \frac{T}{4}$$

$$t_{T2} = \frac{3T}{4}$$

D'après la figure 11b :

- $i_R(t) > 0$  dans l'intervalle  $]t_{R1}, t_{R2}[$  et  $i_R(t) \leq 0$  dans les intervalles  $[0, t_{R1}]$  et  $[t_{R2}, T]$ .
- $i_S(t) > 0$  dans l'intervalle  $]t_{S1}, t_{S2}[$  et  $i_S(t) \leq 0$  dans les intervalles  $[0, t_{S1}]$  et  $[t_{S2}, T]$ .
- $i_T(t) > 0$  dans les intervalles  $[0, t_{T1}[$  et  $]t_{T2}, T]$  et  $i_T(t) \leq 0$  dans l'intervalle  $[t_{T1}, t_{T2}]$ .

Nous recherchons les séquences de fonctionnement des transistors  $Tr_1$  et  $Tr_4$  et des diodes  $D_1$  et  $D_4$  (cf. figure 12). Celles des autres composants sont obtenues en faisant le même raisonnement.

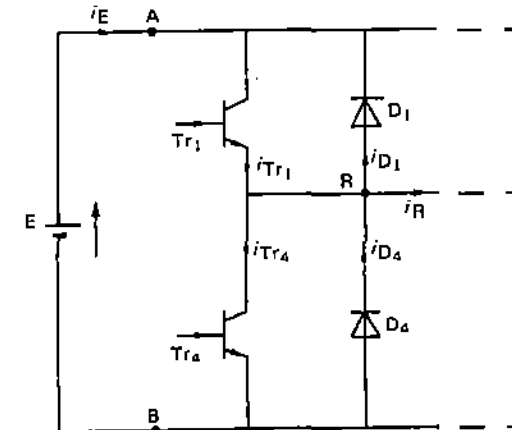


Fig. 8.12.

Pour chaque transistor, on admet que  $i_{Trj}$  ( $j = 1$  à 6) représente le courant dans le collecteur et dans l'émetteur car  $\beta \gg 1$ .

– Recherche des séquences de fonctionnement de  $Tr_1$ ,  $Tr_4$ ,  $D_1$  et  $D_4$  :

Considérons séparément les deux demi-périodes  $[0, T/2[$  et  $[T/2, T[$ .

1)  $0 \leq t < T/2$  :

Durant cette demi-période, l'interrupteur  $K_4 = (Tr_4, D_4)$  est ouvert (cf. tableau I) :  $Tr_4$  et  $D_4$  sont donc bloqués. Par conséquent :

$$i_{Tr_4} = 0$$

et  $i_{D_4} = 0$

Par contre,  $K_1 = (Tr_1, D_1)$  est fermé. Pour connaître l'état de  $Tr_1$  et  $D_1$ , il faut étudier indépendamment les intervalles  $[0, t_{R1}]$  et  $]t_{R1}, T/2[$ .

–  $0 \leq t \leq t_{R1}$  :

Le courant  $i_R(t) \leq 0$  :  $Tr_1$  est bloqué et  $D_1$  passante (\*).  $i_R$  provient de la charge et retourne à la source à travers  $D_1$  (cf. figure 13).

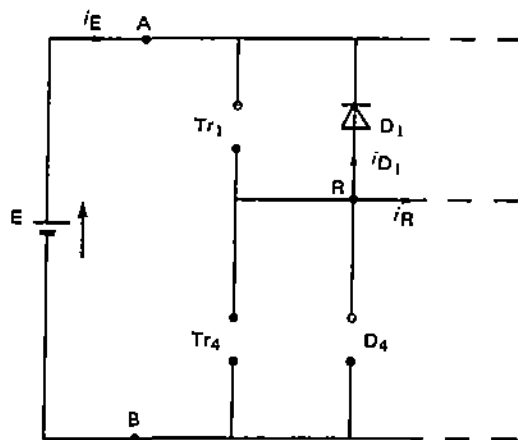


Fig. 8.13.

On a donc :

- $i_{Tr1} = 0$
- $i_{D1} = -i_R$

car au nœud R,  $i_{D1} + i_R = 0$

(\*) Voir question 3.1.1.

$$\bullet i_E = -i_{D1} = i_R$$

car au nœud A,  $i_E + i_{D1} = 0$

–  $t_{R1} < t \leq T/2$  :

Le courant  $i_R > 0$  :  $Tr_1$  conduit et  $D_1$  est bloquée.  $i_R$  provient de la source traverse  $Tr_1$  et va vers la charge (cf. figure 14).

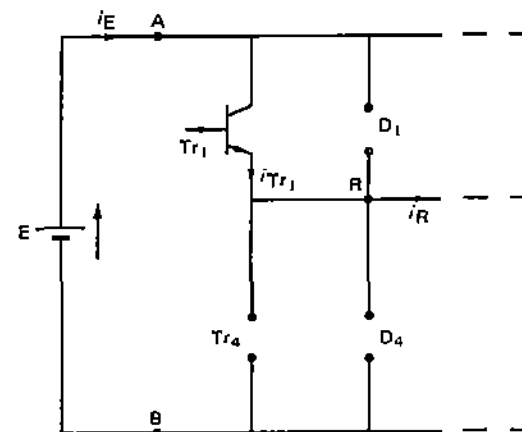


Fig. 8.14.

On a donc :

$$i_{D1} = 0$$

et  $i_{Tr1} = i_E = i_R$

2)  $T/2 \leq t < T$  :

Durant cette demi-période, l'interrupteur  $K_1 = (Tr_1, D_1)$  est ouvert (cf. tableau I) :  $Tr_1$  et  $D_1$  sont donc bloqués. Par conséquent :

$$i_{Tr1} = 0$$

et  $i_{D1} = 0$

Par contre  $K_4 = (Tr_4, D_4)$  est fermé. Pour connaître l'état de  $Tr_4$  et  $D_4$ , il faut étudier indépendamment les intervalles  $[T/2, t_{R2}]$  et  $[t_{R2}, T[$ .

$$-T/2 \leq t < T/2 :$$

Etant positif, le courant  $i_R$  va vers la charge à travers  $D_4$  (cf. figure 15).  $Tr_4$  est bloqué car pour un transistor NPN, le courant ne peut circuler dans le sens émetteur-collecteur.

On a donc :

$$i_{Tr4} = 0$$

$$i_{D4} = i_R$$

et

$$i_E = -i_{D4} = -i_R \quad (\text{car au nœud B, } i_E + i_{D4} = 0)$$

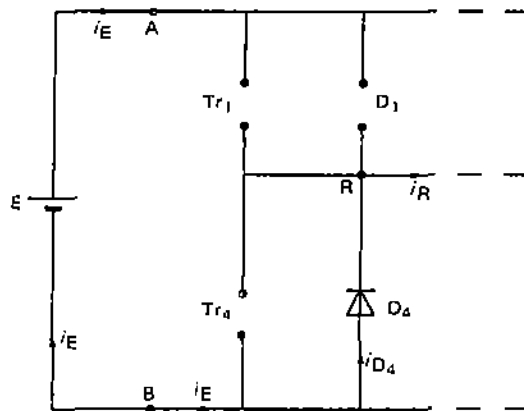


Fig. 8.15.

$$-T/2 \leq t < T/2 :$$

Etant négatif, le courant  $i_R$  vient de la charge et retourne à la source à travers  $Tr_4$  (cf. figure 16) : le transistor  $Tr_4$  est passant et la diode  $D_4$ , bloquée.

Par suite :

$$i_{D4} = 0$$

$$i_{Tr4} = -i_R \quad (\text{car au nœud R, } i_{Tr4} + i_R = 0)$$

et

$$i_E = i_{Tr4} = -i_R.$$

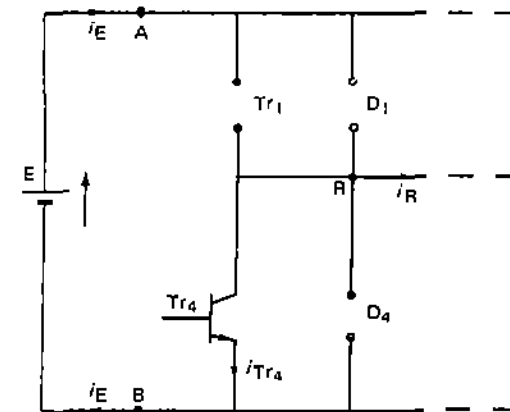


Fig. 8.16.

Les séquences de fonctionnement de l'ensemble des transistors et diodes sont données figure 17.

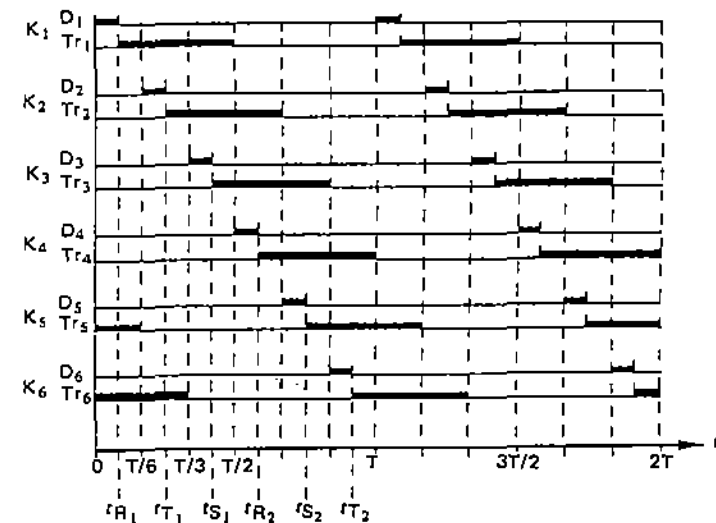


Fig. 8.17. - Séquences de fonctionnement des transistors et des diodes.  
Etat passant : trait gras. Etat bloqué : trait fin.



3.1.3. Pour représenter les courants  $i_{T1}$ ,  $i_{T4}$ ,  $i_{D1}$ ,  $i_{D4}$  et  $i_E$  en fonction du temps, donnons leurs expressions respectives (cf. question 312).

• Expression de  $i_{T1}$  :

$$\begin{aligned} i_{T1} = i_R &= \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{Z_1} \sin \omega t & \text{pour } T/12 < t \leq T/2 \\ \text{et } i_{T1} &= 0 & \text{pour } \begin{cases} 0 \leq t \leq T/12 \\ T/2 < t < T \end{cases} \end{aligned} \quad (55)$$

• Expression de  $i_{T4}$  :

$$\begin{aligned} i_{T4} = -i_R &= -\frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{Z_1} \sin \omega t & \text{pour } 7T/12 < t \leq T \\ \text{et } i_{T4} &= 0 & \text{pour } 0 \leq t \leq 7T/12 \end{aligned} \quad (56)$$

• Expression de  $i_{D1}$  :

$$\begin{aligned} i_{D1} = -i_R &= -\frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{Z_1} \sin \omega t & \text{pour } 0 \leq t \leq T/12 \\ \text{et } i_{D1} &= 0 & \text{pour } T/12 < t < T \end{aligned} \quad (57)$$

• Expression de  $i_{D4}$  :

$$\begin{aligned} i_{D4} = i_R &= \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{Z_1} \sin \omega t & \text{pour } T/2 \leq t < 7T/12 \\ \text{et } i_{D4} &= 0 & \text{pour } \begin{cases} 0 \leq t < T/2 \\ 7T/12 \leq t < T \end{cases} \end{aligned} \quad (58)$$

• Expression de  $i_E$  :

$$\begin{aligned} i_E = i_R &= \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{Z_1} \sin \omega t & \text{pour } 0 \leq t < T/2 \\ \text{et } i_E = -i_R &= -\frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{Z_1} \sin \omega t & \text{pour } T/2 \leq t < T \end{aligned} \quad (59)$$

• Les courbes représentatives de  $i_{T1}$ ,  $i_{T4}$ ,  $i_{D1}$ ,  $i_{D4}$  et  $i_E$  en fonction du temps sont tracées à l'aide des résultats ci-dessus. Ces courbes sont données figure 18.

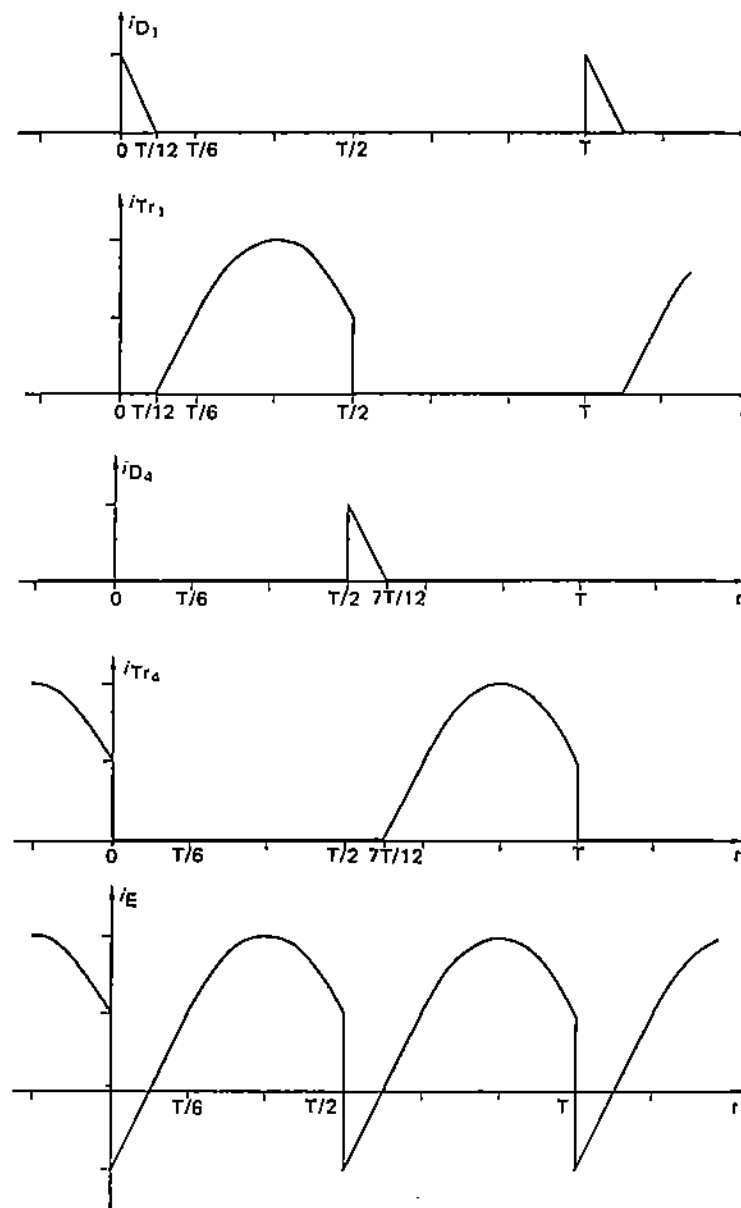


Fig. 8.18. - Courbes  $i_{T1}(t)$ ,  $i_{T4}(t)$ ,  $i_{D1}(t)$ ,  $i_{D4}(t)$  et  $i_E(t)$ .

Remarque :

D'après la figure 18, on observe que les périodes de  $i_{T1}$ ,  $i_{T4}$ ,  $i_{D1}$  et  $i_{D4}$  sont égales à  $T$  et celle de  $i_E$  à  $T/2$ .

3.1.4. Les valeurs moyennes  $\bar{I}_{T1}$  de  $i_{T1}$ ,  $\bar{I}_{D1}$  de  $i_{D1}$  et  $\bar{I}_E$  de  $i_E$  s'écrivent respectivement :

$$\bar{I}_{T1} = \frac{1}{T} \int_0^T i_{T1}(t) dt$$

$$\bar{I}_{D1} = \frac{1}{T} \int_0^T i_{D1}(t) dt$$

$$\text{et } \bar{I}_E = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{T/2} i_E(t) dt$$

Soit en tenant compte des relations (55), (57) et (59) :

$$\bar{I}_{T1} = \frac{1}{T} \int_{T/12}^{T/2} \left( \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{Z_1} \sin \omega t \right) dt$$

$$\bar{I}_{D1} = \frac{1}{T} \int_0^{T/12} \left( -\frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{Z_1} \sin \omega t \right) dt$$

$$\text{et } \bar{I}_E = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left( \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{Z_1} \sin \omega t \right) dt$$

Le calcul de ces trois intégrales donne :

$$\bar{I}_{T1} = 4,68 \text{ A} \quad \bar{I}_{D1} = 0,627 \text{ A} \quad \text{et} \quad \bar{I}_E = 9,357 \text{ A}.$$

3.1.5. La puissance instantanée  $p_E$  fournie par la source est :

$$p_E = E i_E$$

D'où la puissance active  $P_E$  fournie :

$$P_E = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} E i_E dt$$

Ce résultat peut aussi s'écrire :

$$P_E = E \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i_E dt$$

Soit :

$$P_E = E \cdot \bar{I}_E$$

$$\text{A.N. : } P_E = 3,743 \text{ kW}.$$

3.2. L'onduleur à thyristors (cf. figure 5) :

3.2.1. Charge du condensateur C

Le condensateur C est initialement déchargé, soit :

$$v_C(0) = 0$$

Pour charger le condensateur C, on amorce les thyristors  $Th_{11}$  et  $Th_{20}$ . Le schéma de la figure 5 devient (cf. figure 19) :

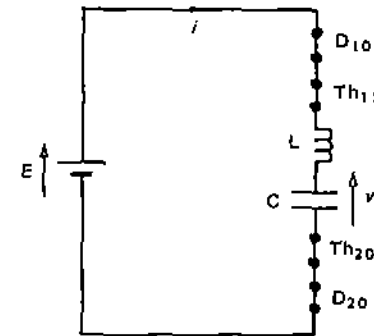


Fig. 8.19. -  $Th_{11}$  et  $Th_{20}$  sont passants.

Le long de la maille formant le circuit, on peut écrire :

$$E = \frac{L di}{dt} + v_C$$

$$\text{avec } i = C \frac{dv_C}{dt} \text{ car C se charge}$$

$$\text{soit } E = LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + v_C \quad (60)$$

C'est l'équation différentielle recherchée ; sa solution est (voir cours de mathématiques) :

$$v_C(t) = E + A \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + B \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad (61)$$

$$\text{et } i(t) = C \frac{dv_C}{dt} = -\sqrt{\frac{C}{L}} A \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \sqrt{\frac{C}{L}} B \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad (62)$$

où A et B sont des constantes d'intégration dépendant des conditions initiales.

A l'instant  $t = 0$ , on a :

- $v_C(0) = 0$

soit  $0 = E + A$  (cf. relation (61))

d'où  $A = -E$

- $i(0) = 0$

soit  $0 = \sqrt{\frac{L}{C}} B$  (cf. relation (62))

ce qui donne  $B = 0$

Par conséquent :

$$v_C(t) = E - E \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad (63)$$

$$\text{et } i(t) = E \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad (64)$$

Les courbes  $v_C(t)$  et  $i(t)$  sont représentées figure 20.

Le courant  $i(t)$  s'annule à l'instant  $t_0$  tel que :

$$E \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{t_0}{\sqrt{LC}}\right) = 0$$

$$\text{soit } t_0 = \pi \sqrt{LC} \quad (65)$$

AN :  $L = 12,74 \text{ nF}$  ,  $C = 3,18 \text{ mH}$

$t_0 = 20 \mu\text{s}$ .

On remarque que  $t_0 = 2 t_q$

A cet instant, le courant traversant les thyristors  $Th_{11}$  et  $Th_{20}$  s'annule : ceux-ci se bloquent. La valeur finale de  $v_C(t)$  est :

$$v_C(t_0) = 2E.$$

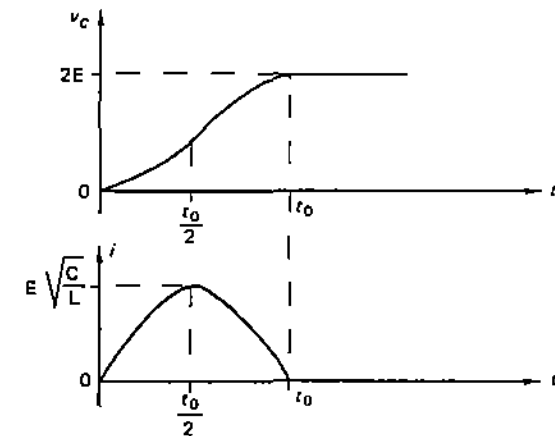


Fig. 8.20. - Courbes  $v_C(t)$  et  $i(t)$  avec  $v_C(0) = 0$ .

3.2.2. Rappelons que pour bloquer un thyristor, il faut :

- soit lui appliquer une tension d'anode négative pendant une durée supérieure au temps de blocage  $t_q$ .
- soit rendre le courant qui le traverse inférieur au courant de maintien  $i_H$  (dans ce problème,  $i_H = 0$  car les composants sont supposés parfaits).

A l'instant  $t = \frac{T}{2} - t_0$ ,  $i_{Th1}$  est positif (cf. figure 18 - Courbe  $i_{Th1}(t)$ ).

Pour bloquer  $Th_1$ , il faut donc lui appliquer une tension d'anode négative. C'est pourquoi on rend passants  $Th'_1$  et  $Th_{10}$ .

En effet, dès qu'on amorce  $Th'_1$  et  $Th_{10}$ , la diode  $D_{10}$  devient passante et le schéma de la figure 5 devient équivalent à celui de la figure 21 : d'après cette figure, on voit immédiatement que  $v_{Th1} = -2E < 0$  ;  $Th_1$  se bloque.

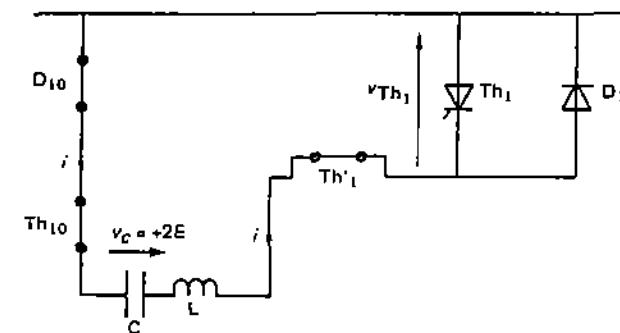


Fig. 8.21. - Seule la partie intéressante du circuit a été représentée.

Th<sub>1</sub> étant ouvert, il faut :

– inverser la tension  $v_C$  pour pouvoir bloquer le thyristor suivant, c'est-à-dire Th<sub>2</sub> (cf. tableau II et figure 17).

Le circuit de la figure 21 devient (cf. figure 22) :

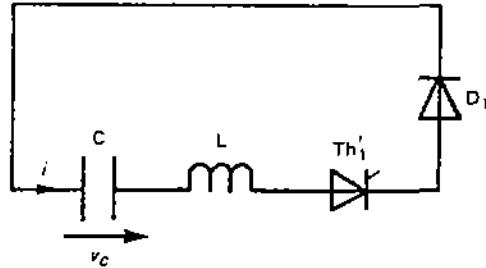


Fig. 8.22.

L'origine des temps  $t'$  est prise à l'amorçage de Th<sub>10</sub> et Th<sub>1'</sub>, c'est-à-dire

dire  $\frac{T}{2} - t_0$ .

La loi d'Ohm appliquée à ce circuit permet d'écrire :

$$0 = v_C - L \frac{di}{dt'}$$

et  $i = -C \frac{dv_C}{dt'}$  compte-tenu du sens de  $i$ ,

soit  $0 = v_C + LC \frac{d^2 v_C}{dt'^2}$  (66)

C'est l'équation différentielle recherchée ; sa solution est (voir cours de mathématiques) :

$$v_C(t') = A' \cos\left(\frac{t'}{\sqrt{LC}}\right) + B' \sin\left(\frac{t'}{\sqrt{LC}}\right) \quad (67)$$

et  $i(t') = + A' \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{t'}{\sqrt{LC}}\right) - B' \sqrt{\frac{C}{L}} \cos\left(\frac{t'}{\sqrt{LC}}\right) \quad (68)$

où  $A'$  et  $B'$  sont des constantes d'intégration dépendant des conditions initiales.

A l'instant  $t' = 0$ , on a :

- $v_C(0) = 2E$
- soit  $2E = A$
- $i(0) = 0$

soit  $0 = -B \sqrt{\frac{C}{L}}$

ce qui entraîne  $B = 0$ .

Par conséquent :

$$v_C(t) = 2E \cos\left(\frac{t'}{\sqrt{LC}}\right) \quad (69)$$

et  $i(t) = 2E \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{t'}{\sqrt{LC}}\right) \quad (70)$

Les courbes  $v_C(t')$  et  $i(t')$  sont représentées figure 23.

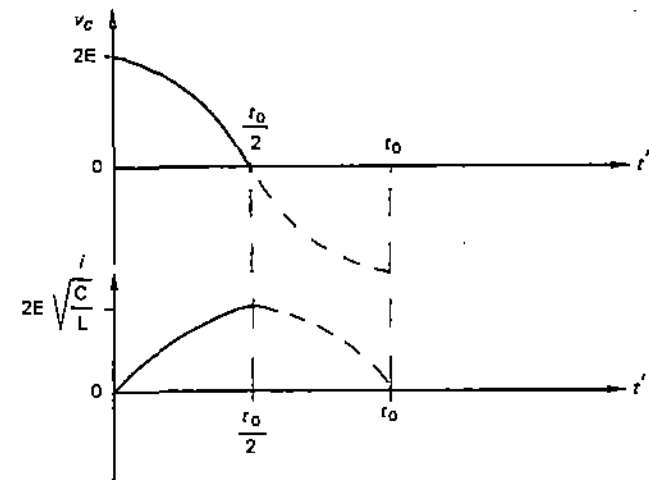


Fig. 8.23. - Courbes  $v_C(t')$  et  $i(t')$  avec  $v_C(0) = 2E$ .

– bloquer Th<sub>1'</sub>. En effet, le courant  $i$  se referme par D<sub>1</sub> et risque de provoquer le court-circuit de E lors de la fermeture de l'interrupteur (Th<sub>4</sub>, D<sub>4</sub>). Pour cela, on amorce Th<sub>21</sub> à l'instant  $t' = \frac{t_0}{2}$ , correspondant à  $v_C(t') = 0$  et au temps de blocage  $t_q$  de Th<sub>1</sub>.

Le schéma de la figure 5 devient (cf. figure 24).

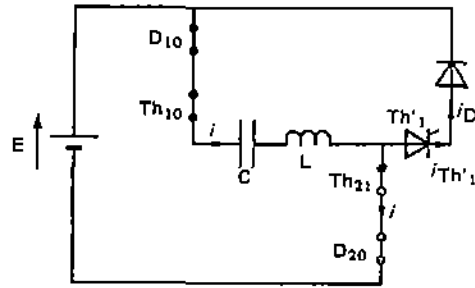


Fig. 8.24.

On constate, d'après cette figure, que l'ensemble  $(Th'_1, D_1)$  est soumis à la tension négative  $-E$  :  $Th'_1$  se bloque instantanément. Le schéma précédent devient (cf. figure 25).

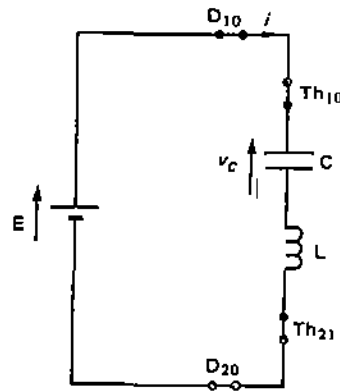


Fig. 8.25. «Le sens de  $v_C$  est inversé par rapport au 3.2.1.

L'origine des temps  $t''$  est prise à l'instant de blocage de  $Th'_1$ , soit :

$$t'' = \frac{T}{2} - \frac{t_0}{2}.$$

Le long de la maille formant le circuit, on peut écrire :

$$E = \frac{L di}{dt''} + v_C$$

avec  $i = C \frac{dv_C}{dt''}$  car le condensateur C se charge

$$\text{soit } E = LC \frac{d^2 v_C}{dt''^2} + v_C \quad (71)$$

Une étude similaire à celle de la question 321 conduit aux résultats :

- $v_C(0) = 0$
- $v_C(t'') = E - E \cos\left(\frac{t''}{\sqrt{LC}}\right)$  (72)

- $i(t'') = E \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{t''}{\sqrt{LC}}\right)$  (73)

- $v_C(t_0) = 2E$ .

A l'instant  $t'' = t_0$ , le courant  $i$  s'annule et les thyristors  $Th_{10}$  et  $Th_{21}$  se bloquent.

3.2.3. A l'instant  $t_2 = \frac{2T}{3} - t_0$ ,  $Th_2$  doit être bloqué. L'étude est identique à celle faite en 3.2.2. ; il faut :

a) amorcer  $Th_{20}$  et  $Th'_2$  pour appliquer une tension négative aux bornes de  $Th_2$  et ainsi le bloquer.

b) amorcer  $Th_{11}$  pour :  
- bloquer  $Th'_2$   
- inverser la tension  $v_C$ .

3.2.4. A l'instant  $t_3 = \frac{5T}{6} - t_0$ ,  $Th_3$  doit être ouvert. Le processus est identique à ceux des questions 3.2.2 et 3.2.3. Il faut :

a) amorcer  $Th_{10}$  et  $Th'_3$  pour appliquer une tension négative aux bornes de  $Th_3$ .

b) amorcer  $Th_{21}$  pour :  
- bloquer  $Th'_3$   
- inverser la tension  $v_C$ .

3.2.5. Le processus est identique pour les thyristors  $Th_4$ ,  $Th_5$  et  $Th_6$ .

• Blocage de  $Th_4$  ;

Il faut :

a) amorcer  $Th_{20}$  et  $Th'_4$  à  $t = -t_0$  ou  $t = T - t_0$  (cf. tab. III)

b) amorcer  $Th_{11}$  pour bloquer  $Th'_4$ .

• *Blocage de Th<sub>5</sub> :*

Il faut :

a) amorcer Th<sub>10</sub> et Th'<sub>5</sub> à  $t = \frac{T}{6} - t_0$

b) amorcer Th<sub>21</sub> pour bloquer Th'<sub>5</sub>.

• *Blocage de Th<sub>6</sub> :*

Il faut :

a) amorcer Th<sub>20</sub> et Th'<sub>6</sub> à  $t = \frac{T}{3} - t_0$

b) amorcer Th<sub>11</sub> pour bloquer Th'<sub>6</sub>.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. CHAUPRADE et F. MILSANT, 1984. Electronique de puissance, Tome 2. « *Commande des moteurs à courant alternatif* ». 2ème Edition. Collection Ingénieurs EEA, Editions Eyrolles.
- [2] F. MILSANT, 1981. Cours d'électronique, Tome 5. « *Diodes, thyristors, commande des moteurs* ». Editions Eyrolles.
- [3] N. PISKOUNOV, 1970. « *Calcul différentiel et intégral* ». Tome 2. 4ème édition. Editions MIR, Moscou.
- [4] F. LUCAS, 1981. Electricité industrielle. « *Les systèmes* ». Editions Delagrave.
- [5] G. SEGUIER, 1979. Electronique de puissance. 4ème édition. Editions Dunod.
- [6] D. BENADDA et F. VANDEVILLE, 1986. « *Electronique : Problèmes d'exams corrigés et commentés* ». Electronique des petits signaux. Tome 1. Editions Eyrolles.
- [7] D. BENADDA et F. VANDEVILLE, 1986. « *Electronique : Problèmes d'exams corrigés et commentés* ». Electronique des petits signaux. Tome 2. Editions Eyrolles.