Outils analytiques pour l'Electronique de Puissance

Le travail de l'électronicien de puissance est de commander l'ouverture et la fermeture d'interrupteurs électroniques en vue d'assurer une fonction donnée : redresseur, hacheur, onduleur, changeur de fréquence... . Pour étudier le fonctionnement de ces circuits les outils classiques utilisées en sinusoïdal ne sont pas d'un grand secours. Il devient alors nécessaire de disposer d'outils simples mais efficaces adaptés à notre problème.

Pour les introduire, nous ferons appel aux résultats classiques des systèmes linéaires et nous nous servirons d'eux pour en déduire des méthodes d'analyse de circuit non-linéaires.

➢ Rappel sur les systèmes linéaires

☞ Variables d'état

- **L'état d'un système est caractérisé par un ensemble de variables qu'il faut connaitre pour pouvoir prédire de façon unique le fonctionnement du système.**
- **Toutes les autres grandeurs du systèmes peuvent s'exprimer en fonction de ces variables d'état et des entrées du systèmes.**

☞ Réponse d'un système linéaire

- **L'étude des équations différentielles linéaires qui régissent le fonctionnement des systèmes linéaires conduit au résultat fondamental suivant :**

$$\boxed{[R]_t = \underbrace{[R_L]_t}_{\text{Solution générale sans second membre}} + \underbrace{[R_F]_t}_{\text{Solution particulière avec second membre}}}$$

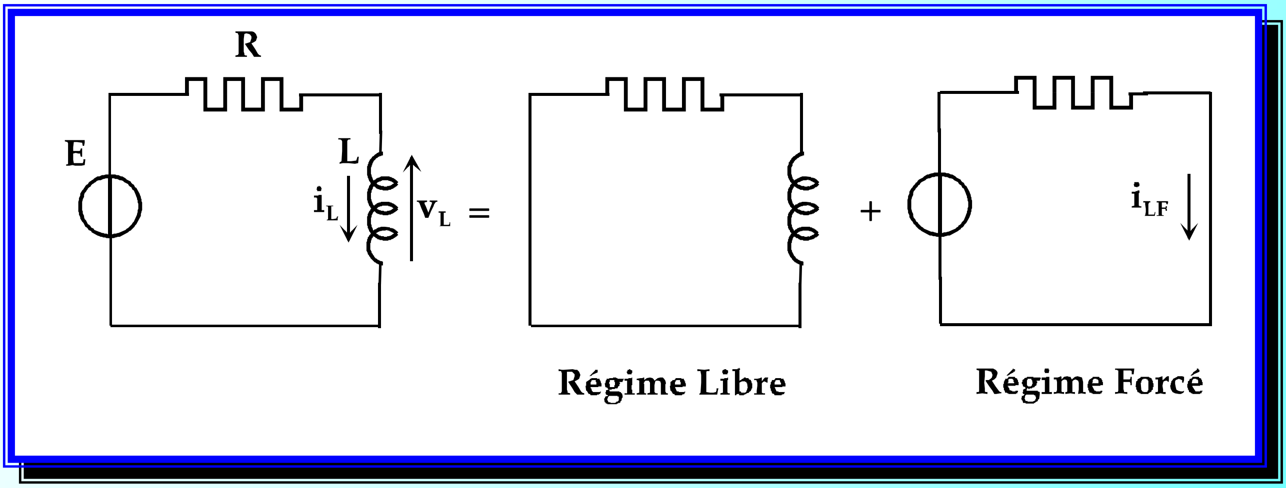
- **Régime libre**
  Il correspond à un système sans excitation, dont les conditions initiales sont connues. $[R_L]_0 = [R]_0 - [R_F]_0$
- **Régime forcé**
  - excitation continue ou échelon ➲ régime forcé continu
  (en R.F. l'inductance = C.C., le condensateur = C. O.)
  - excitation sinusoïdale ➲ régime forcé sinusoïdal de même F
  (impédances complexes)
  - somme des excitations ➲ somme des régimes forcés élémentaires

Outils analytiques pour l'Electronique de Puissance

➢ Exemples de circuits du premier ordre

☞ Circuit RL série alimenté en tension

⇨ **Réponse à un échelon**
La variable d'état de ce circuit est le courant dans l'inductance.



Régime libre ⇨ $L\,\dfrac{di_L}{dt} + R\,i_L = 0$

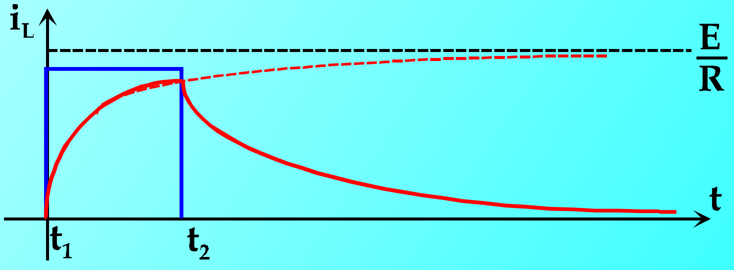
dont la solution générale est : $i_{LL} = [i_{LL}]_0 * e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$

La condition initiale de ce régime libre dépend du régime forcé par la relation :

$[i_{LL}]_0 = [i_L]_0 - [i_{LF}]_0$ d'où $[i_{LF}]_0 = \dfrac{E}{R}$

$$\boxed{i_L = \left(i_{L0} - \frac{E}{R}\right) * e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} + \frac{E}{R}}$$

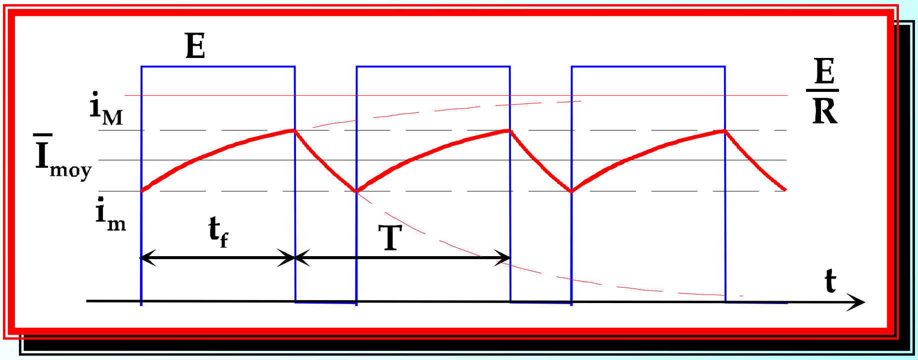
⇨ **Réponse à une impulsion de tension rectangulaire**



Outils analytiques pour l'Electronique de Puissance

⇨ **Réponse à un signal périodique**
Cas par exemple du hacheur ou de l'onduleur MLI (PWM)

➢ Etude en régime permanent



Avec $\alpha = \frac{t_f}{T}$

$$\overline{I}_{moy} = \frac{\overline{V}_{moy}}{R} = \frac{\alpha E}{R}$$

Pendant la décroissance, à $t = t_f$ $\quad i_m = i_M * e^{-\frac{(1-\alpha)T}{\tau}}$

Pendant la croissance, à $t = T$ $\quad i_M = \frac{E}{R} - \left(i_m - \frac{E}{R}\right) * e^{-\frac{\alpha T}{\tau}}$

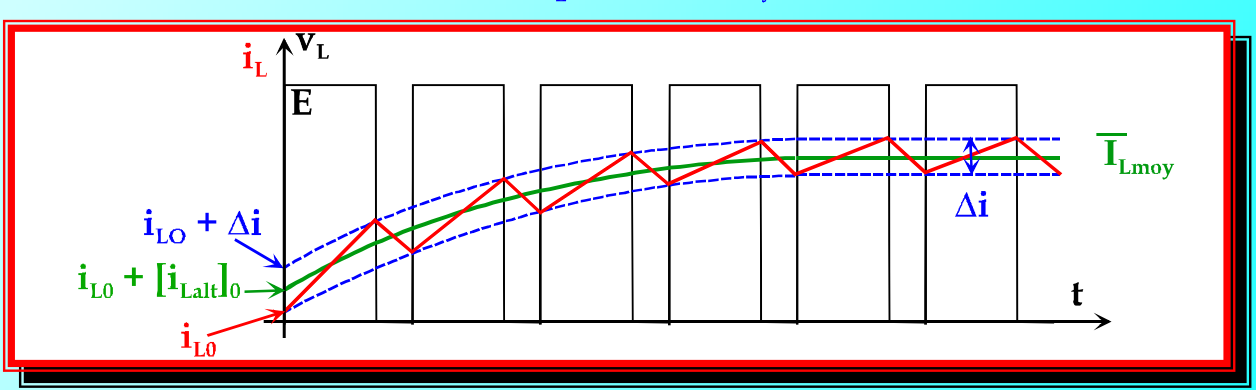
L'ondulation du courant dans l'inductance se met sous la forme

$$\Delta i = \frac{E}{R}\,\frac{\left(1 - e^{-\frac{\alpha T}{\tau}}\right) * \left(1 - e^{-\frac{(1-\alpha)T}{\tau}}\right)}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}$$

➢ Etude en régime transitoire

En régime permanent, la réponse peut être considérée comme la somme d'une composante continue $\overline{I}_{Lmoy}$ et d'une composante alternative i_{Lalt} . Par ailleurs la réponse d'un système linéaire est la somme d'un régime libre et d'un régime forcé, la réponse en courant du circuit excité par un signal périodique de tension sera donc :

$$i_L = \left(i_{LL} + \overline{I}_{Lmoy}\right) + i_{Lalt}$$



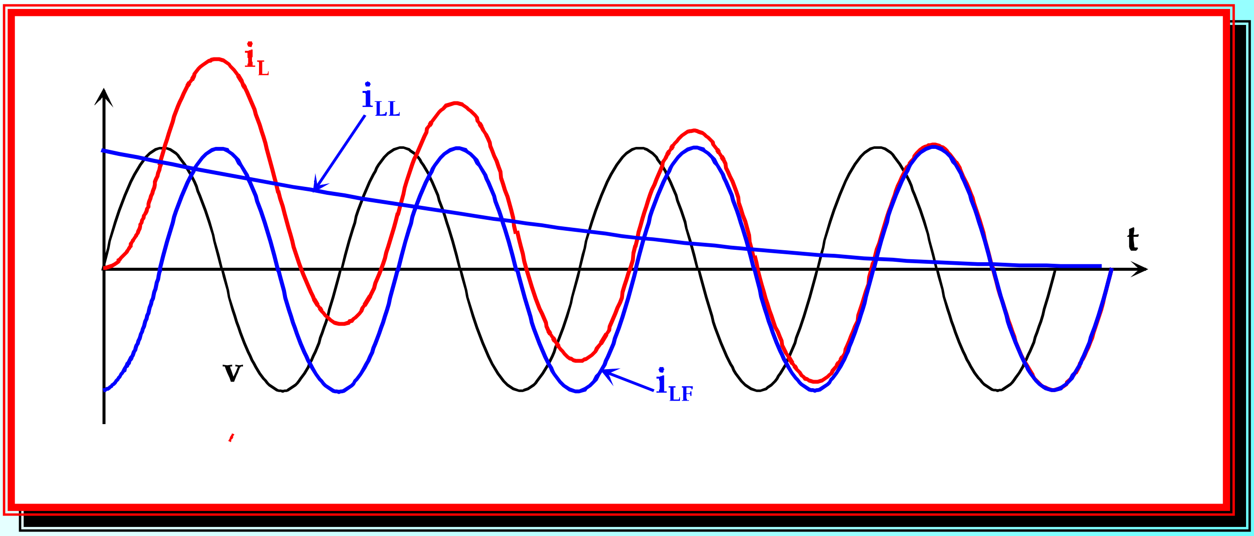
Outils analytiques pour l'Electronique de Puissance

En conclusion, le courant de l'inductance est la somme de :

- **la réponse indicielle**
- **la composante alternative en régime permanent**

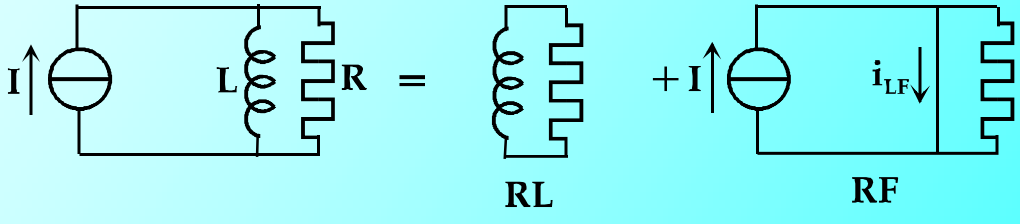
La réponse transitoire est fonction de l'instant d'enclenchement

⇨ **Réponse à une tension sinusoïdale**

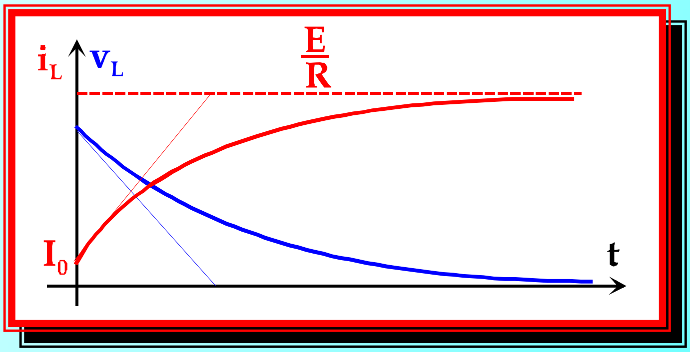


☞ Circuit RL parallèle alimenté en courant

La variable d'état du circuit est le courant dans l'inductance



⇨ **Réponse à un échelon de courant**



i_L est une exponentielle de constante de temps $\tau = L/R$ partant de I_0 et d'asymptote $i_L = E/R$.

Nota : Ce circuit élémentaire correspond au schéma équivalent d'un transformateur de courant

Outils analytiques pour l'Electronique de Puissance

⇨ **Réponse à une impulsion de courant rectangulaire**

Etude analogue à la réponse à une impulsion de tension rectangulaire

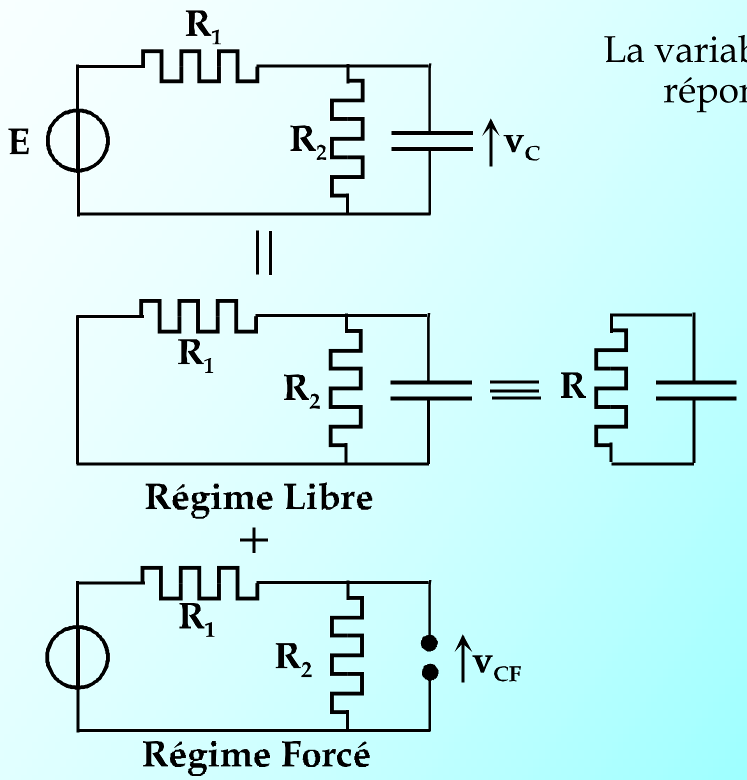
⇨ **Réponse à un courant rectangulaire périodique**

Etude analogue à la réponse à une tension rectangulaire périodique

☞ Circuit RC série - parallèle

⇨ **Réponse d'un circuit RC série**

⇨ **Réponse d'un circuit R+R // C**



La variable d'état est ici v_C, pour $v_{C0} = 0$, la réponse globale est :

$$\boxed{v_C = \frac{R_2}{R_2 + R_1} E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

➢ Exemples de circuits du deuxième ordre

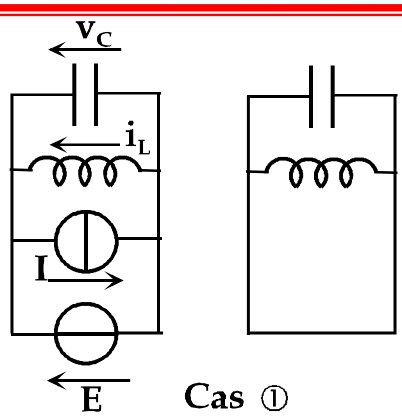
☞ Etude des configurations obtenues avec une source de tension, une source de courant et un circuit LC

Dans le cadre des convertisseurs statiques les éléments L,C,E,I peuvent être reliés entre eux par des interrupteurs. Ils peuvent se trouver a priori dans n'importe quelle configuration :

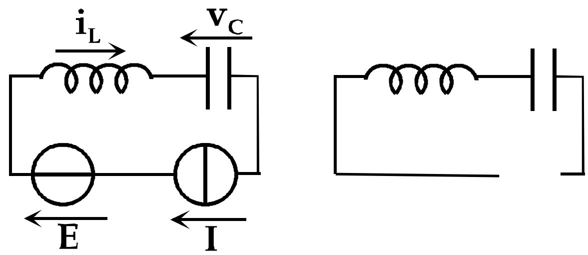
- ✓ en série
- ✓ en parallèle
- ✓ 2 à 2 en série, les deux autres étant en parallèle.

La réponse de certains de ces circuits peut ne pas être oscillatoire.

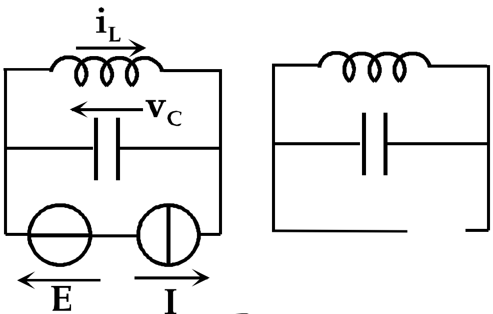
Outils analytiques pour l'Electronique de Puissance



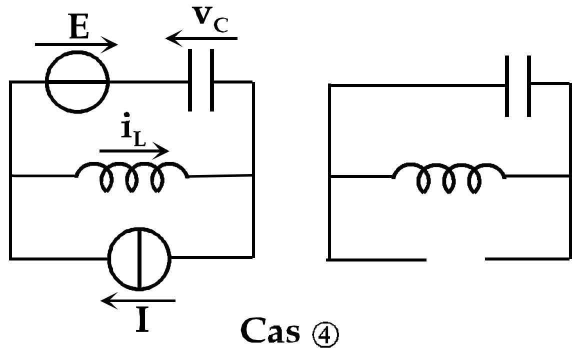
Cas ①



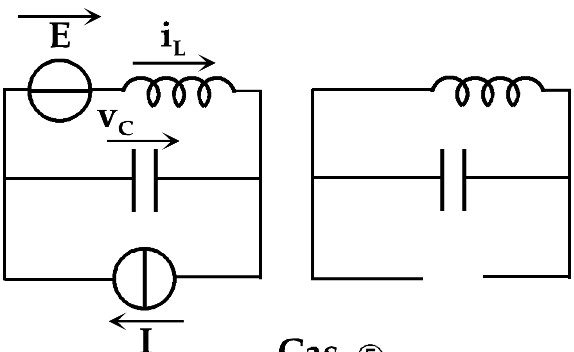
Cas ②



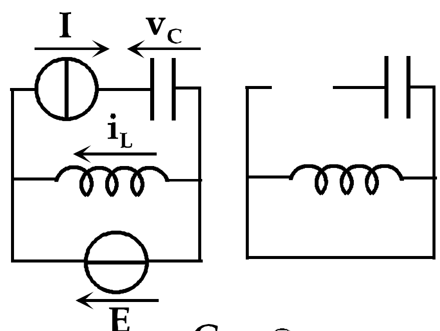
Cas ③



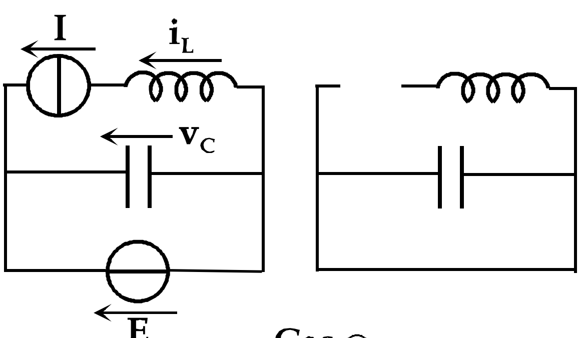
Cas ④



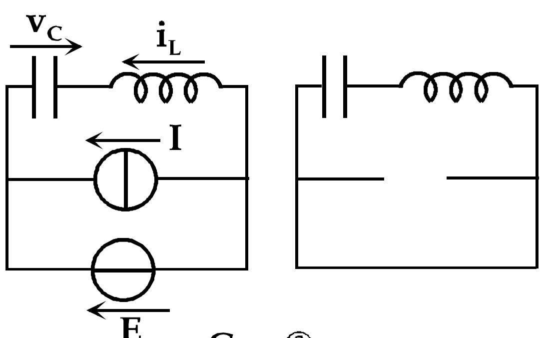
Cas ⑤



Cas ⑥



Cas ⑦



Cas ⑧

Outils analytiques pour l'Electronique de Puissance

Il existe donc : 8 régimes libres différents

Régimes oscillatoires ③ ④ ⑤ ⑧

Régimes singuliers ① ② ⑥ ⑦

Configuration : ① condensateur en court-circuit

$$\boxed{v_C = v_L = E \Rightarrow i_L = i_{L0} - \frac{E^*t}{L}}$$

Nota : L'expression de i_L correspond à un cas théorique car il existe obligatoirement une valeur de régime forcé $i_L = E/R$ avec R résistance série de l'inductance. Si la constante de temps est grande devant le temps que durera cette configuration, l'approximation linéaire est toujours faite.

② inductance en circuit ouvert

$$\boxed{i_C = i_L = I \Rightarrow v_C = v_{C0} + \frac{I^*t}{C}}$$

⑥ condensateur en C.O. et inductance en C.C.

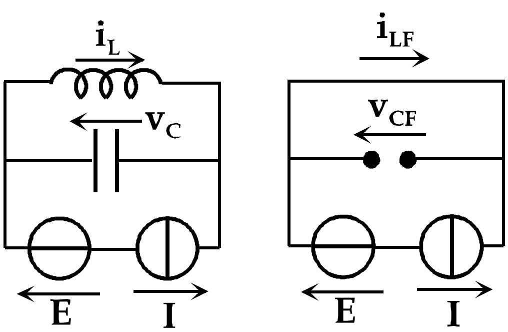
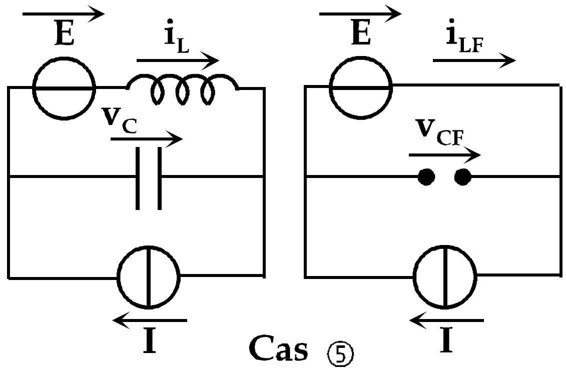
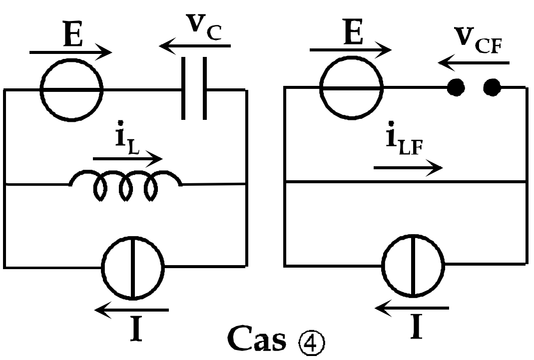
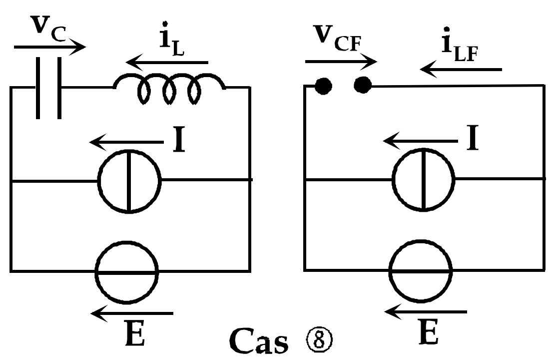
$$\boxed{\begin{array}{l} i_C = i_L = I \Rightarrow v_C = v_{C0} + \frac{I^*t}{C} \\ v_C = v_L = E \Rightarrow i_L = i_{L0} - \frac{E^*t}{L} \end{array}}$$

⑦ condensateur en C.C. et inductance en C.O.

$$\boxed{v_C = E \quad \text{et} \quad i_L = I}$$

Outils analytiques pour l'Electronique de Puissance

Régimes oscillatoires

Circuit	Régime forcé	Circuit	Régime forcé
 Cas ③		 Cas ⑤	
 Cas ④		 Cas ⑧	

Configuration : ③ ⇨ $v_{CF} = 0$ et $i_{LF} = I$

④ ⇨ $v_{CF} = E$ et $i_{LF} = I$

⑤ ⇨ $v_{CF} = E$ et $i_{LF} = I$

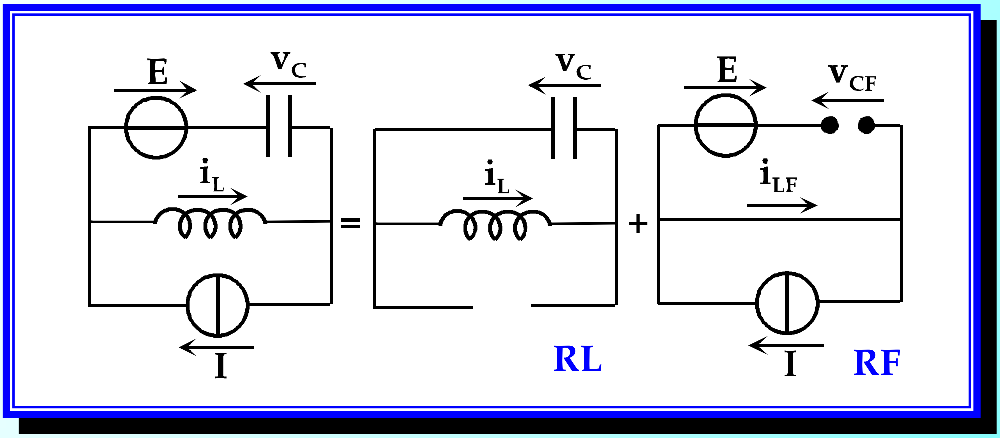
⑧ ⇨ $v_{CF} = E$ et $i_{LF} = 0$

En conclusion, il suffit d'étudier une seule configuration la ④ par exemple.

Outils analytiques pour l'Electronique de Puissance

☞ Réponse d'un circuit LC à un échelon de tension et de courant. Méthode du plan de phase

⇨ **Cas général**
Conditions initiales $\mathbf{i_{L0}}$ **et** $\mathbf{v_{C0}}$



Etude du régime libre

En prenant i_0 et v_0 comme condition initiale, l'équation différentielle du régime libre est donc :

$$L\,C\,\frac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L = 0$$

Les solutions sont alors :

$$i_{LL} = i_O \cos(\omega^* t) - v_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin(\omega^* t)$$

$$v_{CF} = v_0 \cos(\omega^* t) + i_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega^* t) \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

Etude du régime forcé

$v_{CF} = E$ et $i_{LF} = I$

Réponse du circuit

A l'instant t =0, on a : $v_C = v_{C0}$ et $i_L = i_{L0}$ d'où :

$v_0 = v_{C0} - E$ et $i_0 = i_{LO} - I$

Outils analytiques pour l'Electronique de Puissance

On obtient finalement :

$$v_C = E + (v_{C0} - E)\cos\omega t + (i_{L0} - I)\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\omega t$$

$$i_L = I + (i_{L0} - I)\cos\omega t - (v_{C0} - E)\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\omega t$$

Sur le plan pratique ces équations sont peu commodes à utiliser. Il est préférable de rechercher une représentation plus facilement utilisable à condition de mettre les équations sous la forme suivante :

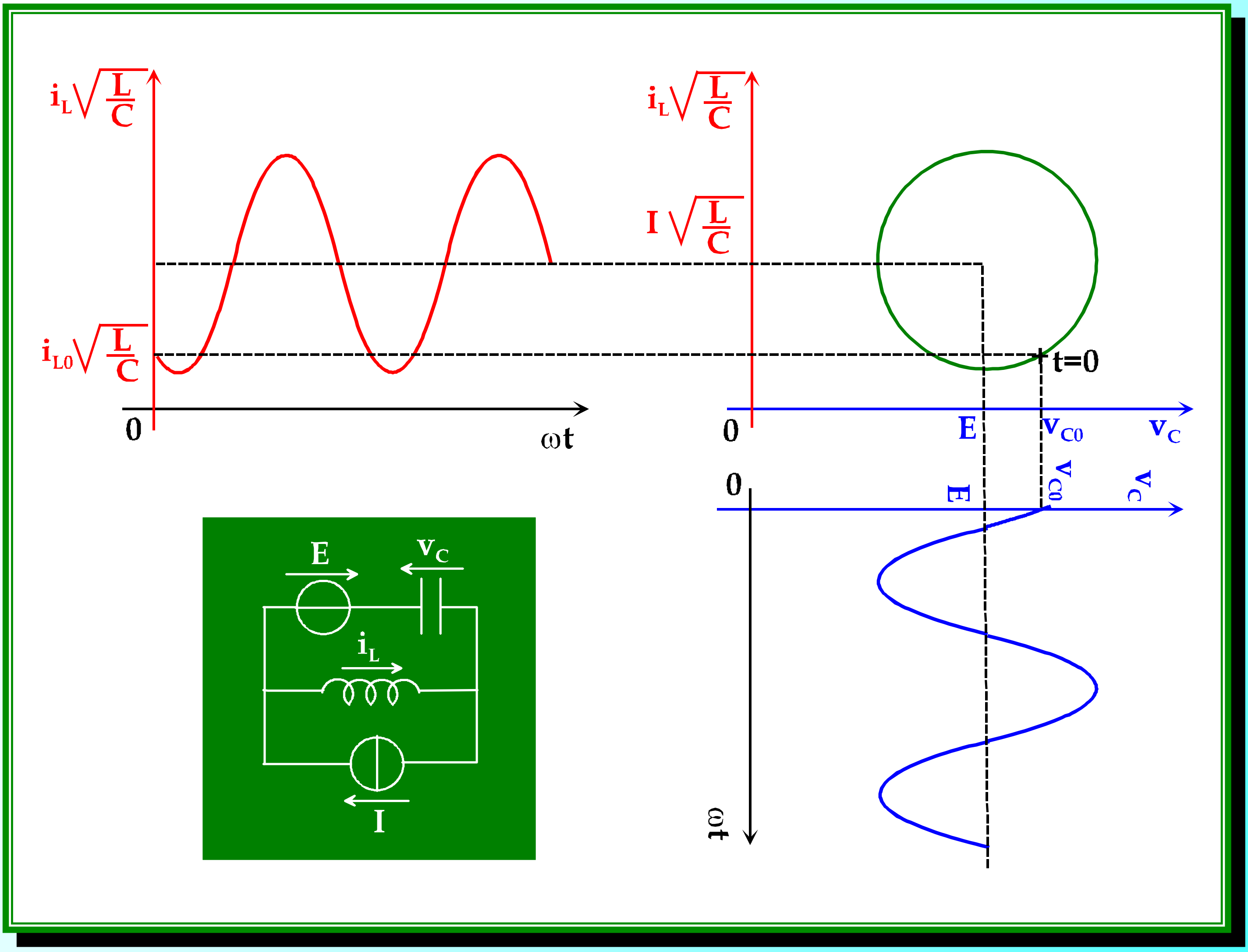
$$v_C - E = (v_{C0} - E)\cos\omega t + (i_{L0} - I)\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\omega t$$

$$(i_L - I)\sqrt{\frac{L}{C}} = (v_{C0} - E)\sin\omega t - (i_{L0} - I)\sqrt{\frac{L}{C}}\cos\omega t$$

Tout circuit LC soumis à des échelons de tension et de courant et dont le schéma équivalent du régime libre est celui d'un circuit LC série, a une réponse qui peut être représentée dans le plan $i_L\sqrt{\frac{L}{C}}$, v_C par un cercle :

- **de centre E, $I\sqrt{\frac{L}{C}}$ point représentatif du régime forcé**
- **passant par le point v_{C0}, $i_{L0}\sqrt{\frac{L}{C}}$ point représentatif des conditions initiales**
- **décrit dans le sens inverse de sens trigonométrique à partir du point de condition initiale v_{C0}, $i_{L0}\sqrt{\frac{L}{C}}$ si on a choisi un sens positif de i_L tel que le courant i_L rentre par l'armature positive du condensateur.**

Outils analytiques pour l'Electronique de Puissance

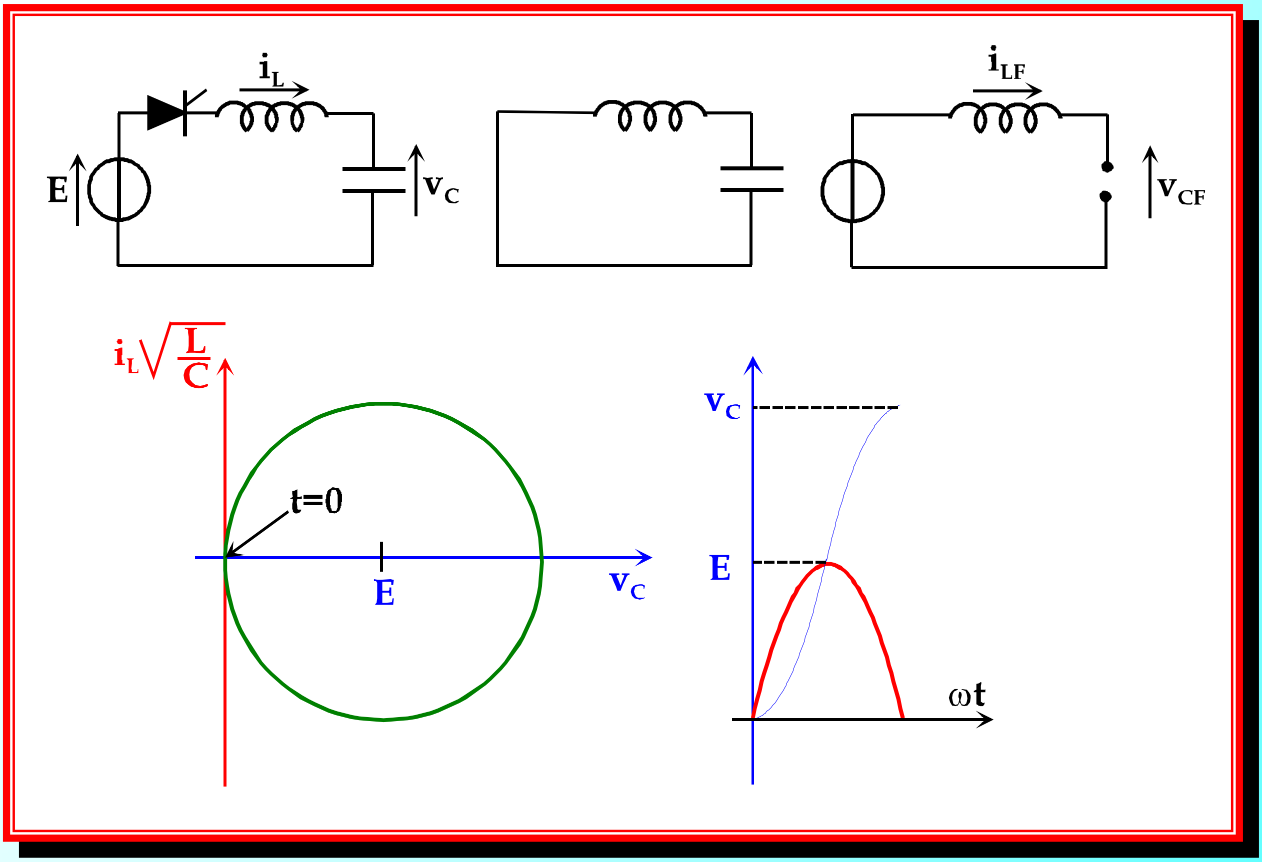


Nota : Dans le cas présenté, le circuit oscille indéfiniment autour du régime forcé. Ceci n'a physiquement aucun sens et pratiquement, il y aura toujours un élément résistif, donc un amortissement. Le système va évoluer vers le régime forcé.

Outils analytiques pour l'Electronique de Puissance

⇨ **Exemple**

Application d'un échelon de tension sur un circuit LC



Conditions initiales ⇨ $i_L(0) = 0$ et $v_C(0) = 0$

Régime forcé ⇨ $i_{LF} = 0$ et $v_{CF} = E$

La réponse de ce circuit dans le plan $i_L\sqrt{\frac{L}{C}}$, v_C est un cercle de centre [O, E].

Nota : Après le blocage du thyristor le condensateur C est chargé à 2E.

Outils analytiques pour l'Electronique de Puissance

Réponse d'un circuit LC avec prise en compte d'un amortissement

Etude du régime libre d'un circuit RLC avec un faible amortissement

conditions initiales : $v_C(0) = v_0$ et $i_L(0) = 0$

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$$

Les solutions sont de la forme :

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$$

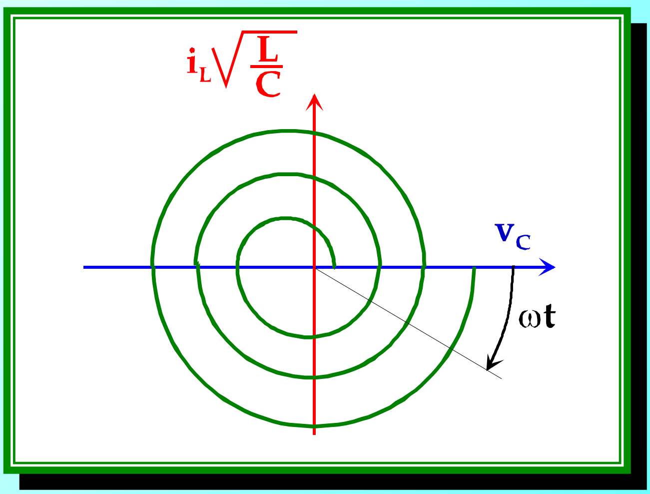
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$v_C = (C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t)\,e^{-\alpha t}$$

$$C_1 = v_0$$

$$C_2 = \frac{\alpha}{\omega} v_0$$

Dans le plan $i_L(t)\sqrt{\frac{L}{C}}$, $v_C(t)$, ces équations sont les équations d'une spirale logarithmique



$$v_C(t) = v_0 \cos\omega t\; e^{-\alpha t}$$

$$i_L(t)\sqrt{\frac{L}{C}} = v_0 \sin\omega t\; e^{-\alpha t}$$

avec $\alpha << \omega$

$$\frac{\alpha}{\omega} << 1$$

$$\omega = \omega_0$$

Outils analytiques pour l'Electronique de Puissance

➪ **Expression approchée de cette spirale**

elle s'obtient en écrivant le développement limité de l'exponentielle :

$e^{-\alpha t} = 1 - \alpha t \ldots$

$$v_C(t) = v_0 (1 - \alpha t) \cos \omega t$$

$$i_L(t)\sqrt{\frac{L}{C}} = -v_0 (1 - \alpha t) \sin \omega t$$

➪ **Influence de l'amortissement**

➲ **Pour $\omega t = \pi$**

$\alpha \frac{T}{2} = \frac{R\pi}{2L\omega} = \frac{\pi}{2Q}$ avec $Q = \frac{L\omega}{R}$ facteur de qualité

$$v_C\left(\frac{T}{2}\right) = v_F = -v_0\left(1 - \frac{\pi}{2Q}\right)$$

➲ **Pour $\omega t = \frac{\pi}{2}$**

$$i_L\left(\frac{T}{4}\right)\sqrt{\frac{L}{C}} = -v_0\left(1 - \frac{\pi}{4Q}\right)$$

Sur une demi-période, la spirale est très proche d'un cercle :

- de centre o' ➪ $[0, \frac{v_0\pi}{4Q}]$

- de rayon ➪ $v_0\left(1 - \frac{\pi}{4Q}\right)$