Université A. Mira de Béjaia — ***Année 2009/2010***
Faculté des Sciences Exactes — ***Semestre 1***
Domaine : Sciences de la Matière — ***Année d'étude : 1ère année SM***
Département de Physique — ***10 Février 2010***

~ Examen final ~

Matière: *Compléments Mathématiques 1*

Exercice n°1 *(04 points)*

Dans un repère orthonormé *OXYZ,* de base $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les deux vecteurs :

$\vec{v}_1 = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{v}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

1. Représenter les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.
2. Calculer $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.
3. Soit $\vec{v}_3 = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$ un vecteur de l'espace. Sachant que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_3$ ont la même projection sur le plan *Oxy* et qu'ils sont perpendiculaires, déterminer $\vec{v}_3$.

Exercice n°2 *(03.5 points)*

Considérant un repère orthonormé *OXYZ* de base $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. En tout point $M(x,y,z)$ de l'espace, on définit une quantité physique f telle que :

$$f(M) = r^2$$

avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ et $r = \|\vec{r}\|$.

1. Déterminer le gradient du champ scalaire f. Calculer la différentielle df.
2. Montrer qu'en tout point M de l'espace, la différentielle df de la fonction f est reliée à $\overrightarrow{grad}\,f$ et au vecteur déplacement élémentaire $d\vec{r}$ par la relation $df = \overrightarrow{grad}\,f . d\vec{r}$.

Exercice n°3 *(06points)*

Dans un repère orthonormé *OXYZ*, tout point M de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques (r,θ,φ) dans la base locale $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$. r et θ sont des fonctions d'un paramètre t telles que :

$$\begin{cases} r(t) = a\,(e^{-\frac{t}{\tau}} + 1) \\ \theta(t) = \dfrac{\pi}{4\tau}\,t \\ \varphi(t) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

a et τ sont des constantes positives.

1. Déterminer les coordonnées sphériques (r,θ,φ) du point M pour $t = 0$, $t = \tau$ et $t = 2\tau$.
2. Tracer qualitativement la courbe *(C)* décrite par les positions successives du point M quand t varie de 0 à 2τ.
3. Exprimer les vecteurs $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et $\dot{\vec{r}}$ (la dérivée première du vecteur $\vec{r}$) dans la base $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$.
4. Toujours dans la même base, déterminer puis représenter qualitativement les vecteurs $\vec{r}$ et $\dot{\vec{r}}$ pour $t = 0$.

Exercice n°4 *(06.5 points)*

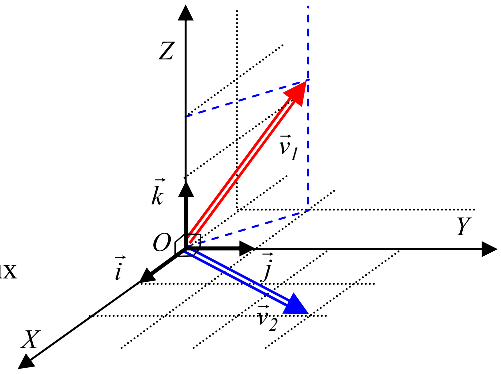
Dans le plan *XOY* muni d'une base orthonormée $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère la conique *(C)* de foyer $F(1,1)$, de directrice (*D)* d'équation $x = 5$ et d'excentricité $e = 1/3$.

1. Quelle est la nature de la conique *(C)* (ellipse, hyperbole ou parabole). Justifier votre réponse.
2. Déterminer : l'équation de l'axe focal *(Δ),* les coordonnées des sommets principaux *A* et *A'*, du centre *Ω* de la conique, des sommets secondaires *B* et *B'*, du second foyer *F'* et l'équation de la seconde directrice *(D')*. Représenter *(Δ), A, A', Ω, B, B', F'* et *(D')*.
3. Représenter qualitativement la conique *(C)*.

Bon courage

~ Corrigé de l'Examen final ~
Matière: *Compléments Mathématiques 1*

Exercice n°1 (04 points)



1. Représentation des vecteurs $\vec{v}_1 = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{v}_2 = 2\,\vec{i} + 3\vec{j}$:

$\rightarrow$ *figure ci-contre*

2. Calcul de $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$:

$$\boxed{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = ... = -6\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 5\vec{k}}$$

3. Détermination du vecteur $\vec{v}_3$:

$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_3$ ont la même projection sur le plan Oxy $\rightarrow$ les deux vecteurs ont donc les mêmes composantes selon OX et OY

$\rightarrow x_3 = -1$ et $y_3 = 1$

$\rightarrow \vec{v}_3 = -\vec{i} + \vec{j} + z_3\,\vec{k}$

$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_3$ sont perpendiculaires $\rightarrow \vec{v}_1.\vec{v}_3 = 0$

$\rightarrow 1 + 1 + 2\,z_3 = 0 \rightarrow z_3 = -1$

Donc : $\boxed{\vec{v}_3 = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}$

Exercice n°2 (03.5 points)

1. Détermination du gradient du champ scalaire f et de la différentielle df.

$$\overrightarrow{grad}\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{k}$$

$$f = r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \boxed{\overrightarrow{grad}\ f = \overrightarrow{grad}\ r^2 = 2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k} = 2\vec{r}}$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz \rightarrow \boxed{df = 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz}$$

2. Démonstration de la relation $df = \overrightarrow{grad} f.d\vec{r}$.

On a : $\begin{cases} \overrightarrow{grad}\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{k} \\ d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{grad}\ f\ .\ d\vec{r} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz = df$$

$$\Rightarrow \boxed{df = \overrightarrow{grad} f.d\vec{r}}$$

Exercice n°3 (06 points)

Dans la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, on a : $M(r,\theta,\varphi)$ telles que :

$$r(t) = a\,(e^{-\frac{t}{\tau}} + 1)$$

$$\theta(t) = \frac{\pi}{4\tau}\,t$$

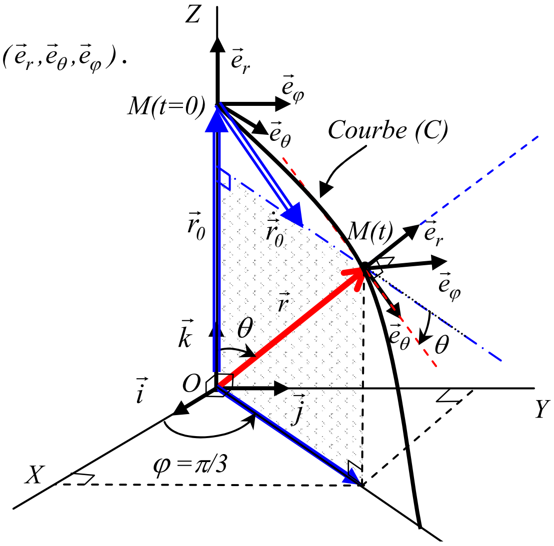
$$\varphi(t) = \frac{\pi}{3}$$

a et τ sont des constantes positives.

1. Coordonnées sphériques du point M pour $t = 0$, $t = \tau$ et $t = 2\tau$.

t	**(r, θ, φ)**
0	$M(2a, 0, \pi/3)$
τ	$M(a(e^{-1}+1), \pi/4, \pi/3)$
2τ	$M(a(e^{-2}+1), \pi/2, \pi/3)$

2. Courbe *(C)* décrite par les positions successives du point M quand t varie de 0 à 2τ.
Il suffit de voir que φ est fixe (la courbe est dans le plan méridien) et quand t augmente de 0 à 2τ, r diminue et θ augmente $\rightarrow$ *figure ci-dessus.*



Représentation de la courbe (C) et des vecteurs $\vec{r}_0$ et $\dot{\vec{r}}_0$

3. $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ et $\dot{\vec{r}}$ (la dérivée première du vecteur $\vec{r}$) dans la base $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$.

Dans la base $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$, on a:

$$\boxed{\vec{r}=\overrightarrow{OM}=r\,\vec{e}_r=r(t)\,\vec{e}_r=a\,(e^{-\frac{t}{\tau}}+1)\,\vec{e}_r}$$

$$\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}=a\left[-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\,\vec{e}_r+(e^{-\frac{t}{\tau}}+1)\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right]$$

On a : $\vec{e}_r=\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j}+\cos\theta\,\vec{k}$

$$\rightarrow\ \frac{d\vec{e}_r}{dt}=\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt}+\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}\dot{\varphi}$$

On a : $\begin{cases}\dot{\theta}=\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{\pi}{4\tau}\\ \dot{\varphi}=\dfrac{d\varphi}{dt}=0\\ \dfrac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}=\vec{e}_\theta\end{cases}$

$\rightarrow \dfrac{d\vec{e}_r}{dt}=\dfrac{\pi}{4\tau}\vec{e}_\theta$ avec : $\vec{e}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i}+\cos\theta\sin\varphi\,\vec{j}-\sin\theta\,\vec{k}$.

$$\rightarrow \dot{\vec{r}}=a\left[-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\,\vec{e}_r+(e^{-\frac{t}{\tau}}+1)\frac{\pi}{4\tau}\vec{e}_\theta\right]$$

$$\rightarrow \boxed{\dot{\vec{r}}=\frac{a}{\tau}\left[-e^{-\frac{t}{\tau}}\,\vec{e}_r+(e^{-\frac{t}{\tau}}+1)\frac{\pi}{4}\vec{e}_\theta\right]}$$

4. Détermination et représentation des vecteurs $\vec{r}$ et $\dot{\vec{r}}$ pour $t=0$.

Pour $t=0$: $\boxed{\vec{r}=\vec{r}_0=2a\,\vec{e}_r}$

$$\boxed{\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}_0=\frac{a}{\tau}\left[-\vec{e}_r+\frac{\pi}{2}\vec{e}_\theta\right]}$$

figure ci-dessus : Représentation des vecteurs $\vec{r}_0$ et $\dot{\vec{r}}_0$.

Exercice n°4 (06.5 points)

1. Nature de la conique (C)

L'excentricité $e=1/3<1$ $\rightarrow$ la conique *(C)* est ***une ellipse***.

2. Equation de l'axe focal (Δ)

(Δ) passe par le foyer $F(1,1)$ et est $\perp$ à la directrice *(D)*.

Donc, l'équation de *(Δ)* est: $\boxed{y=1}$

Coordonnées des sommets principaux A et A'

A et $A'\in(\Delta)\rightarrow\ y_A=y_{A'}=1$.

A et $A'\in(C)\rightarrow \dfrac{AF}{AK}=e\rightarrow AF^2=e^2AK^2$

$$\rightarrow (x-1)^2=e^2(5-x)^2$$

$$\rightarrow x=2 \text{ ou } x=-1$$

$\rightarrow$ donc : $\boxed{A(2,1)}$ et $\boxed{A'(-1,1)}$

Centre Ω de la conique

$\Omega \in (\Delta) \rightarrow \; y_\Omega = 1$

$$x_\Omega = \frac{x_A + x_{A'}}{2} = \frac{1}{2}$$

$\rightarrow$ donc : $\boxed{\Omega(\frac{1}{2}, 1)}$

Coordonnées des sommets secondaires B et B'

Paramètre a de l'ellipse : $a = \frac{AA'}{2} = \frac{x_A - x_{A'}}{2} = \frac{2+1}{2} \;\rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$

Paramètre c de l'ellipse :

On a : $e = \frac{c}{a} \rightarrow \boxed{c = e.a = \frac{1}{3}\frac{3}{2} = \frac{1}{2}}$

Paramètre b de l'ellipse :

On a : $a^2 = b^2 + c^2$

$\rightarrow \; b = \sqrt{a^2 - c^2} \;\rightarrow \boxed{b = \sqrt{2}}$

B et B' sont la même verticale que $\Omega \rightarrow \; x_B = x_{B'} = x_\Omega = \frac{1}{2}$

D'où : $B(\frac{1}{2}, y_\Omega + b) \rightarrow \boxed{B(\frac{1}{2}, 1+\sqrt{2})}$

$B'(\frac{1}{2}, y_\Omega - b) \rightarrow \boxed{B(\frac{1}{2}, 1-\sqrt{2})}$

Second foyer F'

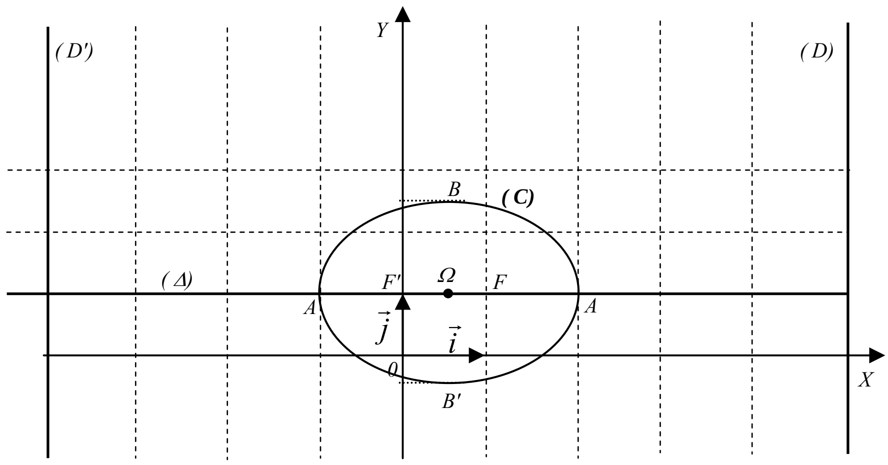
$F'(x_\Omega - c, y_\Omega) \rightarrow \boxed{F'(0,1)}$

Equation de la seconde directrice (D')

(D') est symétrique à *(D)* par rapport au centre Ω de la conique.

Donc, l'équation de *(D')* est: $\boxed{x = -4}$

***3**.Représentation de la conique (C) :*



End