Communications numériques

Rappels de traitement du signal

Laurent Oudre
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée
Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Informatique et Réseaux Alternance - 2ème année
2015-2016

Sommaire

Sommaire

Signaux continus et discrets

Il existe deux types de signaux temporels :

- **Continu :** signal connu à chaque instant t

$$\boxed{x(t) \text{ avec } t \in \mathbb{R}}$$

  t : temps (souvent exprimé en secondes)
  Ex : onde électromagnétique, signal électrique, ...

- **Discret :** signal connu uniquement à certains instants t_n

$$\boxed{x_n \text{ avec } n \in \mathbb{Z}}$$

  n : échantillon (sans unité)
  Ex : taux de précipitations enregistré chaque jour, cours de la bourse enregistré chaque heure, ...

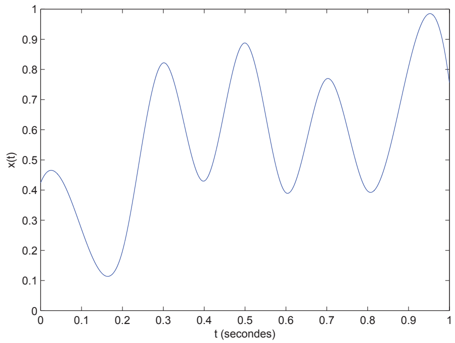
Signaux continus et discrets

En pratique

- Les signaux continus $x(t)$ ne sont pas stockables et étudiables sur ordinateur (ils contiennent une infinité de valeurs !). Ils peuvent être vus comme des fonctions mathématiques. On les étudie principalement pour avoir des modèles théoriques des signaux que l'on veut étudier. Ils modélisent des phénomènes physiques tels que les ondes acoustiques, les signaux électriques, etc...
- Les signaux discrets x_n au contraire peuvent être stockés et étudiés sur ordinateur. Ils ont en général un nombre fini de valeurs non nulles. Un signal discret est ainsi représenté comme un vecteur contenant toutes les valeurs x_n. On y associe un vecteur temps contenant toutes les valeurs t_n des instants où l'on connaît le signal.

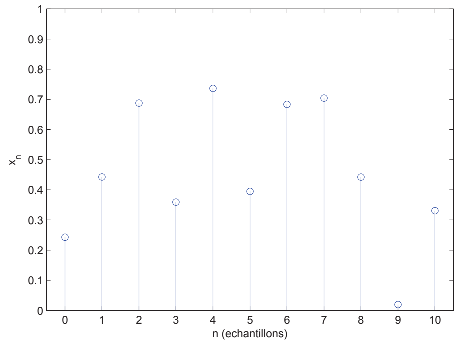
Remarque : Tous les signaux que nous allons étudier avec MATLAB sont donc des signaux discrets (et même numériques, cf prochain cours !). Les signaux continus seront seulement étudiés en TD avec des calculs théoriques.

Exemples



Signal continu $x(t)$

$t \in [0,1]$



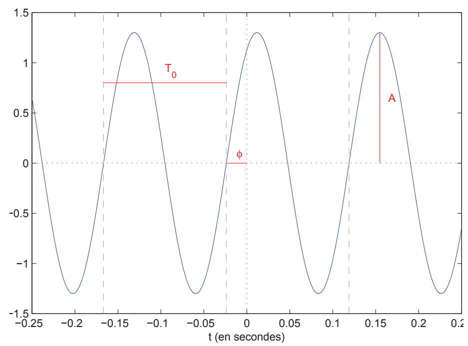
Signal discret x_n

$n \in [\![0,10]\!]$

Quelques signaux types

- La plupart des signaux de la vie courante sont aléatoires ou sont influencés par de nombreux paramètres.
- Afin de pouvoir les étudier de façon théorique, on construit des modèles de signaux, qui n'existent pas nécessairement dans le monde physique, mais permettent de réaliser des tâches impossibles autrement (ex : prédiction de température, reconnaissance d'une note de musique)
- Dans cette partie, on présente quelques signaux types modèles très utilisés en traitement du signal

Sinusoïde



$A = 1.3$, $f_0 = 7$ Hz, $\phi = \frac{\pi}{3}$

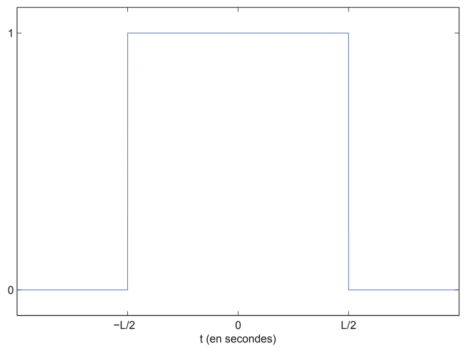
$$\boxed{x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \phi)}$$

- A : amplitude
- f_0 : fréquence fondamentale (en Hz)
- ϕ : phase à l'origine
- $x(t)$ est périodique de période fondamentale

$$\boxed{T_0 = \frac{1}{f_0}}$$

- Très utile pour modéliser des ondes simples

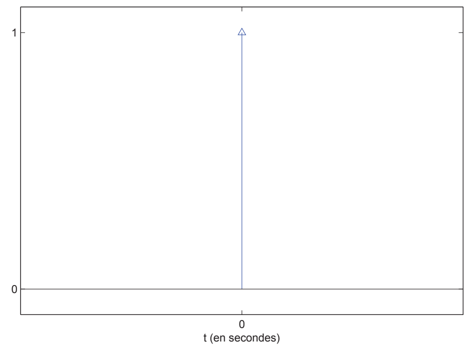
Signal porte



$$\boxed{\Pi_L(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{L}{2} \leq t < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

- Très utile pour faire les calculs : un signal quelconque de support temporel borné égal à L peut être vu comme le produit d'un signal à support temporel non borné et d'une fonction porte
- On travaille aussi souvent sur une version périodisée de ce signal : signal carré ou en créneau

Dirac (continu)



$$\boxed{\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

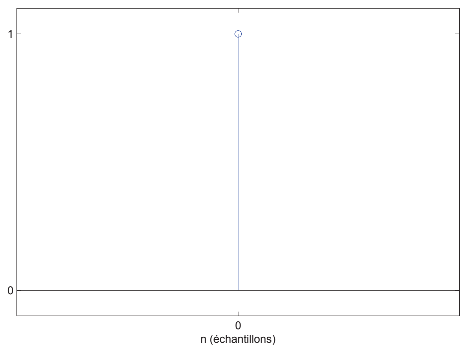
- En théorie, ce *signal* n'est pas un signal mais ce qu'on appelle une distribution (hors programme)
- Il vérifie la propriété suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$x(t) \times \delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

- Très utile pour établir des propriétés d'échantillonnage
- On le représente par une flèche entre 0 et 1

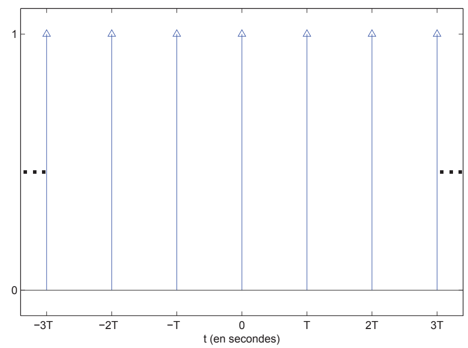
Dirac (discret)



$$\boxed{\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

- Version discrète de la distribution de Dirac
- Parfois aussi appelé symbole de Kronecker

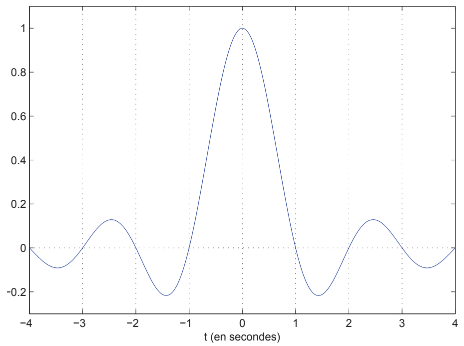
Peigne de Dirac



$$\boxed{\text{III}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)}$$

- Très utile pour modéliser de façon théorique le processus d'échantillonnage
- Signal périodique de période fondamentale T

Sinus cardinal



$$\boxed{\text{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{sinon} \end{cases}}$$

- Comme nous le verrons, ce signal apparaîtra naturellement quand nous allons calculer des transformées de Fourier
- Il est aussi très utilisé en physique ondulatoire

Qu'est-ce que l'échantillonnage ?

- Principe : Convertir un signal continu en un signal discret en ne stockant que ce qui se passe à certains instants t_n

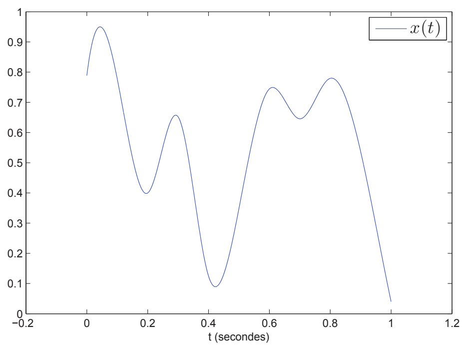
$$\boxed{x_n = x(t_n)}$$

- On ne va considérer ici que l'échantillonnage uniforme, c'est à dire qu'on prend une valeur toutes les T_s secondes, où T_s est fixe

$$\boxed{t_n = nT_s = \frac{n}{F_s}}$$

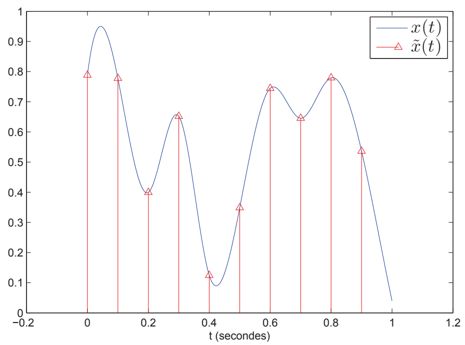
- T_s est appelée la **période d'échantillonnage** (en secondes)
- $\boxed{F_s = \frac{1}{T_s}}$ est appelée la **fréquence d'échantillonnage** (en Hertz)
- Une seconde de signal correspond à F_s échantillons.
- L'indice s correspond au mot *sampling* en anglais qui veut dire *échantillonnage*

Exemple



- Signal continu $x(t)$ défini sur $t \in [0, 1[$

Exemple



- On prend une valeur toutes les 0.1 secondes en commençant par $t = 0$ et en s'arrêtant à $t = 0.9$:
  - $T_s = 0.1$ secondes
  - $F_s = 10$ Hz
- Temps t_n définis par

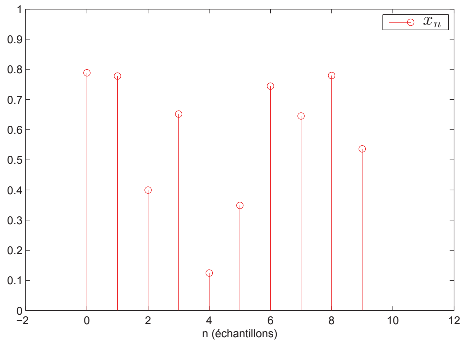
$$t_n = nT_s = \frac{n}{F_s} \text{ pour } n \in [\![0, 9]\!]$$

$$t_0 = 0, t_1 = 0.1, t_2 = 0.2, \cdots$$

- Le signal continu obtenu peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \sum_{n=0}^{9} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \\ &= x(t) \times \sum_{n=0}^{9} \delta(t - nT_s) \end{aligned}$$

Exemple



- On range chaque valeur

$$x(t_n) = x(nT_s) = x\left(\frac{n}{F_s}\right)$$

dans un vecteur (ou un tableau)

- $x_n = x(t_n)$ avec $n \in [\![0, 9]\!]$
- Le signal est stocké sur $N = 10$ échantillons

Qu'est-ce que le filtrage ?

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\Psi} \longrightarrow y(t)$$

$$x_n \longrightarrow \boxed{\Psi} \longrightarrow y_n$$

Transformation Ψ d'un signal d'entrée $x(t)$ (ou x_n) en un signal de sortie $y(t)$ (ou y_n)

$$y(t) = \Psi\left(x(t)\right) \qquad y_n = \Psi\left(x_n\right)$$

Utilisation

- Les filtres sont présents partout : ordinateurs, téléphones, télévisions, appareils photos, etc...
- Les **filtres analogiques** sont réalisés avec des composants électroniques (résistance, condensateur, inductance, transistor, etc...)
- Les **filtres numériques** sont réalisés par des circuits intégrés, des processeurs programmables (DSP, microcontrôleur), ou du code source sous forme logicielle

Filtre linéaire

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$x_n \longrightarrow \boxed{h_n} \longrightarrow y_n$$

Filtrage linéaire : sortie du filtre s'écrit sous la forme :

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau) d\tau} \qquad \boxed{y_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m\, x_{n-m}}$$

$$y(t) = (h * x)(t) \qquad y_n = (h * x)_n$$

$*$: produit de convolution

$\boxed{h(t) (\text{ou } h_n) : \text{réponse impulsionnelle}}$

Produit de convolution

- **Cas continu.**

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\, g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)\, f(\tau) d\tau$$

- **Cas discret.**

$$(f * g)_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_{n-m}\, g_m = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{n-m}\, f_m$$

- Quelques propriétés :
  - Commutativité : $f * g = g * f$
  - Distributivité : $f * (g + h) = f * g + f * h$
  - Associativité : $(f * g) * h = f * (g * h)$

Produit de convolution

- Le Dirac $\delta(t)$ est l'élément neutre du produit de convolution :

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, x(t) d\tau = x(t)$$

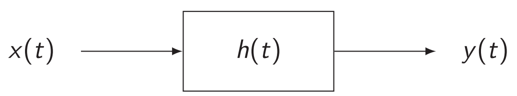
- De la même façon, on a :

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0-\tau)\, x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0-\tau)\, x(t-t_0) d\tau = x(t-t_0)$$

- Ces propriétés sont aussi valables en discret avec le Dirac discret défini de la façon suivante :

$$\boxed{\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Réponse impulsionnelle



Si $x(t) = \delta(t)$, alors

$$y(t) = (h * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) h(t-\tau) d\tau = h(t)$$

$\longrightarrow$ $h(t)$ = sortie du filtre lorsqu'on lui met un Dirac en entrée d'où le nom de **réponse impulsionnelle**

Sommaire

Transformée de Fourier

- Principe : décomposer un signal $x(t)$ (complexe ou réel) comme une somme pondérée d'une infinité de sinusoïdes (avec des fréquences et des phases à l'origine différentes).
- En étudiant les coefficients de pondérations associés à chaque fréquence fondamentale, on peut observer certaines propriétés du signal non visibles dans le domaine temporel
- Au lieu de représenter $x(t)$ en fonction du temps, on observera $X(f)$ (coefficient de pondération associé aux sinusoïdes de fréquence fondamentale f) en fonction de la fréquence f

Définition

- On définit la transformée de Fourier $X(f)$ d'un signal $x(t)$:

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi ft} dt}$$

- On peut également définir une transformée de Fourier inverse :

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\ e^{j2\pi ft} df}$$

Interprétation

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\ e^{j2\pi ft} df$$

- $X(f)$ est une quantité complexe, qui rend compte de la contribution de la sinusoïde de fréquence fondamentale f dans le signal $x(t)$. Attention, même si $x(t)$ est réel, la quantité $X(f)$ est a priori complexe. Pour visualiser cette quantité on représente en général le module au carré $|X(f)|^2$, appelé aussi spectre.
- Le module $|X(f)|$ est lié à l'amplitude de la sinusoïde de fréquence fondamentale f dans la décomposition de $x(t)$ comme une somme infinie de sinusoïdes. Si cette quantité est élevée, c'est que la sinusoïde de fréquence fondamentale f a une place importante dans la décomposition de $x(t)$.
- L'argument $\arg\{X(f)\}$ est lié au déphasage de la sinusoïde de fréquence fondamentale f dans la décomposition de $x(t)$ comme une somme infinie de sinusoïdes.
- Seules les fréquences positives ont un vrai sens physique

Propriétés

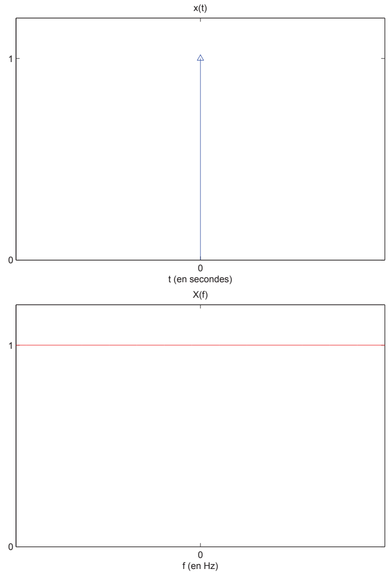
On peut démontrer les propriétés suivantes :

- Linéarité :
$$\mathcal{TF}\{\lambda x(t) + y(t)\} = \lambda X(f) + Y(f)$$
- Translation :
$$\mathcal{TF}\{x(t - t_0)\} = e^{-2\pi jft_0} X(f)$$
- Modulation :
$$\mathcal{TF}\left\{x(t) e^{2\pi jf_0 t}\right\} = X(f - f_0)$$
- Convolution :
$$\mathcal{TF}\{x(t) * y(t)\} = X(f)Y(f)$$
- Multiplication :
$$\mathcal{TF}\{x(t)y(t)\} = X(f) * Y(f)$$

Liens entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel

Produit dans le domaine temporel	$\Leftrightarrow$	Produit de convolution dans le domaine fréquentiel
Produit de convolution dans le domaine temporel	$\Leftrightarrow$	Produit dans le domaine fréquentiel
Translation dans le domaine temporel	$\Leftrightarrow$	Modulation dans le domaine fréquentiel
Modulation dans le domaine temporel	$\Leftrightarrow$	Translation dans le domaine fréquentiel
Signal réel	$\Leftrightarrow$	Module de la transformée de Fourier pair et argument de la transformée de Fourier impair
Transformée de Fourier réelle (et signal réel)	$\Leftrightarrow$	Signal pair (et réel)
Signal périodique	$\Leftrightarrow$	Spectre discret

Dirac

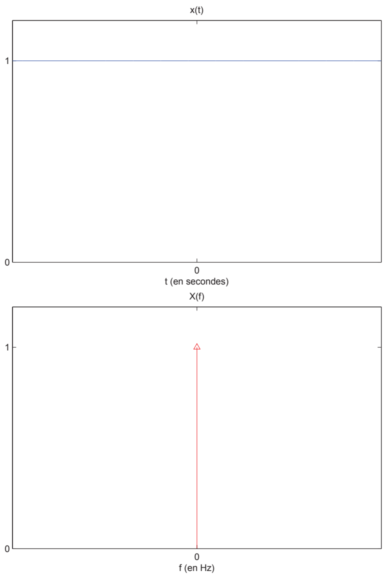


$$\begin{aligned}\mathcal{TF}\left\{\delta(t)\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f \times 0} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{TF}\left\{\delta(t)\right\} = 1}$$

Ce *signal*, très localisé dans le domaine temporel, a une largeur de bande infinie

Constante



$$\begin{aligned}\mathcal{TF}^{-1}\left\{\delta(f)\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) e^{j2\pi f t} df \\ &= e^{j2\pi 0 \times t} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{TF}\left\{1\right\} = \delta(f)}$$

Ce signal, ayant un support temporel infini, est très localisé dans le domaine fréquentiel

Dirac translaté - Exponentielle complexe

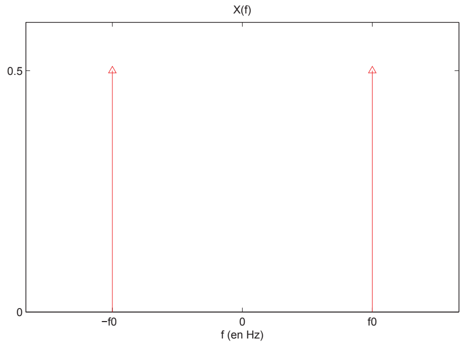
Grâce aux propriétés démontrées dans la partie précédente, on sait que :

$$\begin{aligned}\mathcal{TF}\left\{\delta(t-t_0)\right\} &= e^{-j2\pi f t_0} \mathcal{TF}\left\{\delta(t)\right\} \\ &= \boxed{e^{-j2\pi f t_0}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\} &= \mathcal{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t} \times 1\right\} \\ &= \boxed{\delta(f-f_0)}\end{aligned}$$

Au passage on peut remarquer que, même si la fonction $e^{j2\pi f_0 t}$ n'est ni d'énergie finie ni réelle, il est néanmoins possible de définir sa transformée de Fourier.

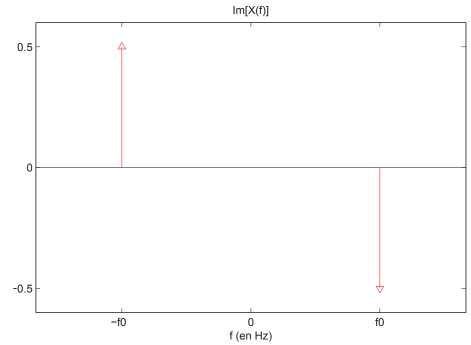
Cosinus



En utilisant la formule d'Euler on peut définir et calculer la transformée de Fourier de la fonction cosinus :

$$\begin{aligned}
\mathcal{TF}\{\cos(2\pi f_0 t)\} &= \mathcal{TF}\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathcal{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\} + \mathcal{TF}\left\{e^{-j2\pi f_0 t}\right\}\right] \\
&= \boxed{\frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}}
\end{aligned}$$

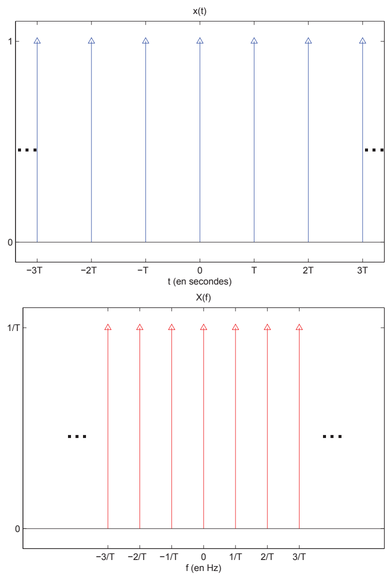
Sinus



De la même façon, on peut définir et calculer la transformée de Fourier de la fonction sinus :

$$\begin{aligned}
\mathcal{TF}\{\sin(2\pi f_0 t)\} &= \mathcal{TF}\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}\right\} \\
&= \frac{1}{2j}\left[\mathcal{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\} - \mathcal{TF}\left\{e^{-j2\pi f_0 t}\right\}\right] \\
&= \boxed{\frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j}}
\end{aligned}$$

Peigne de Dirac

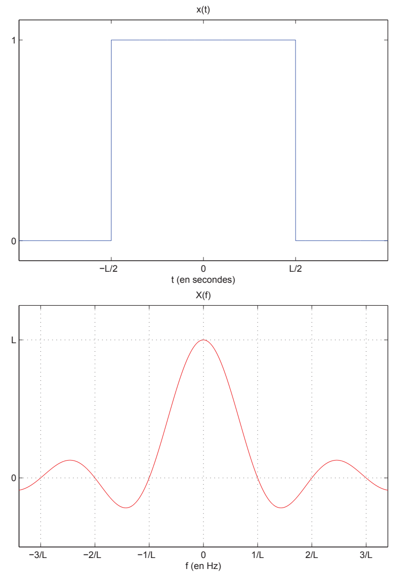


$$\mathcal{TF}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)\right\} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{TF}\{\mathrm{III}_T(t)\} = \frac{1}{T}\mathrm{III}_{\frac{1}{T}}(f)}$$

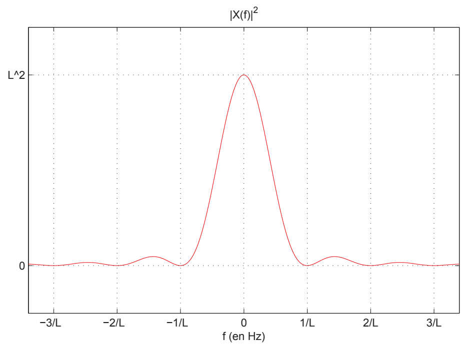
- Impossible à démontrer de façon simple : implique la théorie des distributions et les séries de Fourier (hors programme)
- La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est... un peigne de Dirac !
- Plus le peigne de Dirac est espacé dans le domaine temporel (T grand), plus il est resserré dans le domaine fréquentiel

Fonction porte



$$\begin{aligned}
\mathcal{TF}\{\Pi_L(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_L(t) e^{-j2\pi f t}\, dt \\
&= \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} e^{-j2\pi f t}\, dt \\
&= \left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \\
&= \frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j\pi f L} - e^{j\pi f L}\right] \\
&= \frac{1}{\pi f} \times \frac{e^{j\pi f L} - e^{-j\pi f L}}{2j} \\
&= \frac{1}{\pi f} \times \sin(\pi f L) \\
&= L \times \frac{\sin(\pi f L)}{\pi f L} \\
&= \boxed{L\, \mathrm{sinc}(Lf)}
\end{aligned}$$

Fonction porte

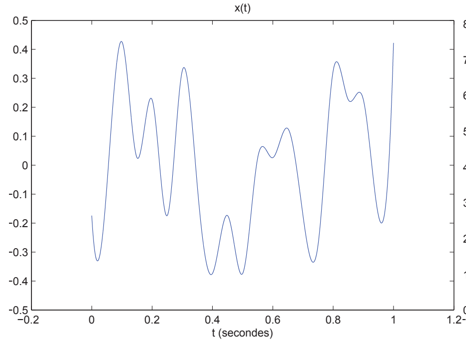


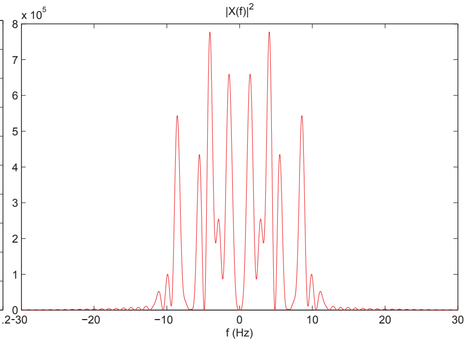
- La largeur de bande de la fonction porte est en théorie infinie, mais si l'on trace le module au carré de la transformée de Fourier, on voit que la majorité des intensités se situe dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{L}, +\frac{1}{L}\right]$
- En première approximation on peut donc utiliser $B \approx \frac{1}{L}$ (on utilise ici la notation de la bande de base)
- Plus ce signal a un support temporel important (L grand), plus sa largeur de bande est petite (et inversement).

Interprétation d'un spectre

- Comme $X(f)$ est à valeurs complexes, on s'interesse en général à son module (souvent au carré) $|X(f)|^2$ et/ou à sa phase $\arg(X(f))$.
- Si le signal temporel $x(t)$ est réel, alors $X(-f) = X^*(f)$ donc il suffit d'étudier $|X(f)|^2$ pour les fréquences positives.
- Observer le spectre d'un signal permet de l'analyser de façon plus pertinente parfois que dans le domaine temporel

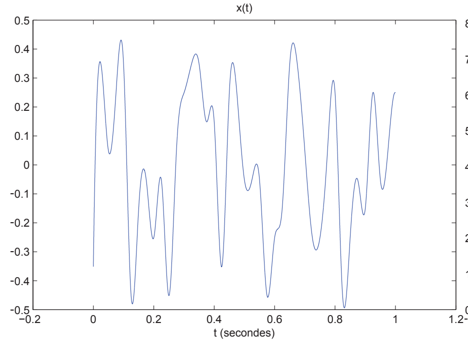
Interprétation d'un spectre

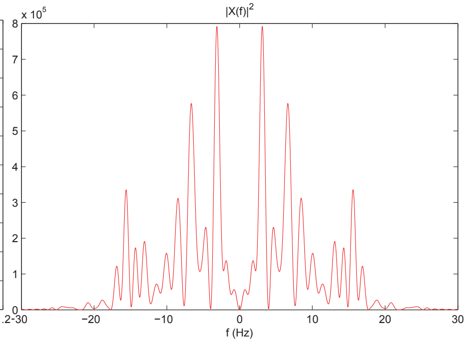




Signal lent : le module au carré $|X(f)|^2$ est élevé dans les basses fréquences
Les sinusoïdes de basses fréquences fondamentales contribuent plus que les autres

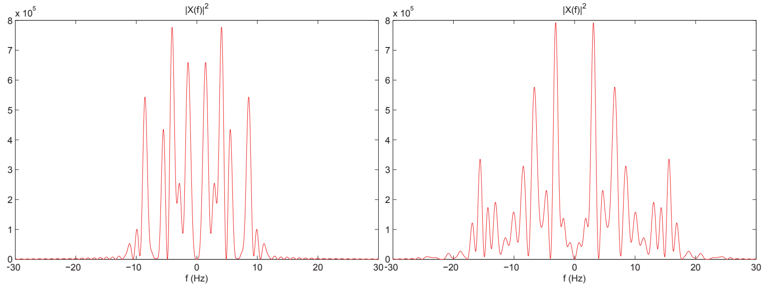
Interprétation d'un spectre





Signal plus rapide : le module au carré $|X(f)|^2$ est élevé aussi dans les fréquences plus élevées
Les sinusoïdes de plus hautes fréquences fondamentales contribuent aussi

Notion de largeur de bande



- Si on compare ces deux spectres, on voit que les valeurs élevées sont comprises entre -10 Hz et 10 Hz pour le premier, et entre -20 Hz et 20 Hz pour le second
- Les deux signaux n'occupent pas le même support fréquentiel.

Notion de largeur de bande

- On appelle **largeur de bande** d'un signal et on note $B = [f_{min}, f_{max}]$ avec $f_{min} \geq 0$ et $f_{max} \geq 0$ la plage de fréquences qu'un signal occupe.
- Dans notre exemple, on a :

$$B_1 = 0 - 10 \text{ Hz} \qquad B_2 = 0 - 20 \text{ Hz}$$

- Attention, pour déterminer la largeur de bande, il ne faut considérer que les fréquences positives !
- Dans le cas où $f_{min} = 0$ on dit que le signal est en **bande de base**, et on note plus simplement $B = f_{max}$
- Dans notre exemple, on écrirait plus simplement $B_1 = 10$ Hz et $B_2 = 20$ Hz

Conséquences du filtrage linéaire dans le domaine fréquentiel

- Si on prend la transformée de Fourier de la relation de filtrage linéaire on a

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\{y(t)\} &= \mathcal{TF}\{h(t) * x(t)\} \\ &= \mathcal{TF}\{h(t)\} \times \mathcal{TF}\{x(t)\} \end{aligned}$$

- Ceci nous donne donc une relation fondamentale pour le filtrage linéaire :

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

- Filtrer un signal revient donc à multiplier son spectre par une quantité $H(f) = \mathcal{TF}\{h(t)\}$ et donc à agir sur la répartition de l'énergie sur les fréquences du spectre.

Filtre linéaire dans le domaine fréquentiel

$$X(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow Y(f)$$

Dans le domaine fréquentiel :

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

$$\boxed{H(f) = \mathcal{TF}\{h(t)\} : \textbf{ fonction de transfert} \text{ du filtre}}$$

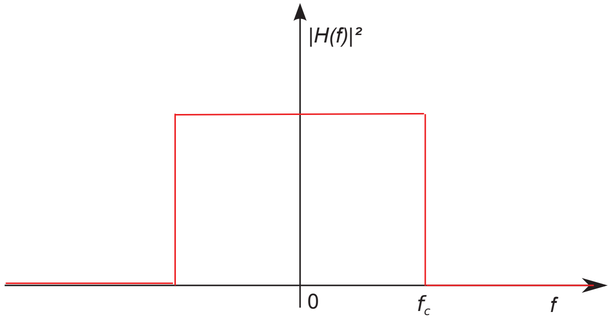
Fonction de transfert

- Un filtre linéaire est donc totalement défini par sa fonction de transfert $H(f)$
- $H(f)$ est une quantité complexe, donc on peut observer son module (au carré) $|H(f)|^2$ et sa phase $\arg\{H(f)\}$
- En général $h(t)$ est réel, donc le module $|H(f)|$ est pair et la phase $\arg\{H(f)\}$ est impaire
- Que peut-on dire sur un filtre en observant sa fonction de transfert ?

Bande passante

- En regardant le carré du module de la fonction de transfert $|H(f)|^2$ on va pouvoir savoir quel type d'effets le filtre aura
- Les fréquences pour lesquelles $|H(f)|^2$ est elevé seront conservées (ou amplifiées) dans le signal filtré
- Les fréquences pour lesquelles $|H(f)|^2$ est faible seront supprimées (ou atténuées) dans le signal filtré
- De la même façon qu'on a défini une largeur de bande pour un signal, on va définir une bande passante pour un filtre
- On appelle **bande passante** d'un filtrage et on note $BP = [f_{min}, f_{max}]$ avec $f_{min} \geq 0$ et $f_{max} \geq 0$ la plage de fréquences qu'un filtre laisse passer

Filtre passe-bas

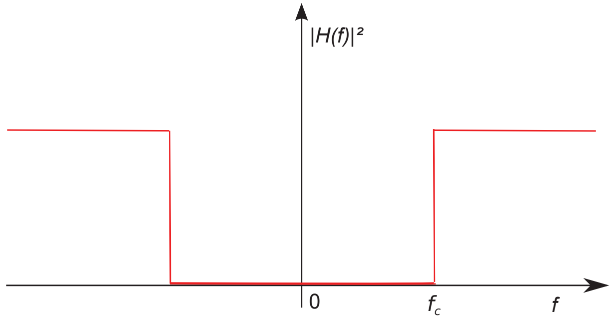


Fréquence de coupure : f_c

Toutes les fréquences en dehors de la bande $[-f_c, f_c]$ seront supprimées

Bande passante $BP = [0, f_c]$

Filtre passe-haut

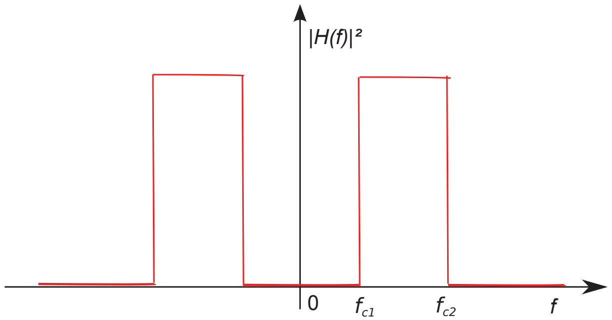


Fréquence de coupure : f_c

Toutes les fréquences dans la bande $[-f_c, f_c]$ seront supprimées

Bande passante $BP = [f_c, +\infty[$

Filtre passe-bande

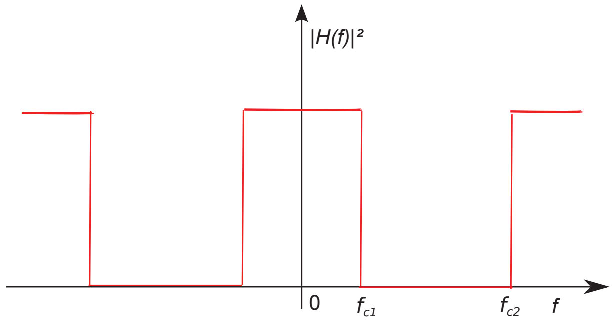


Fréquences de coupure : f_{c1}, f_{c2}

Toutes les fréquences en dehors de la bande $[-f_{c2}, -f_{c1}] \cup [f_{c1}, f_{c2}]$ seront supprimées

Bande passante $BP = [f_{c1}, f_{c2}]$

Filtre coupe-bande



Fréquences de coupure : f_{c1}, f_{c2}

Toutes les fréquences dans la bande $[-f_{c2}, -f_{c1}] \cup [f_{c1}, f_{c2}]$ seront supprimées

Bande passante $BP = [0, f_{c1}] \cup [f_{c2} + \infty[$

Bande passante vs. largeur de bande

- La largeur de bande B correspond à l'occupation spectrale d'un signal : il s'agit d'indiquer dans quel intervalle de fréquences les composantes fréquentielles sont non-négligeables.
- La bande passante BP est utilisée pour caractériser un système (par exemple un filtre, ou un canal de transmission). Il s'agit d'indiquer la plage de fréquences dans laquelle le système est capable de traiter ou de transmettre un signal.
- Dans la pratique, il arrive souvent que l'on utilise indifféremment ces deux expressions pour parler d'un signal ou d'un système. Ceci est dû au fait qu'en communications numériques, on s'arrange en général pour que la largeur de bande du signal à transmettre soit compatible avec la bande passante du canal de transmission.

Sommaire

Énergie et puissance moyenne totale

- **Cas continu.** L'énergie totale E_x et la puissance moyenne totale P_x d'un signal $x(t)$ sont définies par :

$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt} \quad \boxed{P_x = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 dt}$$

- **Cas discret.** L'énergie totale E_x et la puissance moyenne totale P_x d'un signal x_n sont définies par :

$$\boxed{E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2} \quad \boxed{P_x = \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{2m+1} \sum_{n=-m}^{m} |x_n|^2}$$

Classification des signaux

- Si $E_x < +\infty$, on dit que le signal est **à énergie finie**. En pratique, c'est le cas de tous les signaux physiquement réalisables. Un signal à énergie finie a une puissance moyenne totale nulle.
- Si $P_x < +\infty$, on dit que le signal est **à puissance finie**. Bien que ces signaux n'existent pas dans le monde réel, ils sont utiles pour construire des modèles étudiables. Un signal à puissance finie et de puissance moyenne totale non nulle ne peut pas être d'énergie finie.

Théorème de Parceval

- On peut démontrer que, pour un signal à énergie finie, son énergie dans le domaine temporel est la même que celle dans le domaine fréquentiel

$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df}$$

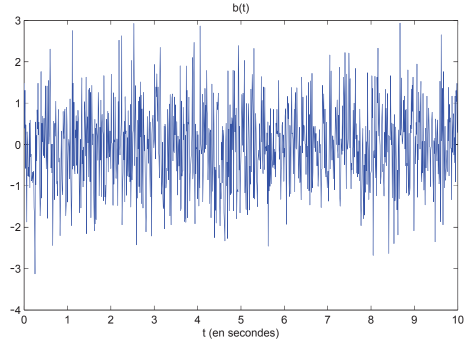
- L'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie : fréquentielle ou temporelle.

Sommaire

Signaux déterministes, signaux aléatoires

- Jusqu'à présent, nous disposions pour tous les signaux que nous avons étudiés d'une équation qui nous donnait l'expression de $x(t)$ en fonction de t ou x_n en fonction de n : on dit que ces signaux sont **déterministes**
- Dans la vraie vie en revanche, on ne dispose pas d'une équation pour tous les signaux !
- Certains phénomènes (les perturbations par exemple) sont a priori inconnus et aléatoires. On n'est pas capable de dire précisément les valeurs que ces signaux vont prendre, mais on sait par exemple que leur amplitude sera de tel ordre de grandeur, ou que *en général* ils auront des fréquences dans une certaine bande, etc... On dit que ces signaux sont **aléatoires**

Notion de bruit blanc

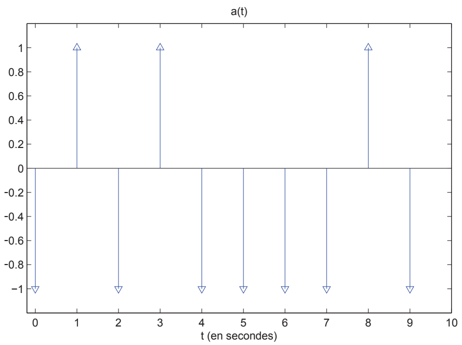


Ici $\sigma^2 = 1$

Un bruit blanc $b(t)$ est un signal aléatoire qui prend des valeurs au hasard à chaque instant t

- Les valeurs prises à chaque instant sont toutes indépendantes les unes des autres et suivent toutes la même loi (exemple : bruit blanc Gaussien)
- La moyenne de ce signal est égale à 0
- La variance du signal est égale à σ^2
- Plus σ^2 est élevé, plus le bruit blanc a tendance à prendre des valeurs éloignées de 0 et plus les amplitudes sont élevées (en valeur absolue)
- Très utilisé pour modéliser des perturbations dont on ne connaît que l'ordre de grandeur (paramétré par σ^2)

Emission de symboles aléatoires



Ici $T = 1$ seconde et $a_k = \pm 1$

On envoie un symbole a_k aléatoirement choisi dans un dictionnaire toutes les T secondes

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, \delta(t - kT)$$

- On définit un dictionnaire (par exemple $a_k = \pm 1$)
- A chaque instant $t = kT$ on envoie au hasard un symbole du dictionnaire
- Les symboles émis sont indépendants, et on suppose que chaque symbole a une même probabilité d'apparition (dans notre exemple, chacun des 2 symboles du dictionnaire a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'apparaître)
- Plus T est petit, plus les symboles sont émis rapidement

Transformée de Fourier ?

- Nous avons vu que pour les signaux déterministes, il était important de les étudier dans le domaine fréquentiel pour mieux comprendre leurs propriétés
- Comment faire pour un signal aléatoire ? Par définition, à chaque nouveau signal que l'on génère, on aura un signal différent et on aura une transformée de Fourier différente !
- On va définir par analogie un outil, appelé **densité spectrale de puissance (DSP)**, permettant d'observer le contenu fréquentiel d'un signal aléatoire *en moyenne*

Densité spectrale de puissance

- Pour un signal déterministe à énergie finie, on a :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

où E_x est l'énergie totale
$|X(f)|^2$ peut être vue comme une densité spectrale d'énergie

- Pour un signal aléatoire, on va définir la densité spectrale de puissance $\Gamma_x(f)$, comme la quantité vérifiant :

$$\boxed{P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) df}$$

où P_x est la puissance moyenne totale

- $\Gamma_x(f)$ donne la répartition de la puissance selon les fréquences f
- Analogie entre $|X(f)|^2$ pour l'énergie dans le cas déterministe, et $\Gamma_x(f)$ pour la puissance dans le cas aléatoire

Bruit blanc

- Dans le cas d'un bruit blanc, comme tout est aléatoire et indépendant, il n'y a pas de raison qu'une fréquence ait plus d'importance que les autres. La densité spectrale de puissance est donc constante.
- Pour un bruit blanc $b(t)$ de variance σ^2, on a donc :

$$\boxed{\Gamma_b(f) = \sigma^2}$$

- On remarque qu'on a donc $P_b = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 df = +\infty$! Un bruit blanc n'existe donc pas dans la réalité physique, car sa puissance moyenne totale est infinie !
- Au lieu d'utiliser σ^2, il est courant d'introduire $N_0 = 2\sigma^2$ (en Watt par Hertz) et d'écrire :

$$\boxed{\Gamma_b(f) = \frac{N_0}{2}}$$

Emissions de symboles aléatoires

- Dans le cas d'une émission de symboles aléatoires indépendants toutes les T secondes

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, \delta(t - kT)$$

On peut montrer que

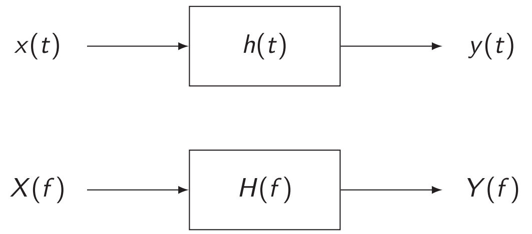
$$\boxed{\Gamma_a(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)}$$

- μ_a et σ_a^2 sont respectivement la moyenne et la variance des symboles du dictionnaire
- Exemple : si $a_k \pm 1$, alors

$$\mu_a = \frac{1}{2}(-1+1) = 0$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{2}((-1-0)^2 + (1-0)^2) = 1$$

Filtrage des signaux aléatoires



- Dans le cas déterministe, on a $Y(f) = X(f)H(f)$
- Si l'on suppose maintenant que le signal $x(t)$ est aléatoire, que devient l'expression ?
- $h(t)$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre, c'est donc une quantité déterministe dont on peut prendre la transformée de Fourier
- En revanche, $y(t)$ dépend de $x(t)$, il est donc également aléatoire !

Formule de Wiener Lee

Considérons :

- Un signal aléatoire $x(t)$ de DSP $\Gamma_x(f)$ que l'on filtre avec un filtre linéaire de fonction de transfert $H(f)$.
- Alors la DSP $\Gamma_y(f)$ de la sortie du filtre $y(t)$ vérifie la relation suivante :

$$\boxed{\Gamma_y(f) = |H(f)|^2\ \Gamma_x(f)}$$

Rapport signal sur bruit

- Etant donné un signal $x(t)$ déterministe corrompu par un bruit blanc additif $b(t)$, le signal bruité $y(t)$ s'écrit :

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

- On appelle le rapport signal sur bruit, la quantité :

$$\boxed{SNR = \frac{P_x}{P_b}}$$

  Plus cette quantité est élevée, moins le bruit n'a d'importance
- On exprime souvent cette quantité en décibels :

$$\boxed{SNR_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{P_x}{P_b}\right)}$$