EXERCICES SUR LES ENSEMBLES

1. On considère les ensembles suivants :

$$A = \{1, 2, 5\}\ ,\ B = \{\{1, 2\}, 5\}\ ,\ C = \{\{1, 2, 5\}\}\ ,\ D = \{\emptyset, 1, 2, 5\}\ ,$$
$$E = \{5, 1, 2\}\ ,\ F = \{\{1, 2\}, \{5\}\}\ ,\ G = \{\{1, 2\}, \{5\}, 5\}\ ,\ H = \{5, \{1\}, \{2\}\}\ .$$

1) Quelles sont les relations d'égalité ou d'inclusion existant entre ces ensembles ?
2) Donner le nombre d'éléments de chacun de ces ensembles.
3) Déterminer $A \cap B$, $G \cup H$, $E \setminus G$.
4) Quel est le complémentaire de A dans D ?

2. Les notations $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$ désignent-elles le même ensemble ?

3. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ suivants :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\ ,\ B = \{1, 3, 5, 7\}\ ,\ C = \{2, 4, 6\}\ ,\ D = \{3, 6\}\ .$$

1) Déterminer $B \cap D$, $C \cap D$.
2) Déterminer $B \cup C$, $C \cup D$. Une des ces réunion est-elle disjointe ?
3) Déterminer $C \,\Delta\, D$.
4) Déterminer les complémentaires dans A de B, C et D.

4. Donner en extension l'ensemble des nombres pairs compris entre 3 et 9.

5. Donner en compréhension l'ensemble $\{2, 4, 8, 16, 32\}$.

6. Soit Q l'ensemble des quadrilatères du plan. On considère les sous-ensembles suivants :

A l'ensemble des quadrilatères ayant un angle droit
P l'ensemble des parallélogrammes
L l'ensemble des losanges
T l'ensemble des trapèzes
R l'ensemble des rectangles
C l'ensemble des carrés.

1) Quelles sont les relations d'inclusion existant entre ces ensembles.
2) Déterminer $A \cap L$, $A \cap P$, $L \cap R$.

7. Que peut-on dire de $A = \{B \mid B \notin B\}$?

8. Soit A, B, C, D quatre sous-ensembles de Ω.

1) Montrer que si $A \subset B$ et $C \subset D$, alors $A \cap C \subset B \cap D$ et $A \cup C \subset B \cup D$.
2) Montrer que $A \subset B \cap C$, si et seulement si $A \subset B$ et $A \subset C$.

3) Montrer que $B \cup C \subset A$, si et seulement si $B \subset A$ et $C \subset A$.
4) Montrer que $A \cup B = A \cap B$ si et seulement si $A = B$.

9. Soit A et B deux sous-ensembles de Ω. Montrer que A et B sont disjoints si et seulement si $A^C \cup B^C = \Omega$.

10. Soit A, B et C trois sous-ensembles de Ω. Montrer les formules suivantes :

1) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
2) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap B = (B \setminus C) \cap A$
3) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

11. Soit A et B deux sous-ensembles de Ω. Montrer les formules suivantes :

1) $A^C \Delta B^C = A \Delta B$
2) $(A \Delta B)^C = A^C \Delta B = A \Delta B^C$

12. Soit A une partie de Ω. Déterminer $A \Delta A^C$, et $A \Delta \Omega$

13. Soit A et B deux sous-ensembles de Ω.

1) Exprimer les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, en utilisant uniquement l'intersection et le complémentaire.
2) Même problème en utilisant uniquement la réunion et le complémentaire.
3) Même problème en utilisant uniquement la différence et le complémentaire.

14. Donner les éléments de $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$, de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$, de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0, 1\}))$.

15. 1) Soit Ω un ensemble. Existe-t-il un ensemble A tel que $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$?
2) Soit E un ensemble et A une partie de E. Trouver un ensemble Ω tel que $A \in \Omega$ et $A \subset \Omega$.

16. Soit A et B deux sous-ensembles de Ω, tels que $A \not\subset B$,$B \not\subset A$, $A \cup B \neq \Omega$, $A \cap B \neq \emptyset$. Ecrire une partition de Ω formée de quatre éléments construits à partir de A et B et des opérations élémentaires sur les ensembles.

17. Trouver toutes les partitions de $\{1, 2, 3\}$.

Corrigé

1. 1) $A = E \subset D\,;\ F \subset G\ B \subset G$.

2) $\mathrm{card}\,A = 3$, $\mathrm{card}\,B = 2$, $\mathrm{card}\,C = 1$, $\mathrm{card}\,D = 4$, $\mathrm{card}\,E = 3$, $\mathrm{card}\,F = 2$, $\mathrm{card}\,G = 3$, $\mathrm{card}\,H = 3$.

3) $A \cap B = \{5\}$, $G \cup H = \{5, \{1\}, \{2\}, \{5\}, \{1, 2\}\}$, $E \setminus G = \{1, 2\}$

4) Le complémentaire de A dans D est $D \setminus A = \{\emptyset\}$.

2. Les trois ensembles sont distincts. Le premier est l'ensemble vide, $\{\emptyset\}$ est un singleton dont l'unique élément est $\emptyset$, et $\{\{\emptyset\}\}$ est un singleton dont l'unique élément est $\{\emptyset\}$.

3. 1) $B \cap D = \{3\}$, $C \cap D = \{6\}$.

2) $B \cup C = A$, $C \cup D = \{2, 3, 4, 6\}$.

Comme $B \cap C = \emptyset$, les ensembles B et C sont disjoints et la réunion $B \cup C$ est disjointe. Ce n'est pas le cas de $C \cup D$, puisque $C \cap D$ n'est pas vide.

3) $C \,\Delta\, D = \{2, 3, 4\}$.

4) $A \setminus B = C$, $A \setminus C = B$, $A \setminus D = \{1, 2, 4, 5, 7\}$.

4. $\{4, 6, 8\}$.

5. L'ensemble des puissances de 2 comprises entre 2 et 50 (par exemple).

6. 1) On peut donner le résultat sous forme de graphe, chaque flèche indiquant une inclusion.

$$
\begin{tikzcd}
& L \arrow[dr] & & \\
C \arrow[ur] \arrow[dr] & & P \arrow[r] & T \\
& R \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& & A &
\end{tikzcd}
$$

2) $A \cap L = L \cap R = C$, $A \cap P = R$.

7. Si $A \in A$, alors $A \notin A$ et réciproquement. Donc A n'est pas un ensemble.

8. 1) Si x appartient à $A \cap C$, alors x est dans A donc dans B, mais x est aussi dans C, donc dans D, alors x est à la fois dans B et D, donc dans $B \cap D$. D'où l'inclusion $A \cap C \subset B \cap D$.

Si x appartient à $A \cup C$, alors ou bien x est dans A donc dans B, ou bien x est dans C, donc dans D, alors x est dans B ou dans D, donc dans $B \cup D$. D'où l'inclusion $A \cup C \subset B \cup D$.

2) Si $A \subset B \cap C$,

$$A \subset B \cap C \subset B \quad \text{et} \quad A \subset B \cap C \subset C \ ,$$

donc par transitivité, $A \subset B$ et $A \subset C$.

Réciproquement, si $A \subset B$ et $A \subset C$, en utilisant 1),

$$A = A \cap A \subset B \cap C \ .$$

3) Si $B \cup C \subset A$, alors

$$B \subset B \cup C \subset A \quad \text{et} \quad C \subset B \cup C \subset A \ ,$$

donc par transitivité, $B \subset A$ et $C \subset A$.

Réciproquement, si $B \subset A$ et $C \subset A$, en utilisant 1),

$$B \cup C \subset A \cup A = A \ .$$

4) On a

$$B \subset A \cup B = A \cap B \subset A \ ,$$

donc $B \subset A$, et en inversant les rôles de A et B, on a l'inclusion inverse, d'où l'égalité.

9. Les ensembles A et B sont disjoints si et seulement si $A \cap B = \emptyset$, ou encore, en passant au complémentaire, si et seulement si $(A \cap B)^C = \Omega$, et enfin, d'après les formules de Morgan, si et seulement si $A^C \cup B^C = \Omega$.

10. 1) En partant de

$$(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap C^C \ ,$$

et en utilisant la distributivité de l'intersection sur la réunion

$$(A \cup B) \setminus C = (A \cap C^C) \cup (B \cap C^C) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \ .$$

2) On a aussi

$$(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \cap C^C \ ,$$

ce qui peut s'écrire, en raison de l'associativité et de la commutativité de l'intersection

$$(A \cap B) \setminus C = (A \cap C^C) \cap B = (A \setminus C) \cap B \ ,$$

et aussi

$$(A \cap B) \setminus C = (B \cap C^C) \cap A = (B \setminus C) \cap A \ ,$$

et enfin, puisque $C^C \cap C^C = C^C$

$$(A \cap B) \setminus C = (A \cap C^C) \cap (B \cap C^C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C) \ .$$

3) On a

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \cap B^C) \cap C^C = A \cap (B^C \cap C^C) \ .$$

Mais, d'après les formules de Morgan

$$B^C \cap C^C = (B \cup C)^C \ ,$$

donc

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \cap B^C) \cap C^C = A \cap (B \cup C)^C = A \setminus (B \cup C) \ .$$

11. 1) On a

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C) \ .$$

Donc, en remplaçant A par A^C et B par B^C dans la formule précédente,

$$A^C \,\Delta\, B^C = (A^C \cap B) \cup (B^C \cap A) = A \,\Delta\, B \ .$$

2) En remplaçant B par B^C dans la formule précédente

$$A^C \,\Delta\, B = (A^C \cap B^C) \cup (B \cap A) = A \,\Delta\, B^C \ .$$

Mais

$$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C \ ,$$

donc

$$A^C \,\Delta\, B = (A \cup B)^C \cup (A \cap B) \ ,$$

et en prenant le complémentaire

$$(A^C \,\Delta\, B)^C = ((A \cup B)^C \cup (A \cap B))^C \ .$$

Alors d'après les formules de Morgan

$$(A^C \,\Delta\, B)^C = (A \cup B) \cap (A \cap B)^C = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \,\Delta\, B \ .$$

Donc

$$A^C \,\Delta\, B = (A \,\Delta\, B)^C \ .$$

12. On a

$$A \,\Delta\, A^C = (A \cup A^C) \setminus (A \cap A^C) = \Omega \setminus \emptyset = \Omega \ ,$$

et

$$A \,\Delta\, \Omega = (A \cup \Omega) \setminus (A \cap \Omega) = \Omega \setminus A = A^C \ .$$

13. On donne les résultats sous forme de tableau

	$\cap$	$\cup$	$\setminus$
$A \cap B$	$A \cap B$	$(A^C \cup B^C)^C$	$A \setminus B^C$
$A \cup B$	$(A^C \cap B^C)^C$	$A \cup B$	$(A^C \setminus B)^C$
$A \setminus B$	$A \cap B^C$	$(A^C \cup B)^C$	$A \setminus B$

14. L'ensemble des parties de $\{0,1,2\}$ est formé des $2^3 = 8$ éléments suivants

$$\emptyset \ , \ \{0\} \ , \ \{1\} \ , \ \{2\} \ , \ \{0,1\} \ , \ \{0,2\} \ , \ \{1,2\} \ , \ \{0,1,2\} \ .$$

On a $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, donc

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \ ,$$

et finalement $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ possède $2^2 = 4$ éléments :

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \ .$$

On a

$$\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset \ , \ \{0\} \ , \ \{1\} \ , \{0,1\}\} \ ,$$

alors $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0,1\}))$ est formé des $2^4 = 16$ éléments suivants :

$$\emptyset \ , \ \{\emptyset\} \ , \ \{\{0\}\} \ , \ \{\{1\}\} \ , \ \{\{0,1\}\}$$

$$\{\emptyset, \{0\}\}\ ,\ \{\emptyset, \{1\}\}\ ,\ \{\emptyset, \{0,1\}\}\ ,\ \{\{0\}, \{1\}\}\ ,\ \{\{0\}, \{0,1\}\}\ ,\ \{\{1\}, \{0,1\}\}$$
$$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}\ ,\ \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}\ ,\ \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}\ ,\ \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}\ , \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$$

15. 1) L'ensemble vide vérifie les deux conditions.

2) L'ensemble $\Omega = A \cup \{A\}$ vérifie les deux conditions.

16. Les ensembles $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$ et $(A \cup B)^C$ sont des ensembles non vides par hypothèse. Ils sont deux à deux disjoints et leur réunion est Ω. Ils forment une partition de Ω.

17. On trouve les cinq partitions suivantes :

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}\ ,\ \{\{1,2\}, \{3\}\}\ ,\ \{\{1,3\}, \{2\}\}\ ,\ \{\{2,3\}, \{1\}\}\ ,\ \{\{1,2,3\}\}\ .$$