Cours de base: Théorie des Graphes

Dr TARI Abdelkamel
Maître de Conférences Habilité
Directeur du Laboratoire LIMED
Université de Béjaia

Béjaia, 2014

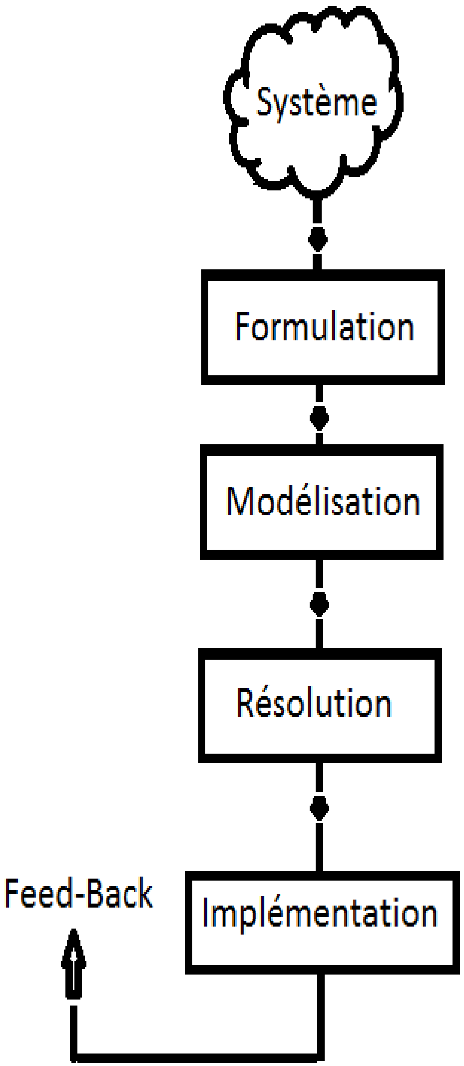
Programme du module

- Concepts fondamentaux
- Cycles et cocycles
- Arbre et Arborescence
- Problèmes de cheminement
- Problème de flôt maximum
- Problème d’ordonnancement

Définition de la RO

- Operations Research (OR) is a discipline that deals with application of advanced analytical methods to help make better decisions. (Wikipédia).
- Advanced analytical methods include mathematical logic, graph, network analysis, Petri Net, Queuing Theory, simulation etc.
- Concevoir et implémenter des approches pour résoudre des problématiques liées à des domaines diverses (informatique, médecine, économie, finance, militaire etc.) jusqu'à satisfaction du (des) décideur (s).

Méthodologie d’approche



1- Analyse du système dans lequel le problème est posé (Approche CATWOE)

2- Identifier les facteurs (Contrôlables et non contrôlables) et les objectifs

3- Construire le modèle (Graphe, Réseaux de Pétri, Mathématiques, Simulation etc.)

4) Elaborer une approche de résolution (exacte ou approchée)

5- Concevoir et implémenter les algorithmes de l’approche de résolution

Approches de résolution (1/2)

- Méthodes exactes:
  - Programmation linéaire (Simplexe et ses variantes)
  - Programmation non linéaire avec ou sans contraintes (relaxation de Lagrange, Khun Tecker
  - Programmation en nombres entiers et bivalentes (Branch and Bound)
  - Arbre recouvrant (Algorithme Glouton: Kruskal)
  - Cheminement (Algorithme Glouton:Djikstra, Bellman, Ford)
  - Flôt (Ford et Fulkerson)
  - Etc…

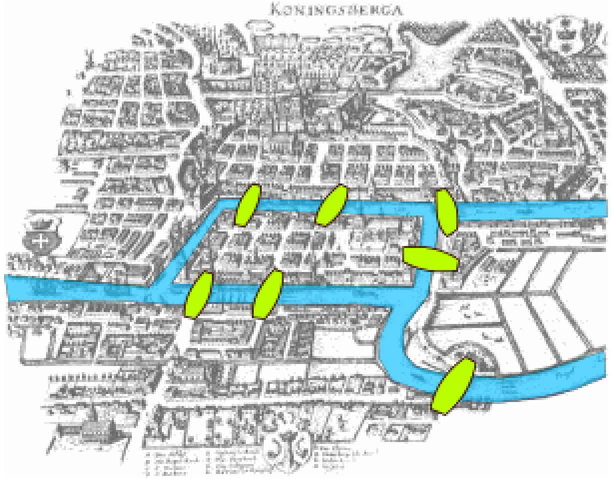
Approches de résolution (1/2)

- Méthodes approchées
  - Heuristique (plus proche voisin, meilleur insertion etc.)
  - Meta heuristique (algorithme génétique, recherche taboo, recuit simulé etc.)

- Programmation dynamique
- Programmation mathématique

Historique (1/2)

- Euler (1935) curiosité mathématique: Partir d'une rive, parcourir les sept ponts de la ville de KÖNESBERG (Allemagne) une et une seule fois et revenir au point de départ.



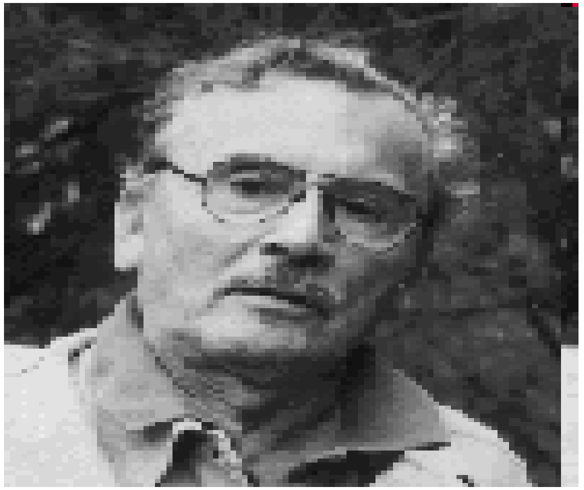
- Mathématicien irlandais Sir William Hamilton (1805-1865) a traité le problème du voyageur de commerce
- Francis Guthrie (1852), mathématicien sud-africain énonça le problème des quatres couleurs lors d'une discussion à son frère, qui demandera à son professeur Auguste De Morgan si toute carte peut être coloriée avec quatre couleurs de façon à ce que des pays voisins aient des couleurs différentes.

Historique (2/2)

- Julius Petersen à la fin du XIX^e siècle s'intéresse aux sous-graphes couvrants, c'est-à-dire aux graphes contenant tous les sommets mais seulement une partie des arêtes. On a vu l’émergence des problèmes de *factorisation de graphe* émergèrent ainsi en. Un sous-graphe couvrant est appelé un *k*-facteur si chacun de ses sommets a *k* arêtes et les premiers théorèmes furent donnés.
- Au milieu du XIX^e siècle, le mathématicien britannique Arthur Cayley s'intéressa aux arbres, qui sont un type particulier de graphe n'ayant pas de cycle, *i.e.* dans lequel il est impossible de revenir à un point de départ sans faire le chemin inverse.
- Mais ce n'est qu'avec la 2ième Guerre mondiale que la pratique va s'organiser pour la première fois et acquérir son nom. En 1940, Patrick Blackett est appelé par l'état-major anglais à diriger la première équipe de recherche opérationnelle pour résoudre certains problèmes tels que l’implantation optimale de radars de surveillance.

Historique (3/3)

Claude Berge (1958), mathématicien français contribue au développement de la théorie des graphes par ses contributions sur les *graphes parfaits* et l'introduction du terme d'hypergraphe. Son ouvrage « Théorie des Graphes et applications » d'introduction à la théorie des graphes est une référence dans le domaine et a contribué énormément à unifier le vocabulaire du domaine.



- A partir de 1946, la TG a connu un développement intenses grâce aux chercheurs motivés par la résolution de problèmes concrets. Parmi eux, Esdger Djikstra (1959) pour le problème de cheminement, Ford et Fulkerson (1956) pour le problème du flôt maximum. Bernard Roy (1958) a développé la méthode MPM pour le problème d'ordonnancement.

Théorie des Graphes

- La théorie des graphes est un ensemble d'outils puissants pour la modélisation et la résolution de problèmes concrets.

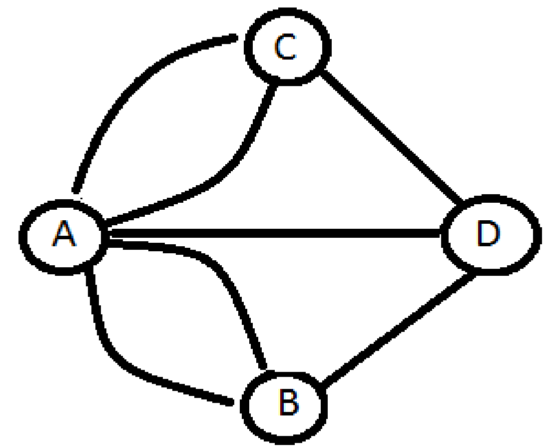
- Un graphe G noté G=(X,U) est donné par
  - Un ensemble fini de sommets X
  - Un ensemble fini d'arcs (arêtes) U où un arc(arête) relie un couple de sommets de X

-Un graphe orienté peut être défini comme G=(X, I, T) où I et T sont des applications définies comme suit:

$$I: X*X \to X \qquad (x,y) \to I(x,y)=x$$

$$T: X*X \to X \qquad (x,y) \to T(x,y)=y$$

Modélisation du graphe d'Euler



Soit G= (X, U) le graphe associé au problème d'Euler

X={A, B, C, D} l'ensemble des sommets

On dira qu'il existe une

arête en deux sommets i et j

si et seulement s'il existe un pont reliant les deux rives i, j

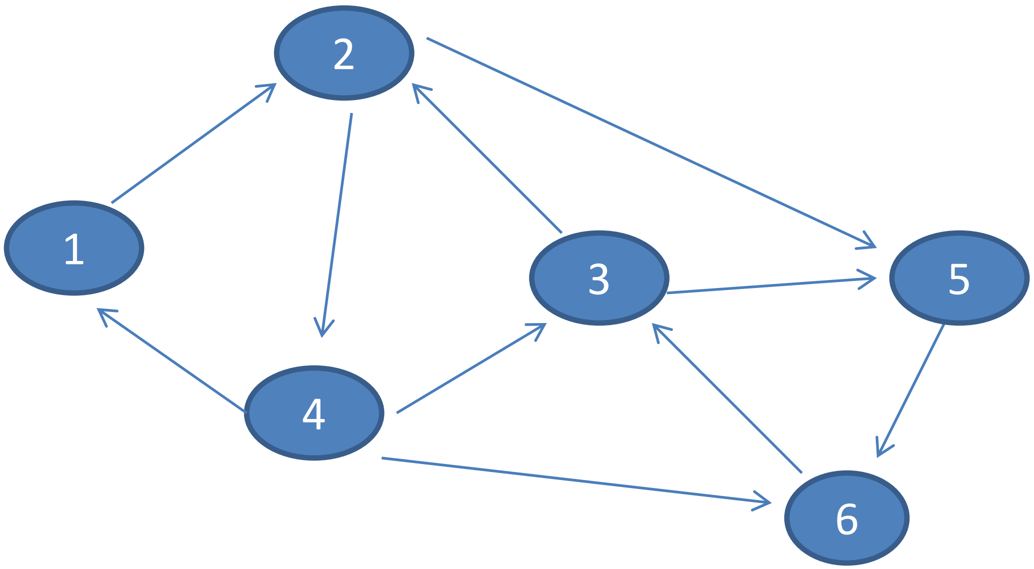
U={ AB, AB, AC, AC, AD, DC, DB}

Définitions et terminologies

- ***Une boucle*** (x,x) est un arc dont l'extrémité initiale coïncide avec son extrémité terminale.
- ***Deux sommets x et y sont adjacents*** s'il existe un arc (arête) (x,y) les reliant. Les sommets x et y sont alors dits voisins.
- Un sommet $y \in X$ est dit ***successeur*** d'un sommet x s'il existe un arc $(x,y) \in U$. On note $\Gamma+(x)$ l'ensemble des successeurs de x dans G.
- Un sommet $y \in X$ est dit ***prédécesseur*** de x s'il existe un arc $(y,x) \in U$. On . On note $\Gamma-(x)$ l'ensemble des prédécesseurs de x dans G.
- Un sommet y est dit ***voisin*** de x s'il est son successeur ou son prédécesseur. On note $\Gamma(x)$ l'ensemble des voisins de x dans G. On a alors la relation: $\Gamma(x)= \Gamma+(x) \cup \Gamma-(x)$
- Soit (x, y) un arc mais pas une boucle de U. Cet arc est dit ***incident à x vers l'extérieur*** et ***incident à y vers l'intérieur***. On note d+G(x) (d-G(x)) le demi degré extérieur (intérieur) de x le nombre d'arcs incidents vers l'extérieur à x. ***Le degré*** d'un sommet x de X est le nombre d'arêtes incidentes à x. Il est noté dG(x) = d+G(x) + d-G(x)

Exemple 1

- Soit le graphe orienté suivant:



Donner l'ensemble des successeurs, prédécesseurs, voisins, demi-degrés et degrés de tous les sommets?

Définitions et terminologies

- L’ordre d’un graphe est égal au nombre de ses sommets. L’ordre du graphe de l’exemple 1 précédent est égal à 6.
- Un graphe est dit simple si chaque couple de sommets est relié par au plus une arête (arc). Un p-graphe est un graphe où chaque couple de sommets est relié par au plus p arcs
- Un graphe est complet si chaque sommet est adjacent à tous les autres, c'est a dire si toutes les arêtes possibles existent (sauf les boucles).
- Un sommet est isolé s’il n’est adjacent à aucun autre sommet. Un graphe est nul s’il n’a aucune arête, c’est un ensemble de sommets isolés.
- Le diamètre d’un graphe est la plus grande distance entre deux sommets

Représentations d'un graphe

- ***Matrice d'adjacence M*** est définie comme suit:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 \quad si \quad (x_i, x_j) \in U \\ 0 \quad sinon \end{cases}$$

On notera que les lignes et les colonnes sont l'ensemble des sommets de G.

- ***Matrice d'incidence sommet-arc*** I

$$I_{i,j} = \begin{cases} 1 \qquad si \quad (x_i, x_j) \in U \\ -1 \quad si \quad (x_{j,} x_i) \in U \\ 0 \qquad \sin on \end{cases}$$

Les lignes sont les sommets et les colonnes sont les arcs.

Donner la matrice d'adjacence et la matrice d'incidence de l'exemple 1

Quelques Structures d'un graphe (1/3)

Soient G=(X, U) un graphe quelconque, $A \subset X$ et $V \subset U$. Considérons l'ensemble des arcs W ayant les deux extrémités dans A. (A,W) est appelé ***sous graphe*** de G, (X, V) est dit ***graphe partiel*** et (A, $W \cap V$) est le ***sous graphe partiel*** engendré par $W \cap V$.

- Reprendre l'exemple 1. Déterminer le sous graphe engendré par A={2, 3, 4}, le graphe partiel engendré par V={(1,2), (2,4), (3,5), (5,6)} et le sous graphe partiel engendré par A et V.

- Considérer le réseau routier composé de d'auto-routes, routes nationales, routes départementales et routes communales de l'Algérie. Donner un sous graphe, un graphe partiel et un sous graphe partiel.

Quelques structures d'un graphe (2/3)

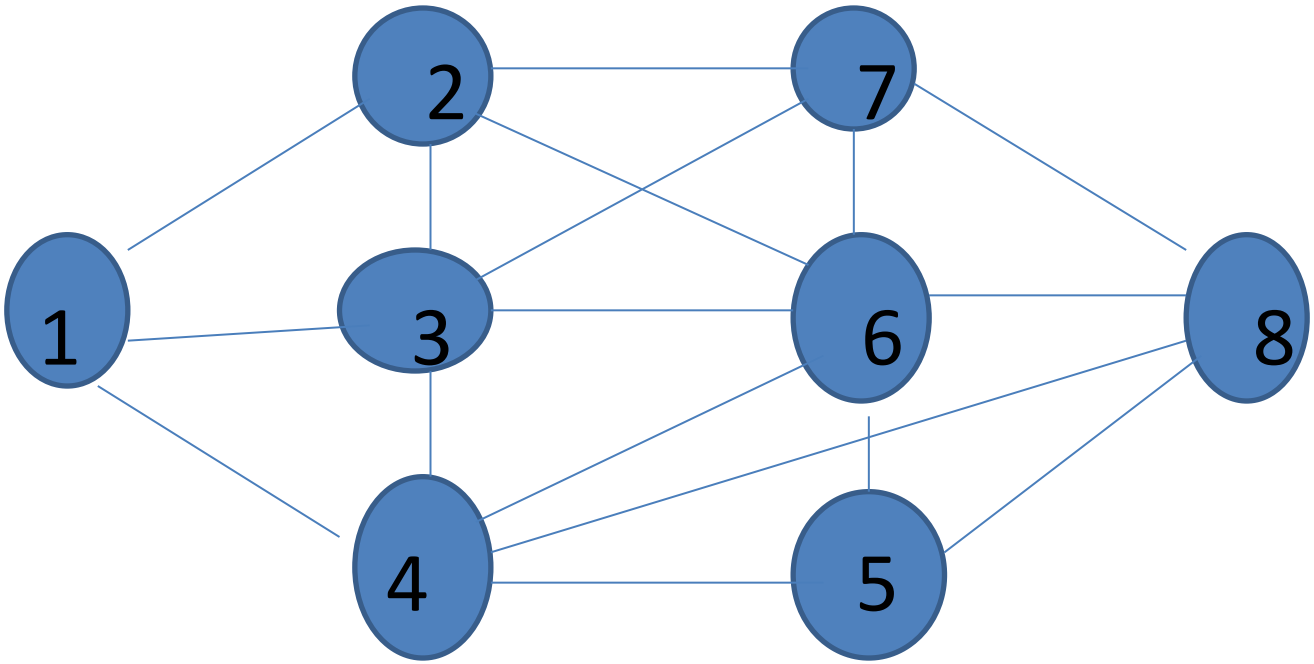
- Une clique est un sous-ensemble de sommets qui induit un sous graphe complet et symétrique.
- Une clique d'ordre n sommets possède n(n-1)/2 arêtes
- On note K_n l'ensemble des cliques d'ordre n d'un graphe G.
- Une clique C est dite maximale s'il n'existe pas une autre clique C' qui la contient. On note ζ_G l'ensemble des cliques maximales de G
- Le problème de la recherche d'une clique maximale de cardinalité maximale.
- Applications:
  - Réseaux sociaux: Rechercher une communauté d'individus tous en relation
  - Biologie l'interaction entre gènes, métabolites ou protéines

Quelques structures d'un graphe (3/3)

- Un couplage C est un ensemble d'arêtes 2 à 2 non adjacentes.
  - Recherche d'un couplage de cardinalité maximale
- Un stable S est un ensemble de sommets 2 à 2 non adjacents.
  - Recherche d'un stable de cardinalité□ maximale
- Un transversal T est un ensemble de sommets tel que chaque arête de G a au moins une extrémité dans T.
  - Recherche d'un Transversal de cardinalité minimale

Exemple

- Soit le graphe non orienté suivant:



Déterminer un couplage maximal, un transversal minimal, un stable maximal et une clique maximale.

Connexité dans un graphe (2/3)

•Un parcours est dit ***simple*** s'il emprunte une et une seule fois chacun de ses arcs. Un parcours est dit Eulerien s'il emprunte une et une seule fois chacun tous les arcs du graphe.

<u>Remarque</u>: *Parcours Hamiltonien* $\Rightarrow$ *Parcours élémentaire*

Parcours Eulerien $\Rightarrow$ *Parcours simple*

Reprendre l'exemple 1 et déterminer une chaîne, un cycle, un chemin et un circuit.

-Un graphe est dit connexe s'il existe une chaîne reliant chaque couple de sommets du Graphe. Si le graphe n'est pas connexe alors il possède des ***composantes connexes*** qui sont les classes d'équivalence modulo la relation d'équivalence R suivante:

$$\forall x_i, x_j \in X, x_i \; R \; x_j \Leftrightarrow \begin{cases} x_i = x_j \\ Il \text{ existe une chaîne reliant } x_i \text{ à } x_j \end{cases}$$

Connexité dans un graphe (3/3)

Algorithme de recherche de composantes connexes dans un graphe

Principe: Marquer un sommet et marquer de proche en proche ses voisins successifs

(0) X={x1, x2, …, xn} poser i=1

(1) Soit s un sommet quelconque de X, le marquer d'un +

(2) Appliquer la procédure de marquage jusqu'à sa fin. Soit Ci l'ensemble des sommets marqués. Poser X= X-Ci

(3) Tester si X=∅

Si oui, Terminer.

Si non; poser i=i+1 aller en 1

Exemple 2: Soit le graphe suivant et déterminer les composantes connexes

Forte connexité dans un graphe

- Un graphe est dit fortement connexe s'il existe un chemin entre chaque couple de sommets et un chemin inverse. Autrement dit, il existe un circuit qui passe entre chaque couple de sommets de G.
- Si le graphe n'est pas fortement connexe, il possède des composantes fortement connexes qui sont les classes d'équivalence modulo la relation d'équivalence R suivante:

$$\forall x_i, x_j \in X, x_i \, R \, x_j \Leftrightarrow \begin{cases} x_i = x_j \\ Il\ existe\ un\ che\min\ reliant\ x_i\ à\ x_j\ et\ un\ che\min\ inverse \end{cases}$$

Les composantes f. connexes s'obtiennent en utilisant l'algorithme de marquage suivant:

Si un sommet y n'est pas marqué et il est successeur d'un sommet marqué d'un + alors on le marque d'un +

Si un sommet y n'est pas marqué et il est prédécesseur d'un sommet déjà marqué d'un – alors on marque y d'un -

Forte connexité dans un graphe

Algorithme de recherche de composantes fortement connexes dans un graphe

Principe: Marquer un sommet d'un + et d'un -et marquer de proche en proche ses prédécesseurs et successeurs

(0) X={x1, x2, …, xn} poser i=1

(1) Soit s un sommet quelconque de X, le marquer d'un + et d'un -

(2) Appliquer la procédure de marquage jusqu'à sa fin. Soit Ci l'ensemble des sommets marqués d'un + et d'un – la ième c.f.c.. Poser X= X-Ci

(3) Tester si X=$\emptyset$

Si oui, Terminer.

Si non; poser i=i+1 aller en 1

Exemple 3: Déterminer les composantes fortement connexes du graphe suivant:

Opérations sur les graphes (1/3)

- Réduction d'un graphe
  - Contraction des composantes fortement connexes d'un graphe. Les sommets sont les composantes fortement connexes et garder les arcs de G reliant une composante fortement connexe à une autre composantes fortement connexes

– Donnez le graphe réduit du graphe précédent

Opérations sur les graphes (2/3)

Mise en ordre pour un graphe sans circuit

(0) Déterminer la matrice d'adjacence M du graphe. Poser M*=M

(1) Tester s'il existe une ligne ou plusieurs lignes nulles.

Si oui, aller en 2)

Si non, Terminer le graphe possède au moins un circuit.

2)Supprimer dans M* la ou les lignes nulles ainsi que la ou les colonnes respectives. Soit M** la matrice obtenue. On pose M**=M* et aller en 3)

3) Tester si M*= O (matrice nulle)

Si oui, terminer

Si non aller en 1)

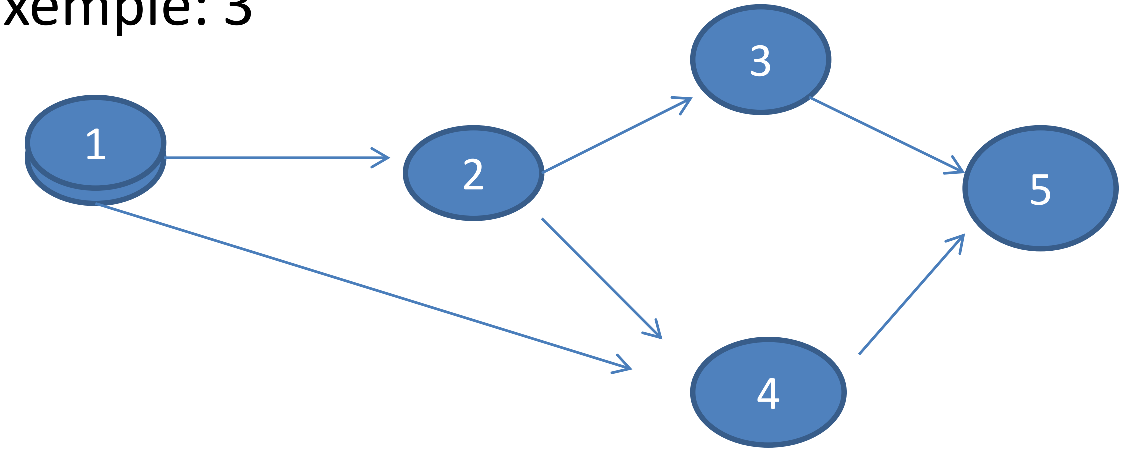
Opérations sur les graphes (3/3)

- Cet algorithme est polynomiale et retourne à chaque itération les niveaux du graphe
  - $X(0)=\{x \in X / \Gamma+(x)= \varnothing\}$
  - $X(1)=\{x \in X-X(0) / \Gamma+(x) \subset X(0)\}$

.

  - $X(n)=\{x \in X-[X(0) \cup X(1) \ldots \cup X(n-1)] / \Gamma+(x) \subset [X(0) \cup X(1) \ldots \cup X(n-1)]$

Exemple: 3



Propriétés d’un Graphe (1/3)

Soit G=(X, U) un graphe orienté et fini et M sa matrice d’adjacence

P1) Un graphe est dit réflexif s’il possède une boucle en chacun de ses sommets. Autrement dit: $\forall\ x \in X\ (x, x) \in U$

La matrice M possède des 1s dans sa diagonale.

P2) Un graphe est dit symétrique si M est symétrique. Autrement dit: $\forall\ x, y\ (x \neq y) \in X$ si $(x, y) \in U$ alors $(y, x) \in U$

P3) Un graphe est dit antisymétrique si $\forall\ x, y \in X\ (x \neq y)$ si $(x, y) \in U$ alors $(y, x) \notin U$. M est tel que: Mij * Mji=0

P4) Un graphe est transitif si

$\forall\ x, y, z\ (x \neq y \neq z) \in X$ si $(x, y) \in U$ et $(y, z) \in U$ alors $(x, z) \in U$

P5) Un graphe est dit complet si $\forall\ x, y\ (x \neq y) \in X\ (x,y) \notin U$ alors $(y, x) \in U$

Propriétés d'un Graphe (2/3)

Un graphe vérifiant P1 et P4 est dit de préordre. S'il est sans circuit, il est d'ordre et s'il vérifie P3 il est d'ordre total.

Dans le cas où le graphe n'est pas transitif, on lui associe sa fermeture transitif G' dont la matrice d'adjacence N est obtenue: N= M $\oplus$ M2.$\oplus$....$\oplus$Mp où Mi= M$\otimes$M$\otimes$...$\otimes$M (i fois)

Algorithme pour le calcul de N

(0) Déterminer M

(1) Poser N=M, k=2

(2) Calculer Mk (puissance boolène)

(3) Tester si N= N$\oplus$ Mk

Si oui, terniner

Si non, poser N= N$\oplus$ Mk, k=k+1 aller en 2)

Exemple

Soit la matrice d'adjacence suivante

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Etudier les propriétés de ce graphe et déterminer sa fermeture transitif

Quelques nombres importants (1/5)

- Un stable interne d'un graphe G est un sous-ensemble de sommets S tel que le sous graphe associé est vide $G_S = (S, \phi)$
- Le nombre de stabilité interne d'un graphe

$$\alpha(G) = \text{Max } (|S|, \text{S stable intérieure})$$

- <u>Applications</u>:
  - Nombre maximum de reine à placer sur un échiquier de sorte qu'aucune d'elle ne puisse prendre une autre?
  - Organisation d'une conférence en un minimum de temps possible

Quelques nombres importants (2/5)

- Un sous ensemble de sommets S est dit extérieurement stable si

  $\forall x \in \neg S \;\; \exists y \in S$ tel que $y \in \Gamma^{+}(x)$

  $\Gamma^{+}(x)$: ensemble des successeurs de x

- Le nombre de stabilité externe est:

  $\beta(G) = \mathrm{Min}\ \{|S|, S \text{ stable externe}\}$

Applications:

- Quel est le nombre minimal de reines nécessaire pour surveiller toutes les cases?
- Problème de surveillance

Quelques nombres importants (3/5)

- Un sous ensemble de sommets N est appelé noyau d'un graphe si
  - N est intérieurement stable
  - N est extérieurement stable
- Un graphe peut ne pas avoir de noyau
- Un graphe peut avoir plusieurs noyaux
- Un graphe simple et sans circuit possède un noyau

Noyau d’un graphe simple et sans circuit (3bis/6)

0) Déterminer la matrice d’adjacence du graphe
1) Choisir une ligne nulle
2) Marquer cette ligne d’une croix et entourer sa colonne respective. Barrer les lignes ayant des 1s sur la colonne encadrée puis leurs colonnes respectives
3) Tester s’il existe une ligne non marquée et non barée ayant des 1s barrées ou des zéros.

   si oui, aller en 4

   Si non Terminer l’ensemble des lignes marquées est le noyau
4) Choisir une ligne non marquée et non barrée ne contenant que des 1 barrés ou des zéros et aller en 2)

Reprendre l’exemple 3 et déterminer son noyau

Quelques nombres importants (4/5)

- Soit G=(X, U) un graphe d'ordre n ayant m arcs et p composantes connexes
- Nombre cyclomatique $\upsilon(G)$: La dimension de la base fondamentale de cycles élémentaires

$$\upsilon(G)= n-m+p$$

Nombre cocyclomatique: La dimension de la base fondamentale de cocycles élémentaires

$$\lambda(G)= n-p$$

Quelques nombres importants (5/5)

- Le nombre chromatique: Nombre minimale de couleur à utiliser pour colorier les sommets (arcs) d’un graphe de telle sorte que deux sommets (arcs) adjacents n’aient pas la même couleur
- Le nombre chromatique d’un graphe est inférieur ou égal à $\Delta+1$, Δ étant le plus haut degré des sommets.
- Heuristique de Welch et Powel

Heuristique de Welch..

- Ordonner les sommets dans l'ordre décroissant de leurs degrés.
- Tant qu'il reste des sommets à colorer, procéder ainsi :
  - choisir une nouvelle couleur appelée couleur d'usage
  - chercher dans la liste des sommets le premier sommet non coloré et le colorer avec la couleur d'usage ;
  - examiner tour à tour, dans l'ordre de la liste, tous les sommets non colorés et, pour chacun d'entre eux, le colorer lorsqu'il n'est adjacent à aucun sommet déjà coloré.

- Cet algorithme fournit une coloration, mais le nombre de couleurs utilisées peut être supérieur au nombre chromatique (heuristique) d'où la nécessité d'avoir un minorant du nombre chromatique

Exercice récapitulatif