Chapitre 2

Cycle, Cocycle, Arbre et Arborescence

Les cycles et cocycles

Béjaia, 2014

Généralités sur les cycles

Soient G=(X, U) un graphe avec |U|=m et $\mu=\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ un cycle de G. On choisit un sens de parcours du cycle μ.

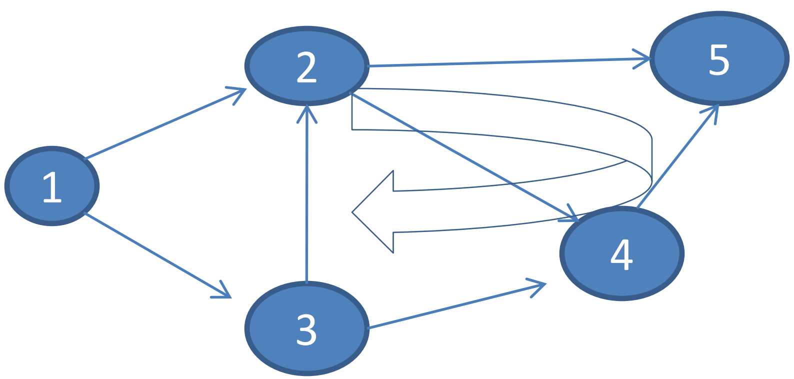
Le vecteur représentatif du cycle μ est défini comme suit:

$\mu=(\mu_1, \dots, \mu_m)$ où:

$$\mu_i = \begin{cases} 1 \quad si \quad u_i \in \mu^+ \\ -1 \quad si\, u_i \in \mu^- \\ 0 \quad \sin on \end{cases}$$

μ+={ u$\in$ U/ u est orienté dans le même sens que μ}
μ-={ u$\in$ U/ u est orienté dans le sens contraire que μ}

Exemple: Soit le graphe, sachant que 1=(1,2), 2=(1,3), 3=(3,2), 4=(3,4), 5=(2,4), 6=(2,5) et 7=(4,5). Donner le vecteur représentatif de μ={3, 4, 7, 6)}



Généralités sur les cycles

Un cycle est une somme de cycles élémentaires sans arcs communs. Un cycle est dit élémentaire si lors de son parcours on ne rencontre pas deux fois le même sommet sauf le premier et le dernier sommet**.**

Un cycle est dit minimal si la suppression d'un de ses arcs lui fait perdre sa propriété.

Le cycle de l'exemple est il minimal?

On montre qu'un cycle est élémentaire si et seulement si il est minimal.

Une base fondamentale de cycles est un ensemble de cycles ($\mu 1$, …, μk) indépendants et forme une famille génératrice. Une base de cycle n'est pas unique. Par contre, la cardinalité est la même

Théorème: Nombre cyclomatique

Soit G=(X, U) un cycle d'ordre n et |U|=m et ayant p composantes connexes. La dimension de la base de cycle, appelée ***nombre cyclomatique*** est:

$$\nu(G)=m-n+p$$

Preuve: Considérer la séquence des graphes partiels G_0, …, Gn où:

- G_0 est constitué de n sommets isolés, $U=\varnothing$

- Le graphe partiel G_i est obtenu à partir de G_{i-1} par ajout d'un arc de G

- Gn=G

On désigne par $\nu(Gi)$ le nombre de cycles élémentaires indépendants de Gi.

On raisonnera par récurrence

Preuve du théorème

Nous avons bien $\nu(G_0)= 0$ car G_0 est sans cycle et on a: $\nu(G_0)= m_0\text{-}n+p_0=0\text{-}n+n$

Supposons que cette relation est vraie pour k<n on a:

$\nu(G_i)=m_i - n_i +p_i \quad \forall i \leq k$ et montrons que $\nu(G_{k+1})=m_{k+1} - n_{k+1} +p_{k+1}$

En ajoutant un arc $u_{(k+1)}$ à G_k on obtient G_{k+1} . Deux cas se présentent:

-L'ajout de arc $u_{(k+1)}$ crée un nouveau cycle on a alors

$\nu(G_{k+1})=\nu(G_k) + 1$

$m_{k+1} = m_k + 1 \quad \Rightarrow \nu(G_{k+1})= m_k - n_k +p_k + 1= m_{k+1} -1-n+ p_{k+1} + 1$

$p_{k+1} = p_k \quad\quad = m_{k+1} -n+ p_{k+1}$

-L'ajout de $u_{(k+1)}$ ne crée pas de cycle. Dans ce cas les extrémités de cet arc sont dans deux composantes connexes différentes et le nombre de composantes connexes de G diminue. On a:

$\nu(G_{k+1})=\nu(G_k)$

$m_{k+1} = m_k + 1 \quad \Rightarrow \nu(G_{k+1})= m_k - n+p_k = m_{k+1} -1-n+ p_{k+1} + 1$

$p_{k+1} = p_k - 1 \quad\quad = m_{k+1} -n+ p_{k+1}$

Remarque: La preuve de ce théorème offre un algorithme de recherche de la base de cycles d'un graphe

Algorithme de recherche d'une base de cycle

(0) On démarre avec le graphe partiel G_0 =(X, $\varnothing$) où: m_o=0, p_0= n et $\nu(G_0)$= 0

poser i=1

(1) On ajoute l'arc u de G, tester si on crée au moins un cycle

Si oui, on choisit un linéairement indépendant des autres et ν(Gi)= ν(Gi-1)+1

Si non, ν(Gi) reste inchangé

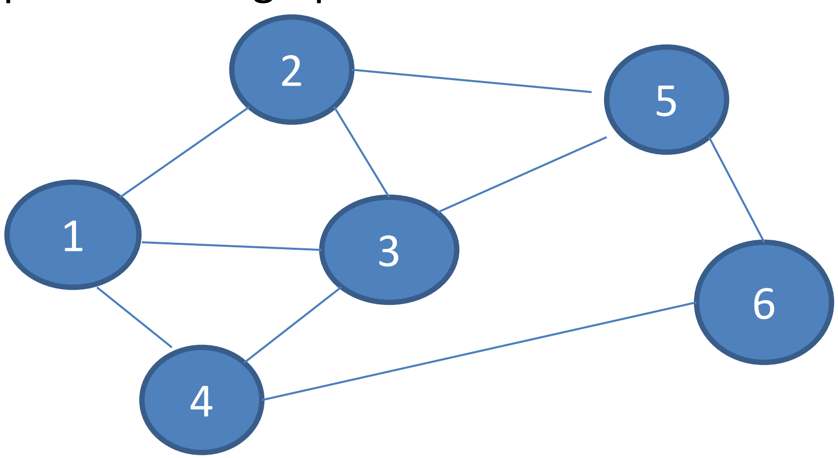
(2) Tester si i=m

Si oui, terminer

Si non poser i=i+1 et aller en 1)

Exemple 2: Soit le graphe non orienté suivant où 1=12 2=13 3=43 4=23 5=25 6=14 7=35 8=56 9=46

Déterminer la base de cycles de G



Généralités sur les cocycles

Soient G=(X, U) un graphe de G et $A \subset X$. Considérons les sous ensembles d'arc suivants:

$\omega^+(A)=\{u \in U/\ I(u) \in A \text{ et } T(u) \notin A\}$

$\omega^-(A)=\{u \in U/\ I(u) \notin A \text{ et } T(u) \in A\}$

L'ensemble $\omega(A)=\omega^+(A) \cup \omega^-(A)$ est appelé cocycle engendré par A.

Un cocycle est dit ***élémentaire*** s'il relie deux sous graphes connexes disjoints et dont l'union est une composante connexe de G, ie,

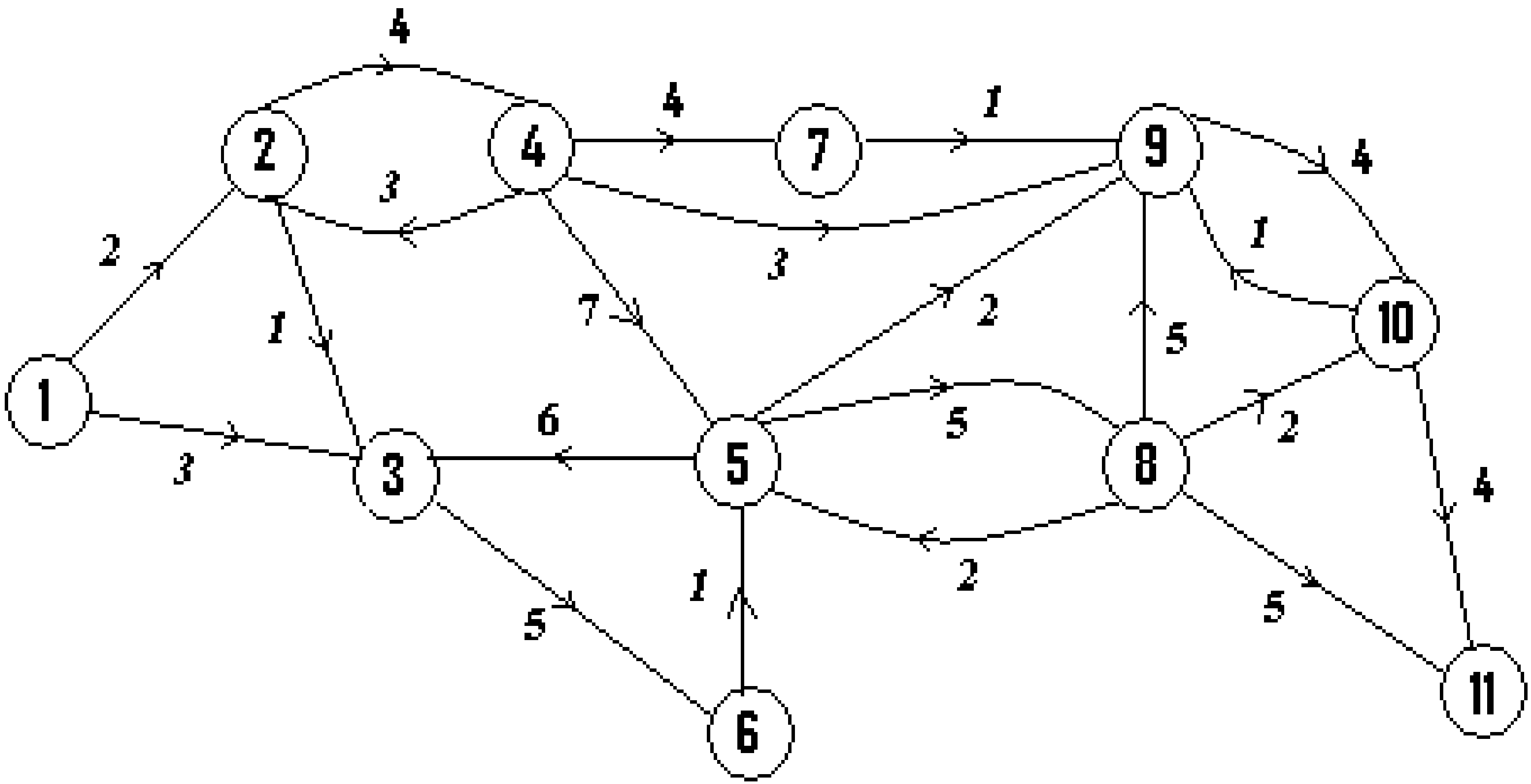
$\omega(A)$ est cocycle élémentaire $\Leftrightarrow$ ($A= A_1 \cup A_2$ $A_1 \cap A_2=\emptyset$ $A_1 \neq \emptyset$ $A_2 \neq \emptyset$

G_{A1} et G_{A2} connexes et $G_{A1 \cup A2}$ est une composante connexe de G).

Le vecteur représentatif de $\omega \in R^m$ de $\omega(A)$ est:

$$w_i = \begin{cases} 1 \quad si \quad u_i \in w^+(A) \\ -1 \quad si\ u_i \in w-(A) \\ 0 \quad \sin on \end{cases}$$

Exemple 3



Quelques résultats

Tout cocycle w de G est une somme de cocycles élémentaires sans arcs communs (exercice).

Lemme des arcs coloriés (Minty)

Soit G un graphe dont les arcs sont u_1, …, u_m sont coloriés en rouge, ou vert ou noir et supposons que l'arc u1 est en noir. L'une des deux propositions suivantes est vérifiée

> -Il passe par u1 un cycle élémentaire rouge et noir avec tous les arcs noirs sont orientés dans le même sens
>
> -Il passe par u1 un cocycle élémentaire vert et noir avec tous les arcs noirs sont orientés dans le même sens.

Conséquence: Tout arc appartient soit à un circuit élémentaire ou à un cocircuit élémentaire (est un cocycle dont les arcs sont orientés dans le même sens)

Théorème: Soit G=(X, U) un graphe d'ordre n ayant m arcs et p composantes connexes. La dimension de la base de cocycles appelée ***nombre cocyclomatique*** est: λ***(G)=n-p***

Preuve et algorithme de construction d'une base de cocycles

Supposons que le graphe est connexe (p=1) et formons les n-1 cocycles élémentaires indépendants de proche en proche

- On prend un sommet quelconque a1 et posons $A_1=\{a_1\}$. Le cocycle $w(A_1)$ contient un cocycle élémentaire et soit (a_1, a_2) une arête de ce cocycle avec $a_1 \in A_1$ et $a_2 \notin A_1$

-On pose $A_2=A_1 \cup\{a_2\}$, le cocycle $w(A_2)$ contient un cocycle élémentaire et soit (x, a_3) une arête de ce cocycle avec $x \in A_2$ et $a_3 \notin A_2$

-- On pose $A_3=A_2 \cup\{a_3\}$, et on recommence.

-A la fin du processus on aurait construit (n-1) cocycles élémentaires, linéairement indépendants.

-Si le graphe n'est pas connexe, soient C1, …, Cp ses composantes connexes. Il existerait ((|C1| -1)+…+(|Cp|-1))=n-p cocycles élémentaires indépendants

-***Résultat:*** L'espace M des cycles et l'espace Ω des cocycles sont orthogonaux

dim M + dim Ω =m

Déterminer la base de cocycle du graphe de l'exemple 3