على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

تمرين 1: (4 نقاط)

x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي.

A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل $A=\overline{5566}$

1) أ- أنشر العبارة $(x+1)(5x^2+6)$ ثمّ أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أنّ $A=(5x^2+6)(2+2y)$.

ب- احسب x و y إذا علمت أنّ x عدد أوّلي أصغر من 12 ، ثمّ اكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري.

2) أ- عيّن الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

ب- عيّن الأعداد الطبيعية a و b حيث $a>b$ التي تحقق:

$$\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$$

تمرين 2: (5 نقاط)

كيس به 10 كريات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء.

1) نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في آن واحد.

أ- احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء.

ب- احسب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

3) نسحب من الكيس في آن واحد 3 كريات خمس مرات على التوالي مع الإعادة (الإرجاع).

احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط.

تمرين 3: (5 نقاط)

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقطتين $A(2,1,2)$ و $B(0,2,-1)$ والمستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases} \quad \text{حيث } t\in\mathbb{R}$$

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

أثبت أنّ (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

2) نعتبر المستوي (P) الذي يشمل المستقيم (AB) ويوازي المستقيم (D) .

أ - بيّن أنّ الشّعاع $\vec{n}(1,5,1)$ عمودي على المستوي (P).

ب - اكتب معادلة للمستوي (P).

ج - بيّن أنّ المسافة بين نقطة M من (D) والمستوي (P) مستقلة عن موضع M .

د - عيّن تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستوي (P) مع المستوي (yoz) .

تمرين 4: (6 نقاط)

1) نعرّف الدّالة العددية f على المجال $[1,5]$ بالعبارة: $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)$.

ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

الوحدة على المحورين $3cm$.

أ- ادرس تغيرات الدّالة f

ب- أنشئ المنحنى البياني (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ في نفس المعلم.

2) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأوّل $U_0=5$ و بالعبارة:

$$U_{n+1}=\frac{1}{2}\left(U_n+\frac{5}{U_n}\right)$$

أ - أحسب U_1 ، U_2

ب- استعمل المنحني (C) والمستقيم (Δ) لتمثيل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 على محور الفواصل.

3) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n\geqslant\sqrt{5}$.

ب- بيّن أنّ المتتالية (U_n) متناقصة تماما. ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (U_n)؟

4) أ- برهن أنّه مهما يكن العدد الطبيعي n فإنّ: $\left(U_{n+1}-\sqrt{5}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(U_n-\sqrt{5}\right)$

ب- استنتج أنّ $\left(U_n-\sqrt{5}\right)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(U_0-\sqrt{5}\right)$. ما هي $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ ؟

الموضوع الثاني

تمرين 1: (4 نقاط)

نرفق بكل عدد مركّب z يختلف عن 1 العدد المركّب $f(z)$ حيث: $f(z)=\dfrac{z-i}{z-1}$

1) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(45+45i)f(z)=23+45i-2z$

2) لتكن M صورة العدد المركّب z في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

أ- عين مجموعة النّقط M بحيث يكون $f(z)$ عدداً حقيقيا سالباً تماما.

ب- احسب العدد المركّب z_0 بحيث: $|f(z_0)|=1$ و $arg(f(z_0))=\dfrac{3\pi}{2}$.

3) في المستوي المركّب نعتبر النّقط A، B و C صور الأعداد المركّبة 1 ، i و z_0 على الترتيب.

أ- ما نوع المثلّث ABC ؟

ب- عين النّقطة D نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) و استنتج طبيعة الرّباعي $ACBD$.

تمرين 2: (5 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرّفة بحدّها الأوّل $U_0=0$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1}=3U_n+2n+1$.

(V_n) المتتالية المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n كما يلي : $V_n=U_n+\alpha n+\beta$ حيث α و β عددان حقيقيا

1) عيّن α و β بحيث تكون المتتالية (V_n) متتالية هندسية، يطلب حساب أساسها وحدّها الأوّل .

2) احسب كلاّ من V_n و U_n بدلالة n.

3) احسب المجموعين S و S' حيث: $S=V_0+V_1+V_2+...+V_n$ و $S'=U_0+U_1+U_2+...+U_n$.

4) أ- عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها U_n مضاعفا للعدد 5 .

تمرين 3: (4 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، المستويين (P_1) و (P_2) حيث

$x+2y-z-2=0$ معادلة للمستوي (P_1)

و $\begin{cases} x=1+2\alpha+\beta \\ y=1+\alpha \\ z=5+\alpha+\beta \end{cases}$; $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ تمثيل وسيطي للمستوي (P_2).

1) اكتب معادلة للمستوي (P_2).

2) عيّن شعاعاً ناظميا $\vec{n}_1$ للمستوي (P_1) وشعاعاً ناظميا $\vec{n}_2$ للمستوي (P_2).

3) بيّن أنّ المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان.

4) أ- $A(3,1,1)$ نقطة من الفضاء، عين المسافة d_1 بين النّقطة A والمستوي (P_1) ثمّ المسافة d_2 بين A و (P_2).

ب- استنتج المسافة d_3 بين النّقطة A والمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2).

5) أ- عيّن تمثيلا وسيطيا بدلالة λ للمستقيم (Δ) حيث λ عدد حقيقي.

ب- M نقطة كيفية من (Δ) ، احسب MA^2 بدلالة λ مستنتجاً ثانية المسافة بين A و (Δ) .

تمرين 4: (7 نقاط)

f الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ كما يأتي : $f(x)=x-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$.

(C_f) منحنى الدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدّالة f .

2) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته: $y=x$.

ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (D).

3) أ- بيّن أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1{,}3<x_0<1{,}4$.

ب- عين معادلة (Δ) مماسا للمنحني (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور التّراتيب.

جـ- ارسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم.

4) أوجد الدّالة الأصلية للدّالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغير x .

5) g الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=|f(x)|$.

(C_g) منحنى الدّالة g في المعلم السابق.

- بيّن كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ، ثمّ ارسمه في نفس المعلم السّابق.

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $g(x)=m^2$.

الموضوع الأول

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
	تمرين 1: (4 نقاط)		
التعداد	1. أ- نشر العبارة $(5x^2+6)(x+1)$	**0.25**	**4**
	العلاقة بين x و y هي: $x=2y+1$	**0.5+0.25**	
القواسم والمضاعفات	ب- $(x,y)=(7,3)$ أو $(x,y)=(11,5)$	**0.25×2**	
	من أجل $(x,y)=(7,3)$ لدينا $A=2008$	**0.25**	
	من أجل $(x,y)=(11,5)$ لدينا $A=7332$	**0.25**	
	2. أ- القواسم المطلوبة هي 1 و 2	**0.5×2**	
	ب- تعيين الأعداد الطبيعية a و b : $(a,b)=(11,5)$	**0.5×2**	
	تمرين 2: (5 نقاط)		
حساب الاحتمال، المتغير العشوائي، الأمل الرياضي	1-أ) $P=\frac{1}{30}$	01	**5**
	ب) $P'=1-P=\frac{29}{30}$	01	
	2) $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline P_i & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{30} \end{array}$	0.25×5	
	$E(X)=\frac{6}{5}$	0.75	
	3) $P(Y=2)=C_5^2\left(\frac{1}{30}\right)^2\left(\frac{29}{30}\right)^3\simeq 0.01$	1	

140

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
	تمرين 3: (5 نقاط)		
	1) التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)	0.75	
	$\begin{cases} x=2-2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2-3\lambda \end{cases}$		
هندسة فضائية	* إثبات أن (D) والمستقيم (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي		
	لدينا $\overrightarrow{AB}$ لا يوازي $\overrightarrow{V_D}$ $(3,-1,2)$ والمستقيمان غير متقاطعين	0.5 + 0.25	
	2) أ- لإثبات أنّ الشعاع $\vec{n}$ عمودي على المستوي (P) يكفي إثبات أنه عمودي		
	على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{V_D}$ باعتبارهما شعاعي توجيه للمستوي (P)	0.5 + 0.5	05
	ب- المستوي (P) يشمل النقطة A وعمودي على $\vec{n}$	0.5	
	منه معادلته هي $(P): x+5y+z-9=0$		
	ج - المسافة بين M و (P) هي $d(M,(p))=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ - هي مستقلة عن موضع M	0.25 + 0.75	
	د - معادلة (yoz) - التمثيل وسيطي لمستقيم تقاطع (P) مع (yoz)	0.75 + 0.25	
	$\begin{cases} x=0 \\ y=\alpha \\ z=9-5\alpha \end{cases}$		
	تمرين 4: (6 نقاط)		
دوال عددية	1) أ - دراسة التغيرات		
	$f'(x)=\frac{x^2-5}{2x^2}$ - إشارة $f'(x)$ واتجاه التغيّر -	0.25+ 0.5	
	جدول التغيرات .... $\begin{array}{c\|ccccc} x & 1 & & \sqrt{5} & & 5 \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & 3 & \searrow & \sqrt{5} & \nearrow & 3 \end{array}$	0.25	
	ب - إنشاء المنحني (C) و المستقيم (Δ)	0.25+ 0.5	06
	2) أ - حساب U_1 و U_2	0.25	
	ب - تمثيل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2	0.75	
	3) أ - إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n \geqslant \sqrt{5}$	0.75	
	ب - إثبات أنّ المتتالية متناقصة تماما و استنتاج أنّها متقاربة	0.25+ 0.75	
	4) أ - إثبات صحّة $\left(U_{n+1}-\sqrt{5}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(U_n-\sqrt{5}\right)$	0.5	
	ب - استنتاج أنّ : $\left(U_n-\sqrt{5}\right)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(U_0-\sqrt{5}\right)$	0.75	
	$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\sqrt{5}$	0.25	

141

<table>
<tr><th rowspan="2">محاور الموضوع</th><th rowspan="2">عناصر الإجابة</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>المجموع</th></tr>
<tr><td></td><td>الموضوع الثاني</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>الأعداد المركبة و الهندسة</td><td><u>التمرين الأول :04 ن</u>
1) المعادلة تكافئ: $z^2+10z+34=0$ ....
$\Delta'=-9=(3i)^2$; $z_1=-5-3i$; $z_2=-5+3i$ ....
2) أ - مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عدداً حقيقيا سالباً تماما هي القطعة المستقيمة المفتوحة $]AB[$ حيث $A(0,1)$; $B(1,0)$ ....
ب- من المعطيات ينتج $f(z_0)=-i$ ومنه نجد $z_0=1+i$ ....
3) أ- المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين ....
ب- $D(0,0)$ والرباعي $ACBD$ مربع ....</td><td>0.5
0.25×4

1
0.25×2
0.5
0.25×2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>المتتاليات و الموافقات</td><td><u>التمرين الثاني 05 ن</u>
1- $\alpha=\beta=1$ ، الأساس: $q=3$، الحد الأول : $V_0=1$.................
2- $U_n=3^n-n-1$; $V_n=3^n$ ....
3- $S=\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$; $S'=\frac{1}{2}\left[3^{n+1}-(n+1)(n+2)-1\right]$ ....
4-أ بواقي القسمة الإقليدية متتالية دورية دورها 4 والبواقي هي : 1، 3، 4، 2 ..
ب - $n=20k$; $n=20k+17$; $n=20k+18$; $n=20k+11$ / $k\in\mathbb{N}$ ....</td><td>0.25×2+0.75
0.25×2
0.75+0.5
1
1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>هندسة فضائية</td><td><u>التمرين الثالث : 04 ن</u>
1) معادلة (P_2) ; $x-y-z+5=0$ ....
2) $\overrightarrow{n_1}(1,2,-1)$; $\overrightarrow{n_2}(1,-1,-1)$ ....
3) $(P_2)\perp(P_1)$ ....
4) أ- $d_1=\frac{\sqrt{6}}{3}$; $d_2=2\sqrt{3}$ ....
ب- $d_3=\sqrt{d_1^2+d_2^2}=\frac{\sqrt{114}}{3}$
5) أ- $\lambda\in\mathbb{R}$; $\begin{cases} x=\lambda-\frac{8}{3} \\ y=\frac{7}{3} \\ z=\lambda \end{cases}$ ....
ب- $MA^2=2(\lambda-\frac{10}{3})^2+\frac{114}{9}$ ....
$d(A,\Delta)=\frac{\sqrt{114}}{3}=d_3$ ....</td><td>0.5
0.25×2
0.25
0.5×2
0.5
0.5
0.5
0.25</td><td>4</td></tr>
</table>

142

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
الدوال العددية	**التمرين الرابع : 07 ن**		
	1)-		
	$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	0.25×2	
	- المشتق و إشارته	0.25+0.5	
	- جدول التغيرات	0.5	
	2) أ- $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب	0.25	
	$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$ ومنه (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) معادلته $y = x$	0.5	
	ب- الوضعية النسبية لـ (C_f) و (D)	0.25	
	3)- أ- (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 (التبرير).............	0.5	
	- حصر x_0	0.75	
	ب- نقطة التقاطع : $A(0,-2)$ ، معادلة المماس $y = 2x - 2$	0.5+0.25	
	جـ- رسم (C_f)	0.5	7
	4) - الدالة الأصلية هي $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\sqrt{x+1} + 4$	0.5	
	5)- تبرير كيفية رسم (C_g) و انطلاقا من (C_f)	0.25×2	
	6)- المناقشة : $m = 0$ للمعادلة حل وحيد موجب $(x = x_0)$ .... $0 < \|m\| < \sqrt{2}$ للمعادلة حلين موجبين تماما .... $\|m\| = \sqrt{2}$ للمعادلة حلان أحدهما موجبا والآخر معدوما .... $\|m\| > \sqrt{2}$ للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة	0.75	

143