

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1. نعتبر المعادلة: (1) $7x + 65y = 2009$ ، حيث: x و y عددان صحيحان.
(أ) بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7.
(ب) حل المعادلة (1).
2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9.
3. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9.
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{6n} - 1$.
(أ) تحقق أن u_n يقبل القسمة على 9 .
(ب) حل المعادلة: (2) $(7u_1)x + (u_1)y = 126567$ ذات المجهول (x, y) ، حيث: x و y عددان صحيحان.
- (ج) عيّن الثنائية (x_0, y_0) حل (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيين مع $y_0 \geq 25$.

التمرين الثاني: (04,5 نقطة)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط $A(2,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,2)$.
- (1) بين أن النقط A و B و C ليست في استقامة.
 - (2) جد معادلة للمستوي (ABC) .
 - (3) جد تمثيلا ومبسطا للمستقيم (BC) .
 - (4) (P) المستوي الذي معادلته: $2x + 2y + z - 2 = 0$.
(أ) بين أن: (P) و (ABC) متقاطعان.
(ب) بين أن: (P) يشمل B و C ، ماذا تستنتج ؟
 - (5) عيّن (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|$.

التمرين الثالث: (04,5 نقطة)

- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $(E) \dots Z^3 - 3Z^2 + 3Z - 9 = 0$
- (1) أ) تحقق أن 3 حل للمعادلة (E) ، ثم عين الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث، من أجل كل عدد مركب Z فإن: $Z^3 - 3Z^2 + 3Z - 9 = (Z - 3)(aZ^2 + bZ + c)$.
- ب) حل في \mathbb{C} المعادلة (E) .
- (2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- النقط A و B و C صور الأعداد المركبة $Z_A = 3$ و $Z_B = i\sqrt{3}$ و $Z_C = -i\sqrt{3}$.
- بيّن أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.
- (3) D النقطة التي لاحقتها $Z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و E صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.
- عين Z_E لاحقة النقطة E .
- (4) F النقطة التي لاحقتها $Z_F = 1 - i\sqrt{3}$.
- أ) احسب $\frac{Z_F}{Z_E}$ واستنتج أن المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان.
- ب) عين Z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعاً.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- I g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = (3 - x)e^x - 3$
- (1) ادرس تغيرات الدالة g .
- (2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في \mathbb{R} حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $2,82 < \alpha < 2,83$.
- (3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .
- II f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ ، اكتب معادلة (T) مماس (C_f) عند المبدأ O .
- (2) أ) بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ب) بيّن أنه من أجل $x \neq 0$ فإن: $f'(x) = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x)$.
- ج) تحقق أن $f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha)$ ثم عين حصره.
- د) أنشئ جدول تغيرات الدالة f .
- (3) احسب $f(x) + x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $x \mapsto -x^3$.
- بيّن أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^3] = 0$ وفسر النتيجة هندسياً.
- (4) أنشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين (C) و (C_f) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- 1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 13.
- 2- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل كل من العددين $3^{3n+1} - 3$ و $3^{3n+2} - 9$ القسمة على 13.
- 3- عيّن، حسب قيم n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13، واستنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13.
- 4- نضع من أجل كل عدد طبيعي p : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$.
 - أ- من أجل $p = 3n$ ، عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13.
 - ب- برهن أنه إذا كان $p = 3n + 1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13.
 - ج- عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p = 3n + 2$.
- 5- يكتب العددين الطبيعيين a و b في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي:

$$a = \overline{1001001000} \quad \text{و} \quad b = \overline{1000100010000}$$
 - أ- تحقق أن العددين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري.
 - ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13.

التمرين الثاني: (05 نقط)

- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
1. نسمي A ، B و I النقط التي لاحتقاتها على الترتيب: $Z_A = 1 - 4i$ ، $Z_B = -1 - 2i$ و $Z_I = 1 - 2i$.
 - أ- عيّن النقط A ، B و I .
 - ب- اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $Z = \frac{Z_I - Z_A}{Z_I - Z_B}$.
 - ج- ما هو نوع المثلث IAB ؟
 - د- صورة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2. احسب اللاحقة Z_C للنقطة C .
 - هـ- D مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$. احسب اللاحقة Z_D للنقطة D .
 - و- بيّن أن $ABCD$ مربع.
 2. عيّن وأنشئ (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{MA} + \vec{MC}\|$.
 3. عيّن وأنشئ (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 1$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط $B(2;1;3)$ ، $A(-1;2;1)$ ، ولتكن (P) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $AM=BM$.
- 1- بين أن (P) هو المستوي الذي معادلته: $3x-y+2z-4=0$.
 - 2- عيّن معادلة للمستوي (Q) الذي يشمل A ويوازي (P) .
 - 3- أ - اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (D) الذي يشمل C ويعامد (P) .
ب - عيّن إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D) .
ج - احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) .
 - 4- عين تمثيلاً وسيطياً للمستوي (Π) الذي يحوي المستقيم (AC) ويعامد المستوي (P) ، ثم استنتج معادلة له.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x - 1 - 2\ln x$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول هي $4cm$.
- 1- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسياً .
 - 2- أ - بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
ب - ادرس تغيرات الدالة g .
ج - احسب $g(1)$.
د - برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما α حيث: $3,5 < \alpha < 3,6$.
هـ - استنتج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$.
 - 3 f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:
$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + x^2 \ln x & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
 - أ - احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة هندسياً .
 - ب - احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.
 - ج - بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن: $f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$ ، واستنتج اتجاه تغير الدالة f .
 - د - شكل جدول تغيرات الدالة f ، بين أن: $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$ و استنتج حصراً للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.
 - 4- ارسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f على المجال $[0;3]$.

الإجابة النموذجية و سلم التنقيط

امتحان شهادة البكالوريا دورة : 2010
اختبار مادة : الرياضيات الشعب (ة): رياضيات

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع
مجموع	مجزأة	الموضوع الأول	
04	2×0.25 2×0.25	<p>التمرين الأول: (04 نقط)</p> <p>1. أ- إثبات أن y مضاعف للعدد 7</p> <p>ب- حل المعادلة (1) هي (x, y) حيث $(x, y) = (287 - 65k, 7k)$ مع $k \in \mathbb{Z}$</p> <p>2. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9 :</p> <p>لدينا $[9] 2^{6p+w} \equiv 2^w$ حيث $0 \leq w \leq 5$</p> <p>ومنه البواقي على الترتيب هي: 1, 2, 4, 8, 5, 7</p> <p>3. قيم n المطلوبة هي $n = 2 + 3k$ مع $k \in \mathbb{Z}$</p> <p>4.</p> <p>أ- التحقق أن u_n يقبل القسمة على 9</p> <p>ب- حلول المعادلة (2) هي حلول المعادلة (1)</p> <p>ج- $7k \geq 25$ و $287 - 65k \geq 0$ منه $3,57 \leq k \leq 4,41$ إذن $k = 4$</p> <p>$(x_0, y_0) = (27, 28)$</p>	الحساب
	1 0.5		
	0.25 0.5 2×0.25 0.25		
04.5	0.5	<p>التمرين الثاني: (04,5 نقط)</p> <p>1. A و B و C ليست في استقامة $(\overline{AC}$ لا يوازي \overline{AB})</p> <p>2. تعيين شعاع عمودي على كل من \overline{AB} و \overline{AC} : $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$</p> <p>ومنه $x + 2y + z - 2 = 0$</p> <p>3. تمثيل وسيطي للمستقيم (BC)</p> $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - k \\ z = 2k \end{cases} ; k \in \mathbb{R}$ <p>4. أ) (P) و (ABC) متقاطعان لأن شعاعيهما الناطمين غير متوازيين.</p> <p>ب- B و C تنتميان إلى (P) (بتعويض الإحداثيات)</p> <p>نستنتج أن $(ABC) \cap (P) = (BC)$</p> <p>5. تحليليا (E) $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{21}{9}$</p> <p>هندسيا : (E) : $MG = AG$ حيث G مركز نقل المثلث ABC</p> <p>(E) سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $AG = \frac{\sqrt{21}}{3}$</p>	الهندسة الفضائية مستقيمات المستويات سطح كرة
	0.75		
	0.5		
	0.5		
	0.5		
	0.5		
	0.5		
	0.25		

العلامة		عناصر الإجابة	محااور الموضوع
مجموع	مجزأة		
4.5		التمرين الثالث: (4.5 نقطة)	الأعداد المركبة - تحويلات نقطية
	4×0.25	(1) أ) 3 حل للمعادلة ، $a=1$ ، $b=0$ ، $C=3$	
	3×0.25	ب) الحلول $-i\sqrt{3}$ ، $i\sqrt{3}$ ، 3	
	0.75	(2) ABC متقايس الأضلاع	
	0.5	(3) $Z_E = -\sqrt{3} - i$	
07	2×0.5	(4) أ) $\frac{Z_F}{Z_E} = i$ ، (OE) و (OF) متعامدان	دراسة تغيرات دوال أسية وتمثيلها بيانيا معادلة المماس مبرهنة القيم المتوسطة الحصر التزايد المقارن
	0.5	ب) $Z_G = 1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})$	
		التمرين الرابع: (07 نقط)	
07	2×0.25	(I) 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -3$	دراسة تغيرات دوال أسية وتمثيلها بيانيا معادلة المماس مبرهنة القيم المتوسطة الحصر التزايد المقارن
	2×0.25	$g'(x) = (2-x)e^x$ وإشارته	
	0.25	جدول التغيرات	
	2×0.25	(2) $g(0)=0$ تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على g في $[2,82 ; 2,83]$	
	0.25	(3) إشارة $g(x)$	
	0.25	(II) 1) f تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$	
	0.25	معادلة (T) هي $y=0$	
	2×0.25	2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = -27 \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{x}{3} e^{\frac{x}{3}})^3 = 0$	
	2×0.5	ب) $f'(x) = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x)$ ، $x \neq 0$ ، إشارته	
	2×0.25	ج) $1.35 \leq f(\alpha) \leq 1.45$ ، $f(\alpha) = \alpha^2(3-\alpha)$	
	0.25	د) جدول التغيرات	
	2×0.25	(3) من أجل $x \neq 0$ $f(x) + x^3 = \frac{x^3 e^x}{e^x - 1}$ وإشارته	
1	2×0.25	الوضعية (C_f) أعلى (فوق) (C) ويشتركان في المبدأ O .	4) رسم (f) ، (C) ، (T)
	1	$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^3] = 0$ ، C_f يقارب C في جوار $-\infty$	

تابع الإجابة النموذجية اختبار مادة : الرياضيات الشعب (ة): رياضيات

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع
مجموع	مجزأة		
04	0.25×3	<p>التمرين الأول: (04 نقاط)</p> <p>(1) برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 - 3^{3n}$ يقبل القسمة على 13 باستعمال الموافقة أو البرهان بالتراجع</p> <p>(2) الاستنتاج</p> <p>(3) من أجل $n = 3k; k \in \mathbb{N}$ فإن باقي قسمة 3^{3n} على 13 هو 1</p> <p>من أجل $n = 3k + 1; k \in \mathbb{N}$ فإن باقي قسمة 3^{3n} على 13 هو 3</p> <p>من أجل $n = 3k + 2; k \in \mathbb{N}$ فإن باقي قسمة 3^{3n} على 13 هو 9</p> <p>باقي قسمة 2005^{2010} على 13 هو 1</p> <p>(4) -أ- باقي قسمة A_p على 13 من أجل $p = 3n$ هو 3</p> <p>ب- برهان باقي قسمة A_p على 13 من أجل $p = 3n + 1$ هو 0</p> <p>ج- باقي قسمة A_p على 13 من أجل $p = 3n + 2$ هو 0</p> <p>(5) -أ- $a = A_3; b = A_4$</p> <p>ب- باقي قسمة a على 13 هو 3</p> <p>باقي قسمة b على 13 هو 0</p>	الموافقات في \mathbb{Z}
	2×0.25		
	0.25		
	0.25		
	0.25		
	0.25		
	0.25		
	0.25		
	0.25		
	0.25		
05	0.25×3	<p>التمرين الثاني: (05 نقاط)</p> <p>(1) -أ- تعليم النقط</p> <p>ب- $Z = i$</p> <p>ج- IAB مثلث قائم في I ومتقايس الساقين</p> <p>د- $z_C = 1$</p> <p>هـ- $z_D = 3 - 2i$</p> <p>و- $ABCD$ مربع</p> <p>(2) (Γ_1) معرفة بـ $MD = MI$ أو $x = 0$ فهي محور القطعة $[DI]$.</p> <p>(3) (Γ_2) معرفة بـ $MD = 1$ أو $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$ هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها 1.</p>	أعداد مركبة وهندسة
	0.25		
	0.25×2		
	0.25×2		
	0.25×2		
	0.25×4		
	0.25×4		
	0.25×2		
04	01	<p>التمرين الثالث: (04 نقاط)</p> <p>(1) (P) معادلته : $3x - y + 2z - 4 = 0$</p> <p>(2) $3x - y + 2z + 3 = 0$ معادلة المستوى (Q)</p> <p>(3) -أ- $t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 3t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} (D)$</p> <p>ب- $E(-\frac{12}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{6}{7})$</p> <p>ج- المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي $AE = \frac{\sqrt{315}}{7}$.</p> <p>(4) $t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = -1 + t + 3\lambda \\ y = 2 - 3t - \lambda \\ z = 1 + t + 2\lambda \end{cases}$ عدنان طبيعيان</p> <p>(II) : $5x - y - 8z + 15 = 0$</p>	هندسة فضائية
	0.75		
	0.5		
	0.5		
	0.25		
	0.5		
	0.5		
	0.5		

العلامة		عناصر الإجابة	محاو الموضوع
مجموع	مجزأة		
07	0.25	التمرين الرابع: (07 نقاط) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ (1)	دوال لوغاريتمية
	0.25 $x=0$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_g)	
	0.5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ - (2)	
	0.5	ب- دراسة تغيرات الدالة g $g'(x) = \frac{x-2}{x}$ وإشارته	
	0.25 جدول التغيرات	
	0.25 ج- $g(1)=0$	
	0.75 د- $g(\alpha)=0$: $3.5 < \alpha < 3.6$	
	0.5 هـ- إشارة $g(x)$	
	0.5 إشارة $g(\frac{1}{x})$	
	0.5 (3) - (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ مع التفسير الهندسي	
	0.25 ب- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	
	0.5 ج- من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = xg(\frac{1}{x})$	
	0.25 اتجاه تغير f	
	0.25 د- جدول تغيرات الدالة f	
	0.5 تبين أن : $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$	
	0.5 $0.096 < f(\frac{1}{\alpha}) < 0.106$	
	0.5 4) رسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في المعلم السابق الرسم :	
			