

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: ( 03.5 نقطة)

( $u_n$ ) متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$  و  $u_1 = 2$  و  $u_0 = 1$

المتتالية ( $v_n$ ) معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $v_n = u_{n+1} - u_n$

(1) أحسب  $v_0$  و  $v_1$ .

(2) برهن أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

(3) أ) أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$ :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_n = \frac{3}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$

ج) بيّن أن ( $u_n$ ) متقاربة.

التمرين الثاني: ( 05 نقاط )

$P(Z)$  كثير حدود حيث:  $P(Z) = (Z - 1 - i)(Z^2 - 2Z + 4)$  و  $Z$  عدد مركب

(1) حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $P(Z) = 0$ .

(2) نضع:  $Z_1 = 1 + i$  ؛  $Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

أ) أكتب  $Z_1$  و  $Z_2$  على الشكل الأسّي.

ب) أكتب  $\frac{Z_1}{Z_2}$  على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي.

ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  و  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

(3) أ)  $n$  عدد طبيعي. عيّن قيم  $n$  بحيث يكون العدد  $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$  حقيقيا.

ب) احسب قيمة العدد  $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$ .

التمرين الثالث: ( 04 نقاط )

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

نعتبر النقط :  $C(2;1;3)$  ،  $B(0;2;1)$  ،  $A(1;0;2)$

(1)  $(P)$  مستو معادلة له من الشكل  $x - z + 1 = 0$  .

(أ) بيّن أن المستوي  $(P)$  هو المستوي  $(ABC)$  .

(ب) ما طبيعة المثلث  $ABC$  .

(2) (أ) تحقّق من أن النقطة  $D(2;3;4)$  لا تنتمي إلى  $(ABC)$  .

(ب) ما طبيعة  $ABCD$  .

(3) (أ) أحسب المسافة بين  $D$  و المستوي  $(ABC)$  .

(ب) أحسب حجم  $ABCD$  .

**التمرين الرابع: ( 07.5 نقطة )**

(I)  $f$  دالة معرفة على  $I = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0]$  بـ:  $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$

( $c_f$ ) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل.

(1) (أ) أحسب نهايات  $f$  عند الحدود المفتوحة لـ  $I$

(ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات  $f$  شكّل جدول تغيراتها.

(2)  $g$  دالة معرفة المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$

( $c_g$ ) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد وتجانس.

(أ) أحسب نهاية  $g$  عند  $+\infty$  .

(ب) تحقّق من أن ( $c_g$ ) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً  $(\Delta)$

عند  $+\infty$  يطلب تعيين معادلة له.

(ج) أدرس تغيرات  $g$  .

(II)  $k$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  كما يلي:  $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

(1) (أ) أحسب  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(h) - k(0)}{h}$  ،  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{k(h) - k(0)}{h}$  ماذا تستنتج ؟

(ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

(2) أكتب معادلتَي المماسين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  عند النقطة التي فاصلتها  $x_0 = 0$  .

(3) أرسم  $(\Delta_1)$  ،  $(\Delta_2)$  و  $(C_k)$  .

(4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_k)$  و المستقيمتان التي معادلاتها:

$$x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}, y = 0$$

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (04 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  نعتبر النقط:
- $A(2; 3; -1) ; B(1; -2; 4) ; C(3; 0; -2) ; D(1; -1; -2)$
- و ليكن  $(\pi)$  المستوي المعرف بمعادلته الديكارتية :  $2x - y + 2z + 1 = 0$
- المطلوب: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية:
1. النقط A ، B ، C في استقامية.
  2.  $(ABD)$  مستوي معادلة ديكارتية له :  $25x - 6y - z - 33 = 0$
  3. المستقيم  $(CD)$  عمودي على المستوي  $(\pi)$ .
  4. المسقط العمودي للنقطة B على  $(\pi)$  هو النقطة  $H(1; 1; -1)$

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$
1. حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة:  $z^2 - 2z + 4 = 0$
  2. نسمي  $z_1 ; z_2$  حلي هذه المعادلة.
- (أ) أكتب العددين  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل الأسّي.
- (ب) A ، B ، C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:
- $$z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3}) ; z_B = 1 + i\sqrt{3} ; z_A = 1 - i\sqrt{3}$$
- ( i يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق  $i^2 = -1$  )
- أحسب الأطوال AB ، AC ، BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
- (جـ) جد الطويلة و عمدة للعدد المركب Z حيث :  $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$
- (د) أحسب  $z^3$  و  $z^6$  ثم استنتج أن  $z^{3k}$  عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

- $(u_n)$  متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول  $u_1$  و أساسها q حيث:
- $$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$
1. (أ) أحسب  $u_2$  و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول  $u_1$ .
  - (ب) أكتب عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة n .
  - (جـ) أحسب  $S_n$  حيث:  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون:
- $$S_n = 728$$

2.  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  كما يلي:

$$v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n \quad \text{و} \quad v_1 = 2$$

(أ) أحسب  $v_2$  و  $v_3$ .

(ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم:  $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ .

بين أن  $(w_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ .

(ج) أكتب  $w_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $v_n$  بدلالة  $n$ .

### التمرين الرابع: (07 نقاط)

#### الجزء الأول:

$h$  دالة عددية معرفة على  $]-1; +\infty[$  كما يلي:  $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

1. أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$ .

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ :  $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ .

و استنتج اتجاه تغير الدالة  $h$  ثم أنجز جدول تغيراتها.

3. أحسب  $h(0)$  و استنتج إشارة  $h(x)$  حسب قيم  $x$ .

الجزء الثاني: لتكن  $f$  دالة معرفة على  $]-1; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ .

نسمي  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. (أ) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  ثم فسر هذه النتيجة بياناً.

(ب) باستخدام النتيجة  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ .

(ج) استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(د) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$  و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$ .

(هـ) أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2. بين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ :  $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ؛ ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

3. بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع المستقيم ذو المعادلة  $y=2$  عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.

4. أرسم  $(C_f)$ .

5. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(C_f)$  و المستقيمتان التي معادلاتها:

$$y = x - 1 \quad ; \quad x = 0 \quad \text{و} \quad x = 1.$$

محلور الموضوع	عناصر الاجابة الموضوع الأول		العلامة
	مجزأة	المجموع	
المتتاليات	التمرين الأول:		03.5
	2×0.25	(1) $v_1 = \frac{7}{3}$ ، $v_0 = 1$ .....	
	1	(2) $v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n)$ و منه $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ إذن $(v_n)$ م. هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ ....	
	0.75	(3) $S_n = \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right]$ .....	
	0.75	(ب) $S_n = u_n - u_0$ و منه $u_n = S_n + 1$ .....	
الأعداد المركبة	التمرين الثاني:		05
	4×0.25	(1) $\Delta = (2i\sqrt{3})^2$ و منه $z_0 = 1+i$ ، $z' = 1+\sqrt{3}i$ ، $z'' = 1-\sqrt{3}i$ .....	
	2×0.5	(2) $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (أ) .....	
	2×0.5	(ب) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi i}{12}}$ ، $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ .....	
	2×0.5	(ج) $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ و $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ .....	
هندسة فضائية	التمرين الثالث:		04
	1	(1) (أ) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا و إحداثيات كل من	
	0.5	$C, B, A$ تحقق معادلة $(P)$ .....	
	0.5	(ب) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ و $ABC$ قائم في $A$ .....	
	0.5	(2) (أ) $D \notin (ABC)$ .....	
0.5	1	(ب) بما أن $D$ لا تنتمي إلى $(ABC)$ فإن $(ABCD)$ رباعي وجوه .....	
	0.5	(3) (أ) المسافة هي: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .....	
	1	(ب) الحجم: (وحدة مكعبة) $h = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} AB \cdot AC \right) h = \frac{1}{2}$ .....	
	0.5	$V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} AB \cdot AC \right) h = \frac{1}{2}$ .....	

العلامة	مجزأة	عناصر الإجابة الموضوع الأول	محاو الموضوع
07.5	3×0.25	التمرين الرابع: ..... $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (I (I	دوال
	0.5	..... (ب)	
	0.25	..... $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ (I (2	
	2×0.25	..... $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = 0$ (ب) ومنه $y = x$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $+\infty$	
	0.75	..... $g'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ (ج	
	0.25+0.25	..... $g(0) = 4$ ، إشارة $g'(x)$	
	0.5	..... (ب)	
	2×0.25	..... $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = -5$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = -3$ (I (II	
	0.25	..... الدالة $k$ لا تقبل الاشتقاق عند 0	
	0.5	..... (ب) النقطة ذات الفاصلة 0 هي نقطة زاوية والمنحنى $(C_K)$ يقبل نصفي مماسين..	
	0.5	..... (2) اكتب معادلتَي المماسين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$	
	1	..... (3) الرسم $(\Delta_1)$ ، $(\Delta_2)$ و $(C_K)$	
	1	..... (4) $A = \int_{-1/2}^0 f(x) dx + \int_0^{1/2} g(x) dx = \left[ -\frac{x^2}{2} + 4 \ln(x+1) \right]_{-1/2}^0 + \left[ \frac{x^2}{2} + 4 \ln(x+1) \right]_{0}^{1/2}$ $= \frac{1}{4} + 4 \ln 3 (\mu a)$	

العلامة	مجزأة	عناصر الإجابة الموضوع الثاني	محاور الموضوع
04	01	التمرين الأول: ( 04 نقط) (1) جواب خاطئ لأن $A, B, C$ ليست على استقامة.....	هندسة فضائية
	01	(2) جواب صحيح لأن إحداثيات $A, B, D$ تحقق المعادلة.....	
	01	(3) جواب خاطئ لأن $\vec{CD}$ ليس شعاع ناظمي لـ $(\pi)$ .....	
	01	(4) جواب خاطئ لأن $\vec{BH}$ ليس شعاع ناظمي لـ $(\pi)$ .....	
04	0,75	التمرين الثاني: ( 04 نقط) (1) حلول المعادلة: $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ ; $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ .....	الأعداد المركبة
	0,5	(1.2) $z_1 = 2e^{i(-\frac{\pi}{3})}$ ; $z_2 = 2e^{i(\frac{\pi}{3})}$ .....	
	01	(ب) $AB = 2\sqrt{3}$ ; $BC = \sqrt{3}$ ; $AC = 3$ ; $ABC$ مثلث قائم .....	
	0,75	(جـ) $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ ; $ Z  = \frac{1}{2}$ .....	
	01	(د) $Z^3 = -\frac{1}{8}$ ; $Z^6 = \frac{1}{64}$ ; $Z^{3k} = \left(-\frac{1}{8}\right)^k$ و هو عدد حقيقي.....	
05	1,75 0,25 2x0,5	التمرين الثالث ( 05 نقط) (1.1) $u_1 = 2$ ; $q = 3$ ; $u_2 = 6$ .....	المتتاليات
		(ب) $u_n = 2 \times 3^{n-1}$ .....	
		(جـ) $S_n = 3^n - 1$ ; $n = 6$ .....	
	0,5	(1.2) $v_2 = 5$ ; $v_3 = \frac{27}{2}$ .....	
	0,5	(ب) $(w_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $w_1 = \frac{1}{3}$ .....	
	2x0,5	(جـ) $v_n = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \frac{4}{3} \times 3^{n-1}$ ; $w_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .....	

		التمرين الرابع ( 07 نقط )	
0,5	.....	الجزء الأول: (1) $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -\infty$ ؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$	
3x0,25		(2) $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ ؛ $h$ متزايدة على $[0; +\infty[$ ؛ جدول التغيرات	
2x0,25		(3) $h(0) = 0$ ؛ إشارة $h(x)$	
00,5		الجزء الثاني: (أ.1) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ ؛ $x = -1$ معادلة لمستقيم	
		مقارب.....	
0,5	.....	(ب) $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e'}{t}\right)} = 0$	
0,25	.....	(ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	
0,5		(د) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$ ؛ $y = x-1$ معادلة لمستقيم	
		مقارب.....	
0,25	.....	(هـ) الوضعية.....	
0,5+0,5	.....	(2) $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ؛ جدول التغيرات	
0,75		(3) $f$ مستمرة و متزايدة على $[3,3; 3,4]$	
		و $f(3,3) < 2 < f(3,4)$ ...	
0,75	.....	(4) رسم $(C_f)$	
		المساحة:	
0,75	.....	$A = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 u.a.$	
07			الدوال