الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2017

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقطة $A(1;-1;2)$ والمستوي (P) ذا المعادلة $x-y+z+2=0$ والمستقيم (D) المعرف بـ : $\begin{cases} x+y-9=0 \\ y+z-4=0 \end{cases}$

1) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

2) جد معادلة ديكارتية للمستوي (P') الذي يشمل A ويوازي (P).

3) أثبت أنّ (D) يقطع (P') في النقطة A' حيث $A'(6;3;1)$.

4) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل A ويوازي (P) ويقطع (D).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_0=\frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3-\frac{10}{u_n+4}$ و $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$.

1) أ) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنّها متقاربة.

2) أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ثمّ عبّر عن حدّها العام v_n بدلالة n.

ب) أثبت أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=1-\frac{3}{v_n+1}$ ثم استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z+2)(z^2-4z+8)=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النّقط A، B و C التي لاحقاتها: $z_A=2-2i$ ، $z_B=\overline{z}_A$ و $z_C=-2$

1) اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي.

2) عيّن z_D لاحقة النّقطة D حتى تكون النّقطة B مركز ثقل المثلث ACD .

3) (Γ) مجموعة النّقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) حيث $\arg\left(\dfrac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

تحقّق أنّ مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) ثمّ عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.

4) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2 ، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h

عيّن طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على D حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{2}{3}x+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ ،

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ الدالة f فردية ثم فسّر ذلك بيانيا.

2) احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب.

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من D ، $f'(x)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}8<\alpha<1{,}9$.

5) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=\dfrac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

6) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

7) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$(2-3|m|)x+3\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=0$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(3;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ و $C(0;0;1)$.

1) بيّن أنّ النقط A، B و C تعيّن مستويا، ثمّ تحقّق أنّ: $2x+3y+6z-6=0$ معادلة للمستوي (ABC).

2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) والذي يشمل المبدأ O.

3) جد إحداثيات H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC).

4) بيّن أنّ (BH) عمودي على (AC)، ثمّ استنتج أنّ H هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ABC.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

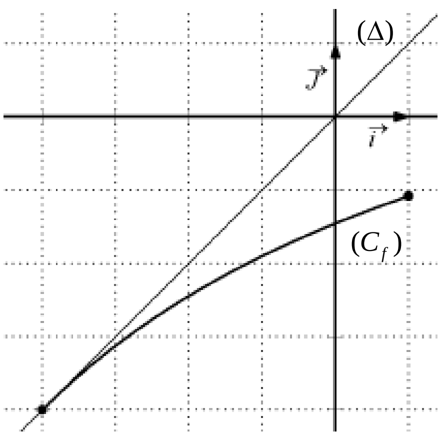
المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

f الدالة المعرّفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{3x-16}{x+11}$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

I) تحقّق أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ ثم بيّن أنّ:

من أجل كل $x\in[-4;1]$ فإنّ $f(x)\in[-4;1]$



II) (u_n) متتالية معرّفة بحدّها الأوّل $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) انقل الشكل المقابل ثمّ مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1 ، u_2 و u_3 (لا يطلب حساب الحدود) ثمّ ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4<u_n\leq 0$

ثمّ بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n\times u_n=1-4v_n$.

أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{7}$، ثم احسب المجموع S حيث

$S=v_0\times u_0+v_1\times u_1+\cdots+v_{2016}\times u_{2016}$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي $S=\left\{-\frac{1}{2}+i\right\}$.

2) من أجل كل عدد مركب z ، $(z+2)\times(\overline{z}+2)=|z+2|^2$.

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$.

4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9 .

5) من أجل كل عدد حقيقي α: إذا كان $Z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$

فإنّ: $\arg(Z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ وأعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة ، ثمّ احسب النهاية $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) اكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

II) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $h(x)\geq 0$، ثمّ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T).

2) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

3) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1;+\infty[$.

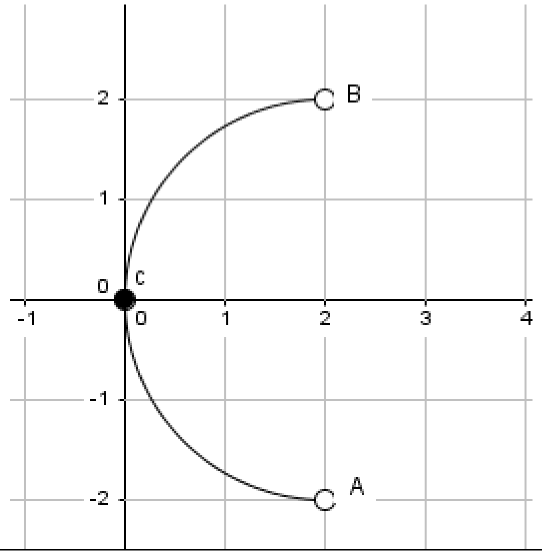
4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

تحقّق أنّ F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$، ثمّ احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f)

وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

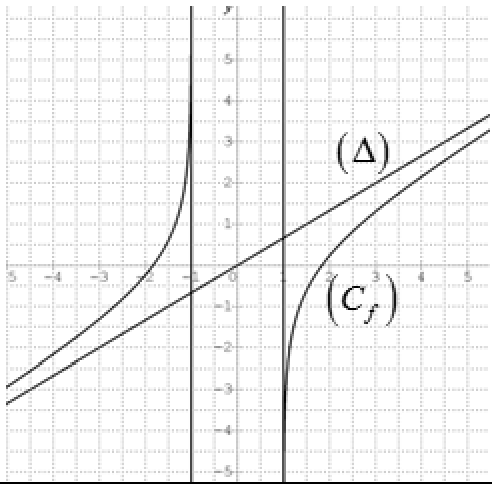
انتهى الموضوع الثاني

عناصر الإجابة	العلامة	
	مجزأة	المجموع
الموضـــــــــوع الأول		
التمرين الأول: (04 نقاط)		
1) التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) . $\lambda \in \mathbb{R}$ / $\begin{cases} x=-\lambda+9 \\ y=\lambda \\ z=-\lambda+4 \end{cases}$	01	01
2) معادلة (P') الذي يشمل A ويوازي (P) . $x-y+z-4=0$	01	01
3) أثبات أنّ (D) يقطع (P') في النقطة A' حيث $A'(6;3;1)$.	01	01
4) التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) $\begin{cases} (D)\cap(P')\cap(\Delta)=\{A'\} \\ A\in(\Delta) \end{cases}$ ومنه $(\Delta)=(AA')$ $\begin{cases} x=5t+1 \\ y=4t-1 \\ z=-t+2 \end{cases}$ / $t\in\mathbb{R}$	01	01
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
1) أ) البرهان بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.	01	01
ب)- بيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}>0$ - بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة	0.75 0.25	01
2) أ) بيان أنّ: $v_{n+1}=\dfrac{5}{2}v_n$ ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{5}{2}$ $v_0=3$ عبارة حدّها العام : $v_n=3\left(\dfrac{5}{2}\right)^n$	0.50 0.25 0.25	01
ب) إثبات أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=1-\dfrac{3}{v_n+1}$ استنتاج النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.	0.50 0.50	01
التمرين الثالث: (05 نقاط)		
I) $\Delta=-16$ حل المعادلة: $S=\{-2\,;2-2i\,;2+2i\}$.	0.25 0.75	01
1) الشكل الأسّي: $z_A=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_B=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.	2×0.25	0.50
2) $z_D=6+8i$	01	01
3) التحقّق أنّ مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ)	0.25	

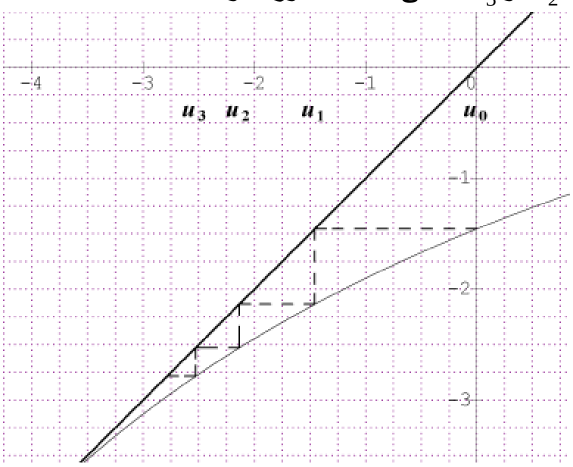
عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
(Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي حيث $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{2}+2\pi k \quad / k\in\mathbb{Z}$ منه (Γ) هي نصف الدائرة المفتوحة التي حداها A و B وقطرها $[AB]$ وتشمل O إنشاء (Γ): 	0.25 0.50 0.25	1.25
4) العبارة المركبة للتحاكي h هي: $z'=2z+2$ المجموعة (Γ') هي نصف الدائرة المفتوحة التي حداها النقطتين A' و B' والتي تشمل ω ذات اللاحقة 2 حيث $z_{A'}=6-4i\ ;\ z_{B'}=6+4i$	0.50 0.25 0.50	1.25
التمرين الرابع: (07 نقاط)		
1) بيان أنّ الدالة f فردية التفسير البياني: المبدأ O مركز تناظر للمنحني (C_f)	0.50 0.25	0.75
2) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ من النهايات السابقة نستنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب معادلتيهما $x=-1\ ;\ x=1$	0.25×4 2×0.25	1.50
3) أ) بيان أنّ من أجل كل x من D ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.	0.50	

<table>
<tr><th>عناصر الإجابة</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th></th><th>مجزأة</th><th>المجموع</th></tr>
<tr><td>ب) اتجاه تغيّر الدالة f : f متزايدة تماما على كل مجال من D

جدول تغيراتها
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td></td><td></td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty \nearrow +\infty$</td><td></td><td></td><td>$-\infty \nearrow +\infty$</td></tr>
</table></td><td>0.25

0.50</td><td>1.25</td></tr>
<tr><td>4) بيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,8 < \alpha < 1,9$.</td><td>0.75</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>5) (Δ) مقارب مائل لأن : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\frac{2}{3}x\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$
الوضع النسبي: (C_f) فوق (Δ) من اجل $x<-1$ و (C_f) تحت (Δ) من اجل $x>1$</td><td>0.50
0.50</td><td>01</td></tr>
<tr><td>6) انشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).
</td><td>0.75</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>7) $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ تكافئ $f(x)=|m|x$
حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=|m|x$
إذا كان $m\in\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ فان المعادلة لا تقبل حلول
إذا كان $m\in\left]-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right[$ فان المعادلة تقبل حلين متمايزين</td><td>0.25
0.25
2×0.25</td><td>01</td></tr>
</table>

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
الموضـــــــــــوع الثاني		
التمرين الأول:(04 نقاط)		
1) بيان أنّ النقط A، B و C تعيّن مستويا للتحقّق أنّ: $2x+3y+6z-6=0$ معادلة للمستوي (ABC) يكفي التأكد ان إحداثيات النقط A، B و C تحقق المعادلة المعطاة	0.50 0.75	1.25
2) التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) $\begin{cases} x=2t \\ y=3t \\ z=6t \end{cases} \quad / t\in\mathbb{R}$	0.50	0.50
3) إحداثيات H : $H\left(\frac{12}{49};\frac{18}{49};\frac{36}{49}\right)$	01	01
4) اثبات أن: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BH}=0$ نقطة تلاقي الاعمدة: يكفي اثبات $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ او $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$	0.50 0.75	1.25
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
I) التحقق أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ اثبات ان: من أجل كل $x\in[-4;1]$ فإنّ $f(x)\in[-4;1]$	0.25 0.50	0.75
II) **1)** تمثّيل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل	0.50	01

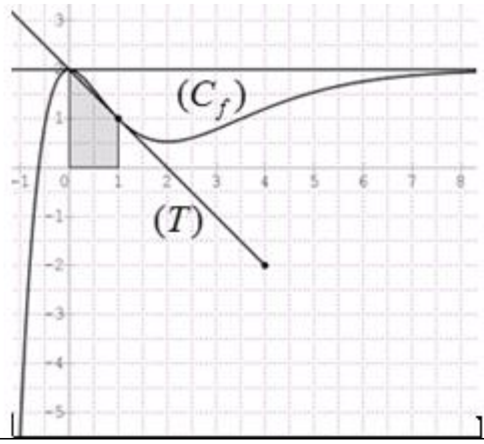


عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
التخمين: (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة	2×0.25	
2) البرهان بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4<u_n\leq 0$ بيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما $u_{n+1}-u_n=-\frac{(u_n+1)^2}{u_n+1}<0$	0.75 0.50	1.25
3) اثبات أنّ: (v_n) حسابية : $v_{n+1}=v_n+\frac{1}{7}$ حساب المجموع : $S=-1161792$	0.50 0.50	01

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
التمرين الثالث: (05 نقاط)		
1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي $S=\left\{-\frac{1}{2}+i\right\}$. **(صحيحة)**	0.25 0.75	01
من أجل كل عدد مركب z ، $(z+2)\times(\overline{z}+2)=\|z+2\|^2$. **(صحيحة)**	0.25 0.75	01
3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$. **(خاطئة)**	0.25 0.75	01
4) صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9 **(صحيحة)**	0.25 0.75	01
5) من أجل كل عدد حقيقي α : إذا كان $Z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$ فإنّ: $\arg(Z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$ ، **(صحيحة)**	0.25 0.75	01
التمرين الرابع: (07 نقاط)		
1) بيان أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ التفسير هندسي : (C_f) يقبل مستقيما مقاربا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $y=2$ حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$	0.50 0.25 0.25	01
2) أ) بيان أن: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$. ب) اتجاه تغيّر الدالة f : الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[0;2]$ جدول التغيرات:	0.50 0.50 0.50	1.50

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
3) معادلة المماس $(T):y=-x+2$	0.50	0.50

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
II) **1)** تبيان أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $h(x) \geq 0$.	0.50	1.25
$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & 1 & +\infty \\ \hline h'(x) & - & 0 & + \\ \hline h(x) & \searrow & 0 & \nearrow \end{array}$	0.25	
دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) . $f(x) - y = xh(x)$ (C_f) فوق (T) على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ ، (C_f) تحت (T) على $]-\infty;0[$ (C_f) يقطع (T) في النقطتين $A(1;1); B(0;2)$	0.50	
1) بيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيدا α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$. وذلك بواسطة مبرهنة القيم المتوسطة ورتابة الدالة	0.75	0.75
2) انشاء المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $]-1;+\infty[$.  	0.25 0.75	01
التحقّق أنّ F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$: $F'(x) = f(x)$ حساب المساحة $S = \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = (7-2e) \quad u.a$	0.50 0.50	01