

امتحان شهادة بكالوريا التعليم الثانوي دورة 2008

الشعبة : تقني رياضي

المدة : 04 ساعات و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

**تمرين 1: (4 نقاط)**

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة (\*) المعرفة كما يلي:

$$Z^3 + (2-4i)Z^2 - (6+9i)Z + 9(-1+i) = 0 \quad (*)$$

1/ بين أن  $Z_0 = 3i$  هو حل للمعادلة (\*)

2/ حل، في  $\mathbb{C}$ ، المعادلة (\*) ثم اكتب حلولها  $Z_0, Z_1, Z_2$  على الشكل الأسّي حيث  $|Z_1| < |Z_2|$ .

3/ لتكن  $A, B, C$  صور الحلول  $Z_0, Z_1, Z_2$  على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . عين النقطة  $G$  مرجح الجملة  $\{(A,1); (B,1); (C,-1)\}$ .

4/ عين المجموعة  $(E)$  للنقطة  $M$  حيث :  $AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13$

بين أن النقطة  $A$  تنتمي إلى المجموعة  $(E)$  ثم أنشئ  $(E)$ .

5/ تحقق أن النقطة  $O, B$  و  $G$  في استقامة ثم عين صورة المجموعة  $(E)$  بالتحاكي الذي مركزه

النقطة  $O$  ويحول  $B$  إلى  $G$  محددا عناصره المميزة.

**تمرين 2: (5 نقاط)**

نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$A(1,2,2), B(3,2,1), C(1,3,3)$  نقط من هذا الفضاء.

1/ برهن أن النقط  $A, B, C$  تعين مستو يطلب تعيين معادلته الديكارتية.

2/ نعتبر المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  المعرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$$(P_1): x - 2y + 2z - 1 = 0$$

$$(P_2): x - 3y + 2z + 2 = 0$$

بين أن  $(P_1)$  و  $(P_2)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$ .

3/ بين أن النقطة  $C$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta)$ .

4/ بين أن الشعاع  $\vec{u}(2,0,-1)$  هو أحد أشعة توجيه المستقيم  $(\Delta)$ .

5/ استنتج أن التمثيل الوسيط للمستقيم  $(\Delta)$  هو الجملة:

$$\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 3 \\ z = -k + 3 \end{cases}$$

حيث  $(k \in \mathbb{R})$

6/ لتكن  $M$  نقطة من المستقيم  $(\Delta)$  ، أوجد قيمة الوسيط  $k$  حتى يكون الشعاعان  $\overline{AM}$  و  $\overline{u}$  متعامدين، ثم استنتج المسافة بين النقطة  $A$  والمستقيم  $(\Delta)$ .

### تمرين 3: (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $[0;2]$  بالعلاقة  $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

1/ أ- ادرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[0;2]$

ب- أنشئ  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
(الوحدة على المحورين  $4cm$ )

ج- برهن أنه إذا كان  $x \in [0;2]$  فإن  $f(x) \in [0;2]$ .

2/ نعرف المتتالية العددية  $(U_n)$  على  $\mathbb{N}$  كالآتي :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

أ - برر وجود المتتالية  $(U_n)$ . احسب الحدين  $U_1$  و  $U_2$   
ب - مثل الحدود  $U_0$  ،  $U_1$  و  $U_2$  على محور الفواصل وذلك بالاستعانة بالمنحنى  $(C)$  والمستقيم  $(D)$  ذو المعادلة  $y = x$ .

ج - ضع تخميناً حول اتجاه تغير  $(U_n)$  و تقاربها انطلاقاً من التمثيل السابق.

3/ أ - برهن بالتراجع على العدد الطبيعي  $n$  أن :  $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$ .

ب - برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي  $n$  فإن :  $U_{n+1} > U_n$ .  
ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب  $(U_n)$  ؟

ج - تحقق أن :  $U_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{U_n+2} (U_n - \sqrt{3})$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم.

عَيِّن عدداً حقيقياً  $k$  من  $]0;1[$  بحيث :  $|U_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k |U_n - \sqrt{3}|$

بيِّن أنه من أجل  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $|U_n - \sqrt{3}| \leq k^n |U_0 - \sqrt{3}|$ . استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

### تمرين 4: (4 نقاط)

$n$  عدد طبيعي أكبر من 5.

1/  $a$  و  $b$  عددان طبيعيان حيث  $a = n-2$  و  $b = 2n+3$

أ - ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$  ؟

ب - بيِّن أن العددين  $a$  و  $b$  من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان  $n+5$  مضاعفاً للعدد 7.

ج - عَيِّن قيم  $n$  التي يكون من أجلها  $PGCD(a;b) = 7$

2/ نعتبر العددين الطبيعيين  $p$  و  $q$  حيث :

$$p = 2n^2 - 7n - 15 \text{ و } q = n^2 - 7n + 10$$

أ - بيِّن أن كل من العددين  $p$  و  $q$  يقبل القسمة على  $n-5$ .

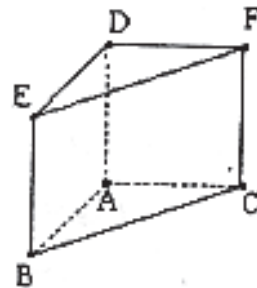
ب - عَيِّن تبعا لقيم  $n$  وبدلالة  $n$  ،  $PGCD(p;q)$ .

التمرين الأول: ( 04 نقاط )

- نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين  $x$  و  $y$  : (I) .....  $4x - 9y = 319$  .
- (1) - تأكد أن الثنائية  $(1, 82)$  حل للمعادلة (I).  
- حل المعادلة (I).  
(2) عين الثنائيات  $(a, b)$  الصحيحة، حلول المعادلة : (II) .....  $4a^2 - 9b^2 = 319$   
(3) استنتج الثنائيات  $(x_0, y_0)$  حلول المعادلة (I) بحيث  $x_0$  و  $y_0$  مربعين تامين.

التمرين الثاني : ( 04 نقاط )

$ABCDEF$  منشور قائم قاعدته المثلث  $ABC$  القائم في  $A$  والمتمساوي الساقين وجهاء  $ABED$  و  $ACFD$  مربعان متقايسان طول ضلع كل منهما  $r$  حيث  $r \in \mathbb{R}^+$ .  
(انظر الشكل)



- (1) يرمز  $I$  إلى منتصف  $[AD]$  و  $J$  إلى مركز ثقل الرباعي  $BCFE$ . بين أن  $G$  مرجح الجملة  $\{(A;2), (B;1), (C;1), (D;2), (E;1), (F;1)\}$  هو منتصف  $[IJ]$
- (2) ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(A; \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})$ .
- عين إحداثيات النقط  $F, E, D, C, B, A$ .  
- عين مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق :  
$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2MD^2 + ME^2 + MF^2 = 10r^2$$

التمرين الثالث : ( 04 نقاط )

- $r$  عدد حقيقي موجب تماما و  $\theta$  عدد حقيقي كفي.
- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  :  
$$z^2 - 2i \left(r \cos \frac{\theta}{2}\right)z - r^2 = 0$$
  
اكتب الحلين على الشكل الأسّي.
- (2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  صورتا الحلين.  
عين  $\theta$  حتى يكون المثلث  $OAB$  متقايس الأضلاع.

التمرين الرابع: ( 08 نقاط )

1 (  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $]-2; +\infty[$  كما يأتي:  $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$  .

$C_f$  منحنى  $f$  في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .  
( وحدة الأطوال  $2cm$  )

أ - احسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة التعريف .

ب - ادرس اتجاه تغير  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

ج - بين أن المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = x - 2$  مقارب للمنحنى  $C_f$  ثم ارسم  $C_f$  و  $(D)$  .

د - بين أن صورة المجال  $\left[1; \frac{5}{2}\right]$  محتواة في المجال  $\left[1; \frac{5}{2}\right]$

2 ( نعتبر المتتالية العددية  $(U_n)$  المعرفة بحدّها الأول  $U_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا:  $U_{n+1} = f(U_n)$  .

أ - باستخدام  $C_f$  و المستقيم ذي المعادلة  $y = x$  ، مثل  $U_0$  و  $U_1$  و  $U_2$  على حامل محور الفواصل  $(Ox)$  .

ب - خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية  $(U_n)$  .

ج - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن:  $1 \leq U_n \leq \frac{5}{2}$  و أن المتتالية  $(U_n)$  متزايدة .

د - استنتج أن  $(U_n)$  متقاربة و احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  .

تكتب الإجابة النموذجية على هذه الورقة و لا تقبل سواها

الإجابة النموذجية لموضوع لامتحان :يكالوريا دورة: 2008  
اختبار مادة: الرياضيات الشعبة: تقني رياضي المدة: 04 ساعات و 30 د .

# الإجابة النموذجية وسلم التقييم

الموضوع الأول

المجموع	العلامة	عناصر الإجابة	الموضوع
04	0.5 0.25 0.25×4 0.25×3 0.25 0.5 0.25 0.25 0.25	<p><b>تمرين 1: (4 نقاط)</b></p> <p>1/ بالتعويض في المعادلة (*) نبين أن <math>Z_0 = 3i</math> هو حل لها</p> <p>2/ حلول (*) في <math>\mathbb{C}</math> هي :</p> <p><math>(Z - 3i)[Z^2 + (2 - i)Z - 3 - 3i] = 0</math></p> <p><math>Z_2 = -3</math> ، <math>Z_1 = 1 + i</math> ، <math>Z_0 = 3i</math> ، <math>\Delta = 15 + 8i = (4 + i)^2</math></p> <p>الشكل الأسّي <math>Z_2 = 3e^{i\pi}</math> ، <math>Z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}</math> ، <math>Z_0 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}</math></p> <p>3/ تعيين النقطة <math>G(4,4)</math> :</p> <p>4/ المجموعة <math>(E)</math> هي الدائرة ذات المركز <math>G</math> ونصف القطر <math>\sqrt{17}</math></p> <p><math>A</math> نقطة من هذه الدائرة لأن <math>GA = \sqrt{17}</math></p> <p>5/ العبارة المركبة للتحاكي المطلوب هي : <math>z' = 4z</math></p> <p>صورة المجموعة <math>(E)</math> بهذا التحاكي هي الدائرة ذات المركز</p> <p><math>G'(16;16)</math> ونصف القطر <math>4\sqrt{17}</math></p>	<p>المركبة</p> <p>يلات نقطية</p>
		<p><b>تمرين 2: (5 نقاط)</b></p> <p>1/ نلاحظ أن <math>\overline{AB}(2,0,-1)</math> و <math>\overline{AC}(0,1,1)</math> مستقلان خطيا</p> <p>منه النقط <math>A, B, C</math> تعين مستو معادلته هي <math>x - 2y + 2z - 1 = 0</math></p> <p>2/ <math>(P_1)</math> و <math>(P_2)</math> متقاطعان وفق مستقيم <math>(\Delta)</math> لأن الشعاعين النازمين عليهما</p> <p><math>\vec{n}_1</math> و <math>\vec{n}_2</math> غير متوازيين حيث <math>\vec{n}_1(1,-2,2)</math> و <math>\vec{n}_2(1,-3,2)</math></p> <p>3/ <math>C</math> تنتمي إلى المستقيم <math>(\Delta)</math> لأنها نقطة مشتركة بين <math>(P_1)</math> و <math>(P_2)</math></p>	



العلامة		عناصر الإجابة	محاوَر الموضوع
مجموع	مجزأة		
05	0.25×3	4/ يكفي إثبات أن الشعاع $\vec{u}(2,0,-1)$ عمودي على كل من الشعاعين $\vec{n}_1(1,-2,2)$ و $\vec{n}_2(1,-3,2)$	هندسة فضائية
	0.75	5/ استنتاج أن التمثيل الوسيطى للمستقيم $(\Delta)$ هو	
		حيث $k \in \mathbb{R}$	
	0.75	6/ قيمة الوسيط $k$ حتى يكون $\vec{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين هي $k = \frac{1}{5}$	
	0.75	المسافة بين $A$ و $(\Delta)$ هي الطول $AM = \frac{3\sqrt{5}}{5}$	
	0.25×2+0.5	<b>تمرين 3: (7 نقاط)</b> 1/ أ - دراسة تغيرات $f$ على المجال $[0;2]$	الدوال العددية المتتاليات العددية
	0.25	$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ - إشارة $f'(x)$ واتجاه التغير -	
	0.75	جدول التغيرات	
	0.5	ب - إنشاء المنحنى $(C)$	
		ج - برهان أنه إذا كان $x \in [0;2]$ فإن $f(x) \in [0;2]$	
		من جدول التغيرات وحيث أن $f$ مستمرة ومنتزيدة تماما على المجال المعطى $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(2) = \frac{7}{4}$ نستنتج أن صورة أي عدد حقيقي $x$ من المجال $[0;2]$ بالدالة $f$ هي العدد الحقيقي $f(x)$ من المجال $[\frac{3}{2}; \frac{7}{4}]$	
		وحيث أن $[\frac{3}{2}; \frac{7}{4}]$ محتوًى في $[0;2]$ ينتج $f(x) \in [0;2]$ .	
	0.25	2/ أ - نبرّر وجود المتتالية $(U_n)$ بتوضيح أن كل حدودها تنتمي إلى المجال $[0;2]$ وهذا محقق بالنظر إلى جواب السؤال 1/ ج -	
	0.25×2	* حساب $U_1$ و $U_2$	
	0.25×3	ب - تمثيل الحدود $U_0$ ، $U_1$ و $U_2$	
	0.25	ج - <u>التخمين</u> : $(U_n)$ متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى وبالتالي فهي متقاربة	
	0.75	3/ أ - البرهان بالتراجع على العدد الطبيعي $n$ أن: $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$	
	0.75	ب - البرهان أن: $U_{n+1} > U_n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$	



العلامة		عناصر الإجابة	معايير الموضوع
المجموع	مجزأة		
1.25	0.25	<p><u>التمرين الأول : 04 ن</u></p> <p>(1) التأكد من أن <math>(82, 1)</math> حل للمعادلة <math>(I)</math> .....</p> <p>حلول المعادلة <math>(I)</math> هي : <math>(x = 9k + 82, y = 4k + 1)</math> حيث <math>k \in \mathbb{Z}</math> .....</p> <p>(2) <math>(2a - 3b)(2a + 3b) = 11 \times 29</math> .....</p> <p><math>S = \{(-80, -53); (-80, 53); (-10, -3); (-10, 3); (80, -53); (80, 53); (10, 3); (10, -3)\}</math> .....</p> <p>(3) الاستنتاج : <math>S' = \{(100, 9); (6400, 2809)\}</math> .....</p>	القواسم والمضاعفات
1.75	0.75		
1	1		
1	1		
1	1	<p><u>التمرين الثاني : 04 ن</u></p> <p>(1) تبين أن <math>G</math> منتصف <math>[IJ]</math> .....</p> <p>(2) <math>F(0, r, r); E(r, 0, r); D(0, 0, r); C(0, r, 0); B(r, 0, 0); A(0, 0, 0)</math> .....</p> <p>مجموعة النقاط <math>M</math> هي سطح الكرة الذي مركزها <math>G\left(\frac{r}{4}, \frac{r}{4}, \frac{r}{2}\right)</math> ونصف قطرها <math>\frac{r}{4}\sqrt{10}</math> .....</p>	هندسة فضائية
3	6×0.25		
3	3×0.5		
2.5	0.5×3	<p><u>التمرين الثالث : 04 ن</u></p> <p>(1) <math>z_2 = -r \sin \frac{\theta}{2} + ir \cos \frac{\theta}{2}</math> و <math>z_1 = r \sin \frac{\theta}{2} + ir \cos \frac{\theta}{2}</math> ، <math>\Delta' = r^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}</math> .....</p> <p>الشكل الأسّي : <math>z_2 = r e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2})}</math> و <math>z_1 = r e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})}</math> .....</p> <p>(2) المثلث متقايس الأضلاع : <math>\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}</math> و <math>OA = OB</math> .....</p> <p><math>k \in \mathbb{Z} / \theta = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k ; \theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi k</math> .....</p>	الأعداد المركبة والهندسة
1.5	0.5×2		
1.5	0.25×2		
1.5	0.25×2		
4.75	0.25×2	<p><u>التمرين الرابع : 08 ن</u></p> <p>(1) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty</math> ; <math>\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty</math> - أ .....</p> <p>ب - <math>f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}</math> وإشارته .....</p> <p>- جدول التغيرات .....</p> <p>ج - <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-2)) = 0</math> و <math>(D)</math> مقارب مائل .....</p> <p>رسم <math>C_f</math> .....</p> <p>د - تبين أن صورة المجال <math>\left[1; \frac{5}{2}\right]</math> محتواة في <math>\left[1; \frac{5}{2}\right]</math> .....</p> <p>(2) أ - تمثيل الحدود <math>U_0</math> و <math>U_1</math> و <math>U_2</math> .....</p> <p>ب - تخمين اتجاه تغير وتقارب <math>(U_n)</math> .....</p> <p>ج - تبين أن <math>1 \leq U_n \leq \frac{5}{2}</math> و <math>(U_n)</math> متزايدة .....</p> <p>د - <math>(U_n)</math> متقاربة .....</p> <p><math>\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{5}{2}</math> .....</p>	النوال العددية
0.5	0.5×2		
1	0.5		
1	1		
0.75	0.75		
1	1		
0.75	0.75		
0.5×2	0.5×2		
0.25	0.25		
3.25	0.25		