Résumé	Module	Codage et représentation de l'information	
Chapitre 3: Algèbre de Boole	Filière	MI	1ère Année

L'**algèbre de Boole**, ou calcul booléen, est la partie des mathématiques, de la logique et de l'électronique qui s'intéresse aux opérations et aux fonctions sur les variables logiques. Plus spécifiquement, l'algèbre booléenne permet d'utiliser des techniques algébriques pour traiter les expressions à deux valeurs du calcul des propositions. Elle fut initiée en 1854 par le mathématicien britannique George Boole.

Aujourd'hui, l'algèbre de Boole trouve de nombreuses applications en informatique et dans la conception des circuits électroniques. Elle fut utilisée la première fois pour les circuits de commutation téléphoniques par Claude Shannon.

Algèbre de Boole des valeurs de vérité

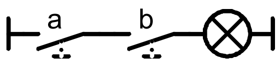
On appelle *B* l'ensemble constitué de deux éléments appelés **valeurs de vérité** {VRAI, FAUX}. Cet ensemble est aussi noté *B* = {1, 0}

Sur cet ensemble on peut définir deux lois (ou opérations ou foncteurs), les lois ET et OU et une transformation appelée complémentaire, inversion ou contraire.

Conjonction

Elle est définie de la manière suivante : *a* ET *b* est VRAI si et seulement si *a* est VRAI et *b* est VRAI. Cette loi est aussi note '.'

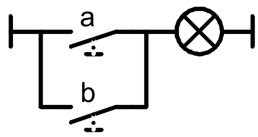
a	B	a et b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Disjonction

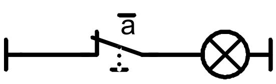
Elle est définie de la manière suivante : *a* OU *b* est VRAI si et seulement si *a* est VRAI ou *b* est VRAI. (En particulier, si *a* est vrai et que *b* est vrai aussi, alors *a* OU *b* est vrai.) Cette loi est aussi note +

a	B	a ou b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Négation

Le contraire de "a" est VRAI si et seulement si *a* est FAUX. Le contraire de a est noté $\bar{a}$



Propriétés des opérateurs

Associativité	$(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$ $(a.b).c = a.(b.c) = a.b.c$ Comme avec les opérations habituelles, certaines parenthèses sont inutiles:
Commutativité	$a+b = b+a$ L'ordre est sans importance: $a.b = b.a$
Distributivité	$a.(b+c) = a.b + a.c$ $a + (b.c) = (a+b).(a+c)$
Idempotence	$a+a+a+[...]+a = a$ $a.a.a.[...].a = a$
Éléments neutres	$a+0 = a$ $a.1 = a$
Absorption	$0.a = 0$ $1+a = 1, \quad \text{donc} \quad b.(b+a) = b + b.a = b$
Simplification	$a + \overline{a}.b = a + b$ $a.(\overline{a} + b) = a.b$
Redondance	$a.b + \overline{a}.c = a.b + \overline{a}.c + b.c$
Complémentarité	$a = \overline{\overline{a}}$ $a + \overline{a} = 1$ $a.\overline{a} = 0$

Théorème de De Morgan

Première loi de De Morgan (négation de la conjonction) $\overline{a+b} = \overline{a}.\overline{b}$

Deuxième loi de De Morgan (négation de la disjonction) $\overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$

La forme Canonique

- **Première forme Canonique**. F = somme min termes
  $F(A,B,C) = \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C} + A.B.C$
- **Deuxième forme Canonique** F = produit des max termes
  $F(A,B,C) = (A+B+C)\ (A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)\ (\overline{A}+B+C)$

Résumé	Module	**Codage et représentation de l'information**	
Chapitre 3: Algèbre de Boole	Filière	**MI**	**1ère Année**

Forme canonique Miniterm et Maxiterm

A	**B**	**C**	**S**
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

$A+B+C$: max terme

$A+B+\overline{C}$: max terme

$A+\overline{B}+C$: max terme

$\overline{A}.B.C$: min terme

$\overline{A}+B+C$: max terme

$A.\overline{B}.C$: min terme

$A.B.\overline{C}$: min terme

$A.B.C$: min terme

Simplification des fonctions logiques

Pourquoi ?

- Utiliser le moins de composants possibles
- Simplifier au maximum le schéma de câblage

Il faut donc trouver la forme minimale de l 'expression logique considérée

Deux méthodes

- Algébrique (en utilisant des propriétés et des théorèmes)
- Graphique (tableaux de Karnaught; ...)

Simplification algébrique.

Exemple $S = a.b.c + a.\overline{b}.(\overline{\overline{a}.\overline{c}})$

$S = a.b.c + a.\overline{b}.(\overline{\overline{a}.\overline{c}}$	transformation
$S = a.b.c + a.\overline{b}.(a +$	Appliquer le théorème de Morgan $(\overline{\overline{a}.\overline{c}}) = a + c$
$S = a.b.c + a.\overline{b}.a +$	Développement
$S = a.b.c + a.\overline{b} + a\overline{b}$	réduction (a $\overline{b}$ a = a $\overline{b}$)
$S = a.\overline{b} + a.b.c + a\overline{b}$ $S = a.\overline{b} + a.c.(b + \overline{b})$	Les variables communes
$S = a.\overline{b} + a.c$	car b+ $\overline{b}$ =1
$S = a.(\overline{b} + c)$	variables communes

Simplification par les tableaux de Karnaugh.

Le diagramme de karnaugh est un outil graphique qui permet de simplifier une équation logique ou le processus de passage d'une table de vérité à un circuit correspondant.

Exemple :

S1 a \ b	0	1
0	1	0
1	1	0

ou

S1 a \ b	$\bar{b}$	b
$\bar{a}$	1	0
a	1	0

S2 ab \ cd	$\bar{c}\bar{d}$ 00	$\bar{c}d$ 01	cd 11	$c\bar{d}$ 10
$\bar{a}\bar{b}$ 00	0	0	0	0
$\bar{a}b$ 01	0	1	1	0
ab 11	0	1	1	0
$a\bar{b}$ 10	1	0	0	1

4 Variables

Code GRAY

0 0 0
0 0 1
0 1 1
0 1 0
1 1 0
1 1 1
1 0 1
1 0 0
Exemple de code GRAY.
Une seule variable change à chaque fois.

Méthode:

- On réunit les 1er adjacents par groupe de 2, 4, 8 ect…
- L'équation du circuit est donnée par la somme des produit des variables qui ne change pas d'état dans chaque regroupement.

Donc $S1 = \bar{b}$ $S2 = bd + a\bar{b}\bar{d}$

Remarque: Une sortie /S est obtenue par les regroupements des zéros.