Solution série TD 03

Exo01 :

1. L'énergie potentielle est:

$U = U_M + U_m + U_{ressort} = -Mg(z+z_0) - mgh + \frac{1}{2}k(z+z_0)^2.$

Le disque tourne tout en descendant, donc: $h{=}z{+}R\theta$.

(La hauteur de descente peut être prise à partir de la position d'équilibre sans ajouter z_0)

Comme le fil est inextensible et non glissant, on a $R\theta = z$. Donc, $h = z + R\theta = 2z$.

$U = -Mg(z+z_0) - 2mgz + \frac{1}{2}kz^2 + kzz_0 + \mathrm{C}^{te}.$

2. Pour trouver l'allongement z_0 du ressort à l'équilibre, utilisons la condition d'équilibre :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \Longrightarrow -Mg - 2mg + kz + kz_0\big|_{z=0} = 0 \Longrightarrow -Mg - 2mg + kz_0 = 0 \Longrightarrow z_0 = \frac{(\mathrm{M}{+}2m)g}{k}.$$

L'énergie potentielle se simplifie alors en $U = \frac{1}{2}kz^2 + \mathrm{C}^{te}$.

3. L'énergie cinétique est: $T = T_{(M)Translation+Rotation} + T_{(m)Translation}$

$$\begin{aligned} &= \tfrac{1}{2}M(\dot{z})^2 + \tfrac{1}{2}I\,\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}m(2\dot{z})^2. \\ &= \tfrac{1}{2}M\,\dot{z}^2 + \tfrac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\,\dot{\theta}^2 + 2m\dot{z}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}M\,\dot{z}^2 + \tfrac{1}{4}M\,\dot{z}^2 + 2m\,\dot{z}^2 \qquad (\text{Car } z = R\theta \Longrightarrow \dot{z} = R\dot{\theta}.) \\ &= \tfrac{1}{4}(3M+8m)\,\dot{z}^2. \end{aligned}$$

4. Le Lagrangien est : $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{4}(3M+8m)\dot{z}^2 - \frac{1}{2}kz^2.$

(La constante C^{te} n'a pas d'importance pour le Lagrangien.)

L'équation du mouvement est: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = 0 \Longrightarrow$

$\ddot{z} + \frac{2k}{3M+8m}z = 0.$ La pulsation propre est $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3M+8m}}$. A.N: $\omega_0 = \sqrt{8}\,\mathbf{rad/s}$.

Exo02 :

1. Le ressort équivalent est $k{=}k_1{+}k_2$: $U = U_m + U_M + U_{ressort} = mgh - MgH + \frac{1}{2}k(z+z_0)^2$

$U \approx mg\frac{3l}{4}\sin\theta - Mg\frac{l}{4}\sin\theta + \frac{1}{2}k(\frac{l}{4}\sin\theta + z_0)^2 \approx mg\frac{3l}{4}\theta - Mg\frac{l}{4}\theta + k\frac{l^2}{32}\theta^2 + k\frac{l}{4}\theta z_0 + \mathrm{C}^{te}.$

2. La condition d'équilibre est $\left.\frac{\partial U}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow mg\frac{3l}{4} - Mg\frac{l}{4} + k\frac{l}{4}z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{Mg-3mg}{k}.$

L'énergie potentielle se simplifie grâce à la condition d'équilibre en : $U \approx k\frac{l^2}{32}\theta^2 + \mathrm{C}^{te}$.

3. $T{=}T_m{+}T_M = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 = \frac{1}{2}m(\frac{3l}{4}\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}M(\frac{l}{4}\dot{\theta})^2 = \frac{9m+M}{32}l^2\,\dot{\theta}^2.$

4. $\mathcal{L} = T - U = \frac{9m+M}{32}l^2\,\dot{\theta}^2 - \frac{k}{32}l^2\theta^2 + \mathrm{C}^{te}$. L'équation du mouvement est:

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{k}{9m+M}\theta = 0.$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{9m+M}}$ A.N: $\omega_0 = \sqrt{2}\,\mathrm{rad/s}$.