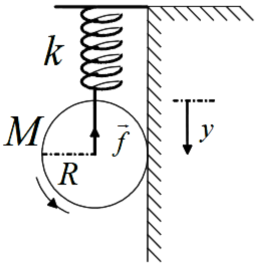
Série de TD N°3 : Vibrations&Ondes

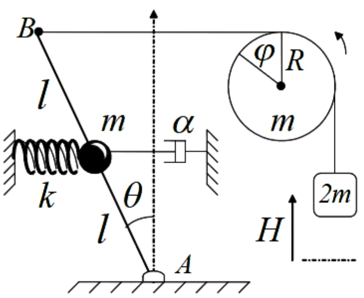
Exercice 1. Nature du Mouvement Amorti. Équation Horaire. Décrément Logarithmique. Dans son mouvement de va-et-vient, le disque ci-dessous suspendu au ressort reste en contact avec le mur qui le fait tourner sur lui même. L'ensemble des frottements est symbolisé par la force $f = -\alpha v_{disque}$ appliquée au centre du disque. À l'équilibre le ressort était allongé de y_0.

1. Trouver l'énergie potentielle U du système en fonction de y.
2. Simplifier U à l'aide de la condition d'équilibre.
3. Trouver l'énergie cinétique T et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$.
4. Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement.
5. Sachant que k=**13,5**N/m, M=**1**kg, trouver la valeur maximale que le coefficient α ne doit pas atteindre pour que le système oscille.
6. Pour α=**9**N.s/m, trouver la nature du mouvement ainsi que l'équation horaire $y(t)$. (*Initialement* $y(0)$=**1**cm, $\dot{y}(0) = \mathbf{0}$.)
7. Si α=**3**N.s/m, trouver le temps τ nécessaire pour que l'amplitude diminue à $\frac{1}{5}$ de sa valeur, et calculer le décrément logarithmique δ du mouvement.
8. En réduisant les frottements, le système oscille mais on remarque que l'amplitude est divisée par **2** après **25** oscillations complètes. Trouver le nouveau coefficient d'amortissement α'.



Exercice 2. Un fil inextensible et non glissant, relié au point B et enroulé autour d'un disque, supporte une masse $2m$. À l'équilibre la tige était verticale et l'allongement du ressort était x_0.

1. Trouver l'énergie potentielle U du système en fonction de $\theta \ll 1$. ($\cos\theta \approx 1-\frac{\theta^2}{2}$. $\sin\theta \approx \theta$)
2. Simplifier U à l'aide de la condition d'équilibre.
3. Trouver l'énergie cinétique T et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$.
4. Trouver le Lagrangien $\mathcal{L}$ puis l'équation du mouvement.
5. Si m=**1**kg, k=**20**N/m, l=**1**m, g=**10**m.s^2, trouver la valeur que le coefficient α ne doit pas atteindre pour que le système oscille.
6. Pour α = **22**N.s/m, trouver la nature du mouvement ainsi que l'équation horaire $\theta(t)$. (*Initialement* $\theta(0) = \mathbf{3}°$, $\dot{\theta}(0) = \mathbf{0}$.)
7. Pour α = **2**N.s/m, trouver le temps τ nécessaire pour que l'amplitude soit divisée par **3**.
8. En remplaçant le coefficient α par α', le système oscille mais l'amplitude diminue au cours du temps: après **20** oscillations complètes l'amplitude diminue à $\frac{1}{4}$ de sa valeur. Trouver α'.



Rappels: *L'équation de Lagrange des systèmes amortis est*: $\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{q}}$.

Pour $\lambda^2-\omega_0^2<0$: *l'équation horaire est* $q(t)=Ae^{-\lambda t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t+\phi)$.

Pour $\lambda^2-\omega_0^2=0$: *l'équation horaire est* $q(t)=e^{-\lambda t}(A_1+A_2t)$.

Pour $\lambda^2-\omega_0^2>0$: *l'équation horaire est* $q(t)=A_1e^{(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})t}+A_2e^{(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})t})$.