Solution de la série TD n°04

Exercice 1

1. L'énergie potentielle est: $U = U_M + U_{ressort} = -Mgy + \frac{1}{2}k(y+y_0)^2 = -Mgy + \frac{1}{2}ky^2 + kyy_0 + C^{te}$.

2. Grâce à la condition d'équilibre : $\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \Longrightarrow -Mg + ky_0 = 0$, U se simplifie: $U = \frac{1}{2}ky^2 + C^{te}$.

3. L'énergie cinétique est: $T = T_{(M)Rotation} + T_{(M)Translation} = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$.

En descendant le disque tourne sur lui même sans glissement:($R\theta = y \Longrightarrow R\dot{\theta} = \dot{y}$). Donc, $T = \frac{3}{4}M\dot{y}^2$.

La fonction de dissipation est $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v_{disque}^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$.

4. Le Lagrangien est : $\mathcal{L} = T - U = \frac{3}{4}M\dot{y}^2 - \frac{1}{2}ky^2 + C^{te}$.

L'équation du mouvement est: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{y}} \Longrightarrow \ddot{y} + \frac{2\alpha}{3M}\dot{y} + \frac{2k}{3M}y = 0$.

L'équation est de la forme $\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$ avec $\lambda = \frac{\alpha}{3M}$. $\omega_0^2 = \frac{2k}{3M}$.

5. La condition d'oscillation des systèmes amortis est $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \Longrightarrow \lambda < \omega_0 \Longrightarrow \frac{\alpha}{3M} < \sqrt{\frac{2k}{3M}} \Longrightarrow$

$\alpha < \sqrt{6kM} = 9$N.s/m. C'est la valeur que α ne doit pas atteindre pour qu'il ait oscillation.

6. La nature du mouvement est donnée par le signe de $\lambda^2 - \omega_0^2$. ($\lambda = \frac{\alpha}{3M} = 3s^{-1}$. $\omega_0^2 = \frac{2k}{3M} = 9rad^2/s^2$).

Donc, $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0 \Longrightarrow$ le mouvement est en régime **critique**.

Son équation horaire est: $y(t) = e^{-\lambda t}(A_1 + A_2 t) = e^{-3t}(A_1 + A_2 t)$.

Pour trouver A_1 et A_2 nous utilisons les conditions initiales:

$$\begin{cases} y(0) = A_1 = 1\text{cm} \\ \dot{y}(0) = -3A_1 + A_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_1 = \mathbf{1}\text{cm.} \\ A_2 = \mathbf{3}\text{cm/s.} \end{cases} \Longrightarrow y(t) = e^{-\mathbf{3}t}(\mathbf{1} + \mathbf{3}t)\ (\text{cm})$$

7. Puisque pour $\alpha = \mathbf{3N.s/m} < 9$N.s/m le mouvement est pseudo-périodique, l'amplitude est $Ae^{-\lambda t}$. Pour que cette amplitude diminue à 1/5 de sa valeur il faut un temps τ tel que $Ae^{-\lambda(t+\tau)} = \frac{1}{5}Ae^{-\lambda t} \Longrightarrow$

$\lambda\tau = \ln 5 \Longrightarrow \tau = \frac{\ln 5}{\lambda}$. Avec $\alpha = 3$N.s/m, on trouve $\lambda = 1s^{-1}$. Soit $\tau \approx \mathbf{1{,}61}$s.

Le décrément logarithmique est $\delta = \ln\frac{Ae^{-\lambda t}}{Ae^{-\lambda(t+T)}} = \lambda T = \frac{\lambda.2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \approx 2{,}22$.

8. Puisque après 25 oscillations l'amplitude est divisée par 2 on a $Ae^{-\lambda'(t+25T')} = \frac{1}{2}Ae^{-\lambda' t} \Longrightarrow$

$25\lambda' T' = \ln 2 \Longrightarrow \frac{25.\lambda' 2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda'^2}} = \ln 2 \Longrightarrow \lambda' = \frac{\omega_0 \ln 2}{\sqrt{(50\pi)^2 + (\ln 2)^2}} \approx 0{,}013s^{-1} \Longrightarrow \alpha' = 3M\lambda' \approx \mathbf{0{,}04}$N.s/m.

Exercice 2

1. $U = U_m + U_k + U_{2m} = -mgh + \frac{1}{2}k(x_0 - x)^2 + 2mgH$ (Fil inextensible et non glissant $\Rightarrow H = R\varphi = 2l\sin\theta$)

$$\approx -mg(l - l\cos\theta) + \frac{1}{2}k(x_0 - l\sin\theta)^2 + 2mg.2l\sin\theta$$

$$\approx -mgl\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}k(x_0 - l\theta)^2 + 4mgl\theta = -mgl\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}kx_0{}^2 - kl\theta x_0 + \frac{1}{2}kl^2\theta^2 + 4mgl\theta.$$

2. Grâce à la condition d'équilibre : $\frac{\partial U}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow -klx_0 + 4mgl = 0$, U se simplifie: $U = \frac{1}{2}(kl^2 - mgl)\theta^2 + C^{te}$.

> S'il n'est pas demandé d'écrire la condition d'équilibre, l'énergie potentielle peut être simplifiée directement en supprimant tous les termes linéaires en θ : en ne gardant que les termes quadratiques.

3. $T = T_m + T_{2m} + T_{disque} = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}2m\dot{H}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + m\dot{H}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2.$

(Fil inextensible et non glissant $\Rightarrow H = R\varphi = 2l\sin\theta \approx 2l\theta$, et $R\varphi = 2l\sin\theta \approx 2l\theta \Longrightarrow \dot{H} \approx 2l\dot{\theta}$. $R\dot{\varphi} \approx 2l\dot{\theta}$).

Donc, $T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + m(2l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{4}m(2l\dot{\theta})^2 = \frac{11}{2}ml^2\dot{\theta}^2.$

La fonction de dissipation est $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v_m^2 = \frac{1}{2}\alpha(l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha l^2\dot{\theta}^2.$

4. Le Lagrangien est : $\mathcal{L} = T - U = \frac{11}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(kl^2 - mgl)\theta^2 + C^{te}$.

L'équation du mouvement est: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{11m}\dot{\theta} + \frac{kl - mg}{11ml}\theta = 0.$

5. Pour qu'un système amorti oscille il faut que son mouvement soit pseudo-périodique, c-à-d que:

$\lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \Longrightarrow \lambda < \omega_0 \Longrightarrow \frac{\alpha}{22m} < \sqrt{\frac{kl - mg}{11ml}} \Longrightarrow \alpha < 22m\sqrt{\frac{kl - mg}{11ml}} \approx \mathbf{21}$ N.s/m.

6. La nature du mouvement est donnée par le signe de $\lambda^2 - \omega_0^2$. ($\lambda = \frac{\alpha}{22m} = 1\text{s}^{-1}$. $\omega_0^2 = \frac{kl - mg}{11ml} \approx 0{,}91\,\text{rad}^2/\text{s}^2$).

Donc, $\lambda^2 - \omega_0^2 > 0 \Rightarrow$ le mouvement est apériodique. Son équation horaire est:

$\theta(t) = A_1 e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} = A_1 e^{-\mathbf{1{,}3}t} + A_2 e^{-\mathbf{0{,}7}t}$.

Pour trouver A_1 et A_2 utilisons les conditions initiales:

$$\begin{cases} \theta(0) = A_1 + A_2 = 3^\circ. \\ \dot{\theta}(0) = -\mathbf{1{,}3}A_1 - \mathbf{0{,}7}A_2 = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_1 = -\mathbf{3{,}5}^\circ. \\ A_2 = \mathbf{6{,}5}^\circ. \end{cases} \Longrightarrow \theta(t) = -\mathbf{3{,}5}e^{-\mathbf{1{,}3}t} + \mathbf{6{,}5}e^{-\mathbf{0{,}7}t}. \quad (^\circ)$$

7. Pour que l'amplitude soit divisée par 3 il faut un temps τ tel que $Ae^{-\lambda(t+\tau)} = \frac{1}{3}Ae^{-\lambda t} \Longrightarrow$

$\lambda\tau = \ln 3 \Longrightarrow \tau = \frac{\ln 3}{\lambda}$. Avec $\alpha = 2$N.s/m, on trouve $\lambda \approx 0{,}09\text{s}^{-1}$. Soit $\tau \approx \mathbf{12{,}2}$s.

8. Puisque après 20 oscillations l'amplitude diminue à 1/4 de sa valeur on a $Ae^{-\lambda'(t+20T')} = \frac{1}{4}Ae^{-\lambda' t} \Longrightarrow$

$20\lambda' T' = \ln 4 \Longrightarrow \frac{20\lambda'.2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda'^2}} = \ln 4 \Longrightarrow \lambda' = \frac{\omega_0 \ln 4}{\sqrt{(40\pi)^2 + (\ln 4)^2}} \approx 0{,}01\text{s}^{-1} \Longrightarrow \alpha' = 22m\lambda' \approx \mathbf{0{,}22}$N.s/m.